



## Лекция № 2

# «СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА»

Ведущий преподаватель: канд. техн. наук, доцент кафедры ИУТС Альчаков Василий Викторович

# 2 Спектральный анализ

## Постановка задачи

- Для зашумленного полигармонического сигнала получить спектральное представление – **определить состав сигнала**
- Избавиться от шумов – **реализовать простейший цифровой фильтр**

## Получение зашумленного сигнала

wgn

R2016b

Generate white Gaussian noise

[collapse all in page](#)

### Syntax

```
y = wgn(m,n,p)
y = wgn(m,n,p,imp)
y = wgn(m,n,p,imp,state)
y = wgn(...,powertype)
y = wgn(...,outputtype)
```

### Description

`y = wgn(m,n,p)` generates an  $m$ -by- $n$  matrix of white Gaussian noise.  $p$  specifies the power of  $y$  in decibels relative to a watt. The default load impedance is 1 ohm.

# 3 Спектральный анализ

## Получение зашумленного сигнала

**awgn**

**R2016b**

Add white Gaussian noise to signal

[collapse all in page](#)

### Syntax

```
y = awgn(x,snr)
y = awgn(x,snr,sigpower)
y = awgn(x,snr,'measured')
y = awgn(x,snr,sigpower,s)
y = awgn(x,snr,'measured',state)
y = awgn(...,powertype)
```

### Description

`y = awgn(x,snr)` adds white Gaussian noise to the vector signal `x`. The scalar `snr` specifies the signal-to-noise ratio per sample, in dB. If `x` is complex, `awgn` adds complex noise. This syntax assumes that the power of `x` is 0 dBW.

# 4 Спектральный анализ

## Получение зашумленного сигнала

### randn

R2016b

Normally distributed random numbers

[collapse all in page](#)

### Syntax

```
X = randn
X = randn(n)
X = randn(sz1,...,szN)
X = randn(sz)

X = randn(__,typename)
X = randn(__,'like',p)
```

### Even-Length Input with Sample Rate

Obtain the periodogram for an even-length signal sampled at 1 kHz using both `fft` and `periodogram`. Compare the results.

Create a signal consisting of a 100 Hz sine wave in  $N(0,1)$  additive noise. The sampling frequency is 1 kHz. The signal length is 1000 samples. Use the default settings of the random number generator for reproducible results.

```
rng default
Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:1-1/Fs;
x = cos(2*pi*100*t) + randn(size(t));
```

### Description

`X = randn` returns a random scalar drawn from the standard normal distribution.

[example](#)

## Получение зашумленного сигнала

```
%% Polyharmonic generator
t = 0:T:(N - 1)*T;

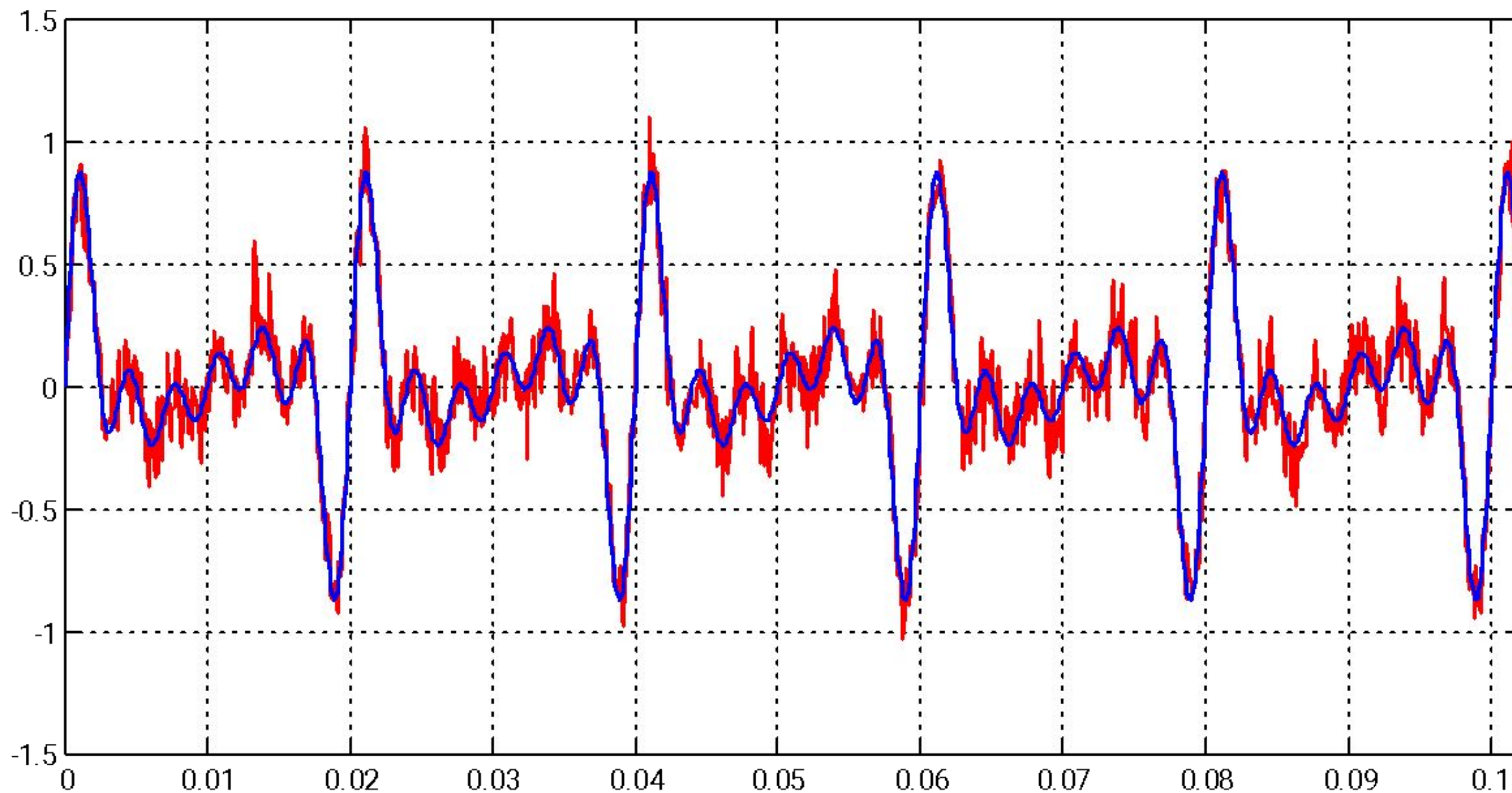
sinSum = 0;
for i=1:Fcount
    sinSum = sinSum + sin(2*pi*f(i)*t);
end
% Bringing to a predetermined amplitude
sinSum = sinSum*A/Fcount;
sinSumN = sinSum + wgn(1,length(sinSum), 1)/35;
sinSumN = awgn(sinSum, 35);
sinSumN = sinSum + randn(1,length(sinSum), 1)/35;
% Visualization
plot(t, sinSumN, '-r', t, sinSum, '-b', 'LineWidth', 2)
xlim([min(t) max(t)])
grid on
```

## Получение зашумленного сигнала

```
%% Polyharmonic generator
t = 0:T:(N - 1)*T;

sinSum = 0;
for i=1:Fcount
    sinSum = sinSum + sin(2*pi*f(i)*t);
end
% Bringing to a predetermined amplitude
sinSum = sinSum*A/Fcount;
sinSumN = sinSum + wgn(1,length(sinSum), 1)/35;
sinSumN = awgn(sinSum, 35);
sinSumN = sinSum + randn(1,length(sinSum), 1)/35;
% Visualization
plot(t, sinSumN, '-r', t, sinSum, '-b', 'LineWidth', 2)
xlim([min(t) max(t)])
grid on
```

## Получение зашумленного сигнала



## Преобразование Фурье

**Краткие теоретические сведения**

Сигнал  $s_T(t)$  называется периодическим, если все его значения повторяются через промежутки времени, кратные  $T$ , где  $T$  – период повторения сигнала,  $k \in Z$ . Такой сигнал можно разложить в гармонический ряд Фурье:

$$s_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos 2\pi n F_1 t + b_n \cdot \sin 2\pi n F_1 t), \quad (1)$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая сигнала, определяемая выражением

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t) dt. \quad (2)$$

Частота первой гармоники  $F_1$  обратно пропорциональна периоду сигнала

$$F_1 = \frac{1}{T}. \quad (3)$$

Коэффициенты ряда Фурье  $a_n$  и  $b_n$  определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot \cos(2\pi n F_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) \cdot \sin(2\pi n F_1 t) dt. \quad (4)$$



# 9 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье

Зависимость коэффициентов  $\{A_0, a_n, b_n\}$  от частоты называют гармоническим спектром периодического сигнала в квадратурной форме. Эта зависимость изображается в виде дискретной функции частоты для значений  $f = n \cdot F_1$ ,  $n = 1, 2, \dots \infty$ . Коэффициент  $A_0$  определен при  $f = 0$ . Если функция сигнала  $s(t)$  чётная, то коэффициенты  $b_n = 0$ , если нечётная, то  $a_n = 0$ .

Периодический сигнал  $s_T(t)$  также можно представить в амплитудно-фазовой форме ряда Фурье:

$$s_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2\pi n F_1 t + \varphi_n), \quad (5)$$

где  $A_n$  – амплитуда  $n$ -й гармоники периодического сигнала, определяемая по формуле

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (6)$$

$\varphi_n$  – начальная фаза  $n$ -й гармоники периодического сигнала

$$\varphi_n = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}, & a_n > 0, \\ -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \pm \pi, & a_n < 0, \end{cases} \quad (7)$$

$n \cdot F_1$  – частота  $n$ -й гармоники периодического сигнала.

# 10 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье

Зависимость амплитуд гармоник периодического сигнала от частоты называется односторонним амплитудным спектром, а зависимость начальной фазы гармоник от частоты называется односторонним фазовым спектром сигнала. Обе зависимости определены для значений частоты  $f = n \cdot F_1$ ,  $n = 1, 2, \dots \infty$ . Общий вид этих зависимостей приведен на рис. 1.

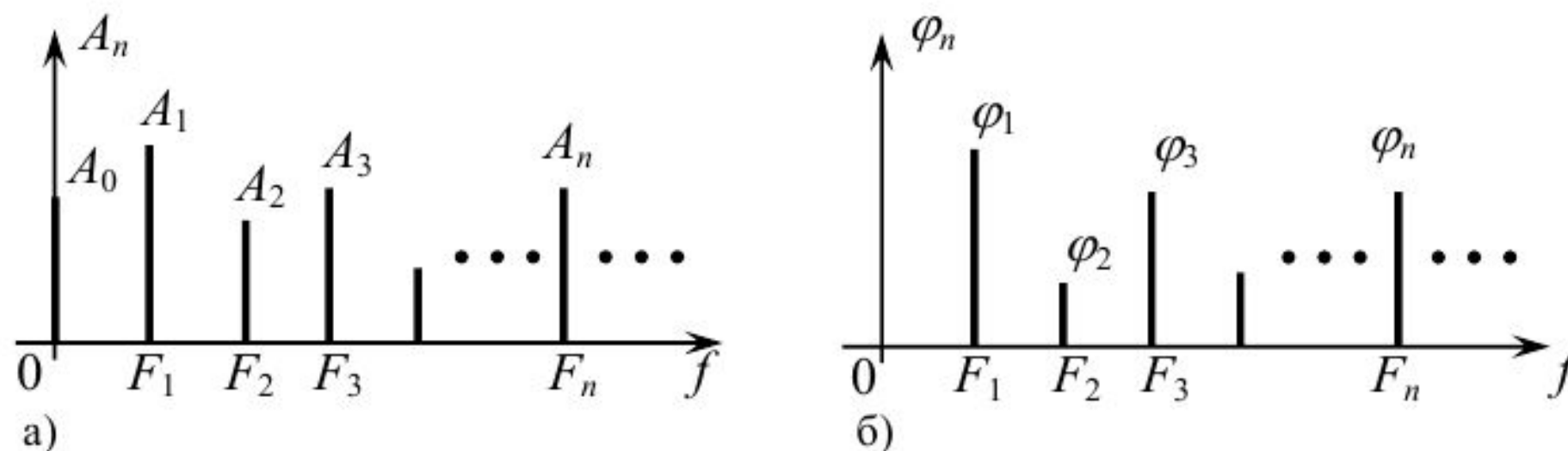
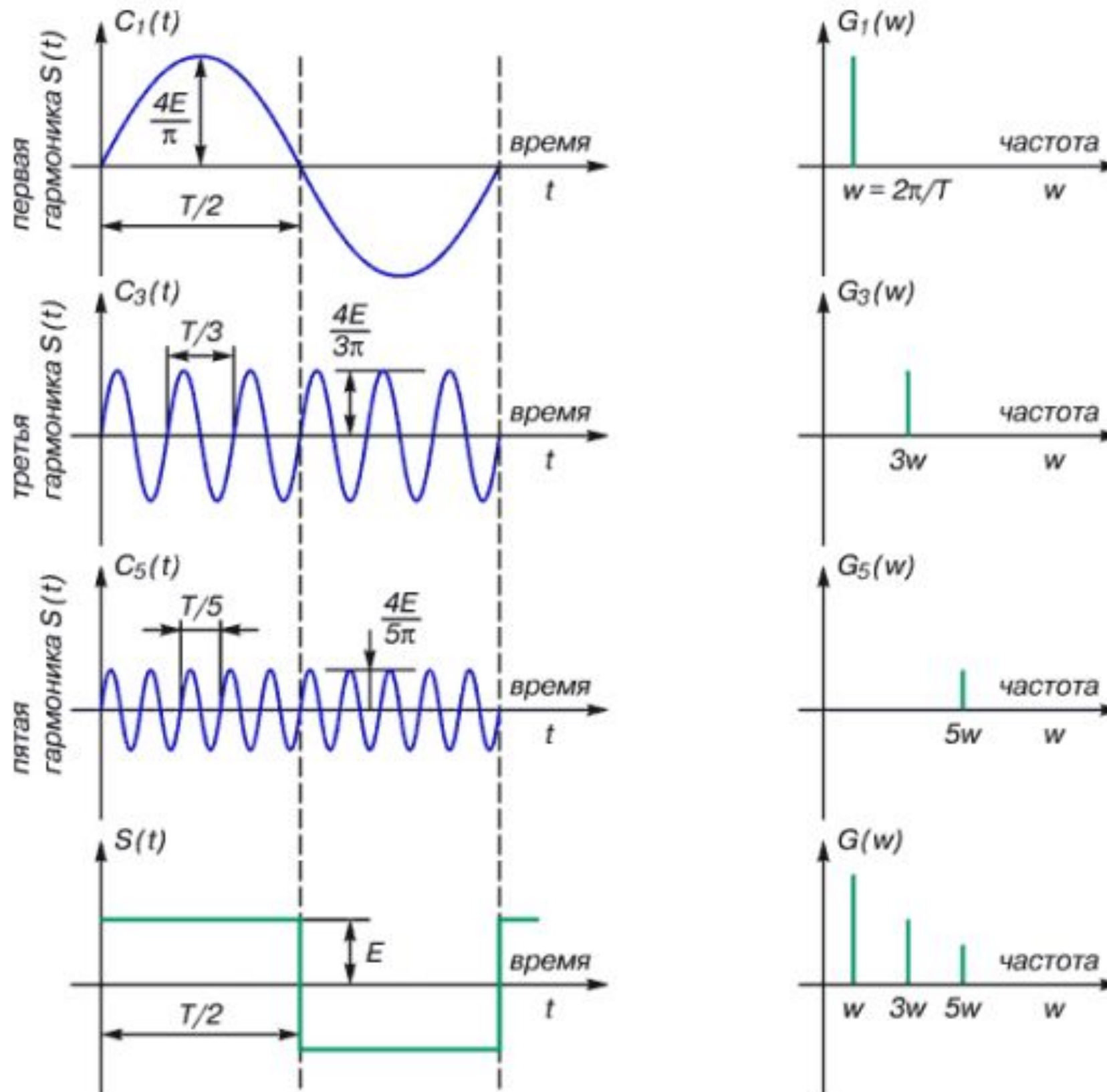


Рис. 1. Односторонний спектр периодического сигнала:  
а) – амплитудный спектр, б) – фазовый спектр

Для расчета односторонних спектров необходимо знать аналитическое выражение сигнала  $s(t)$ . Тогда по формуле (2) вычисляется постоянная составляющая сигнала  $A_0$ , по формуле (3) – частота первой гармоники  $F_1$ , по формулам (4) – коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ , по формулам (6) и (7) – амплитуды и начальные фазы гармоник сигнала.

# 11 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье



# 12 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье

**fft**

**R2016b**

Fast Fourier transform

[collapse all in page](#)

### Syntax

```
Y = fft(X)
```

[example](#)

```
Y = fft(X,n)
```

[example](#)

```
Y = fft(X,n,dim)
```

[example](#)

### Description

`Y = fft(X)` computes the [discrete Fourier transform \(DFT\)](#) of `x` using a fast Fourier transform (FFT) algorithm.

[example](#)

- If `X` is a vector, then `fft(X)` returns the Fourier transform of the vector.
- If `X` is a matrix, then `fft(X)` treats the columns of `X` as vectors and returns the Fourier transform of each column.

# 13 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье

```
%% Fourie
```

```
FsinSum = fft(sinSum);
```

```
FsinSumN = fft(sinSumN);
```

The screenshot displays the MATLAB workspace and a variable viewer window. The workspace contains the following variables:

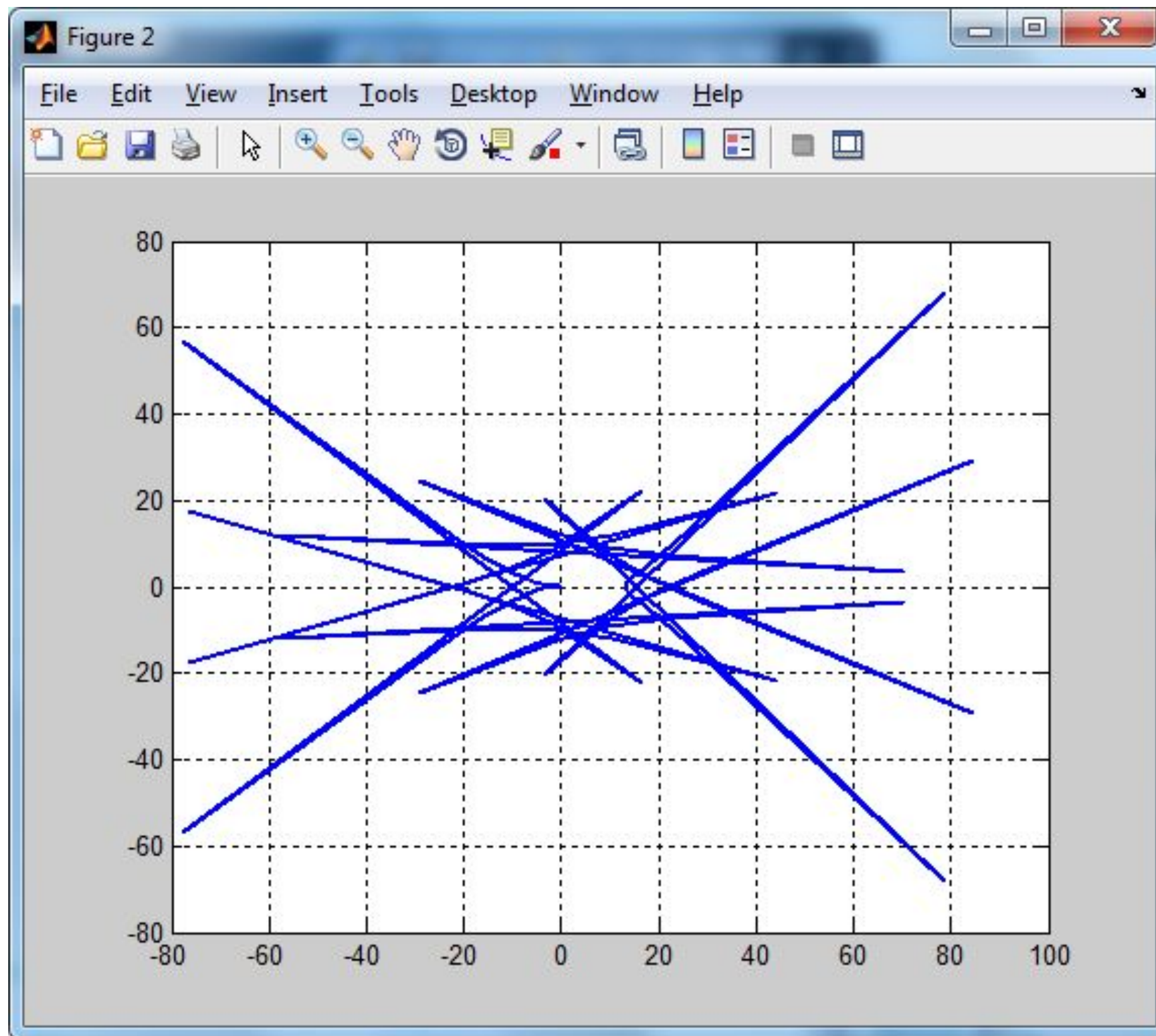
Name	Value	Min	Max
A	1	1	1
F0	100	100	100
Fcount	5	5	5
FsinSum	<1x1024 complex do...>	-0.0810	78.669...
N	1024	1024	1024
T	1.0000e-04	1.0000...	1.0000...
dF	50	50	50
f	[100,150,200,250,300]	100	300
i	5	5	5
sinSum	<1x1024 double>	-0.8689	0.8689
sinSumN	<1x1024 double>	-0.8899	0.9174
t	<1x1024 double>	0	0.1023

The variable viewer window shows the first six elements of the `FsinSum` array:

	1	2	3	4	5	6
1	13.1431 + 0.0000i	13.1990 - 0.3667i	13.3714 - 0.7544i	13.6747 - 1.1884i	14.1382 - 1.7039i	14.8154 - 2....
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

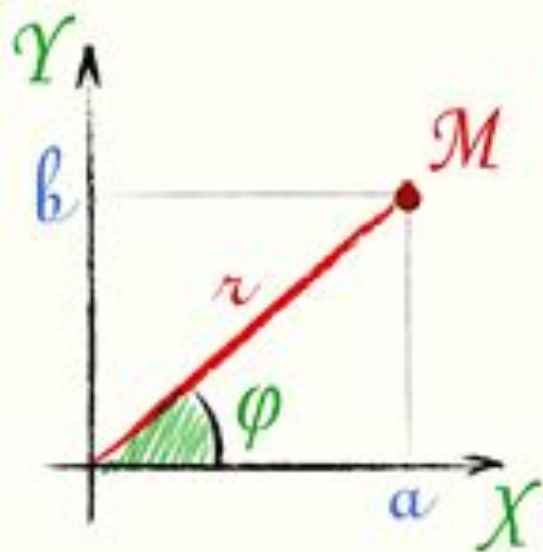
# 14 Спектральный анализ

## Преобразование Фурье



# 15 Спектральный анализ

## Амплитудный спектр АЧХ



Длина вектора, изображающего комплексное число, называется **модулем комплексного числа**. Модуль любого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа  $a + b \cdot i$  обозначается  $|a + b \cdot i|$ , а также буквой  $r$ . Из чертежа видно, что:

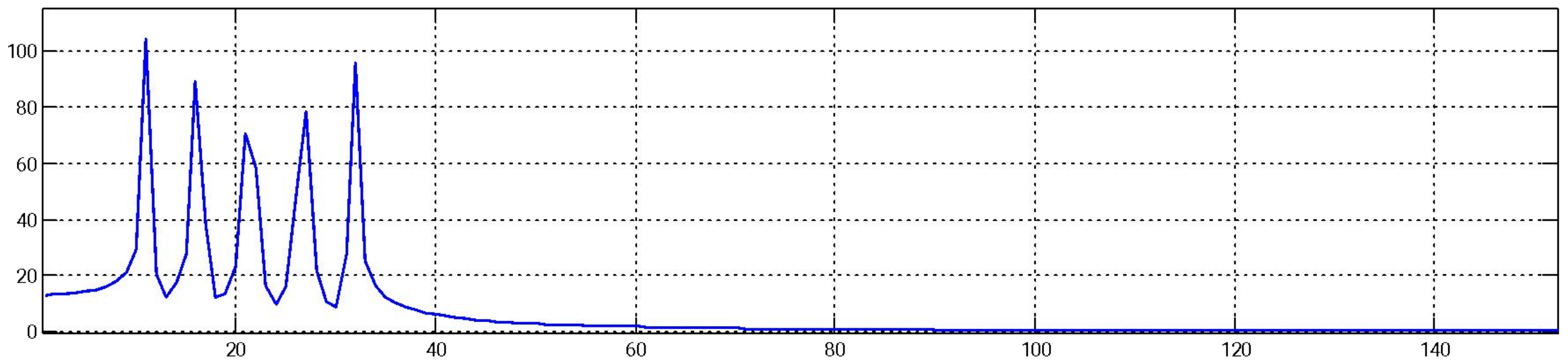
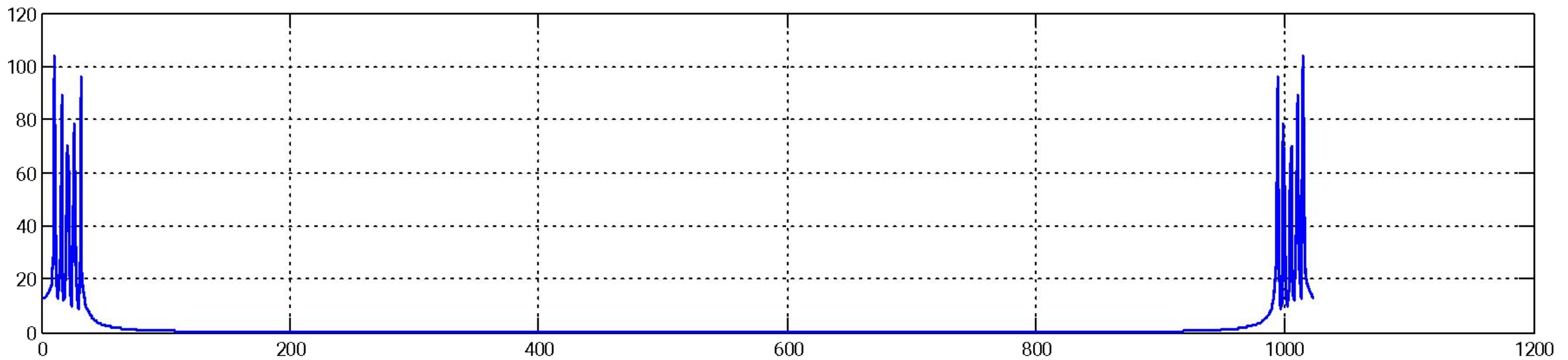
1.

$$r = |a + b \cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

```
AFsinSum = abs(FsinSum);  
AFsinSumN = abs(FsinSumN);
```

# 16 Спектральный анализ

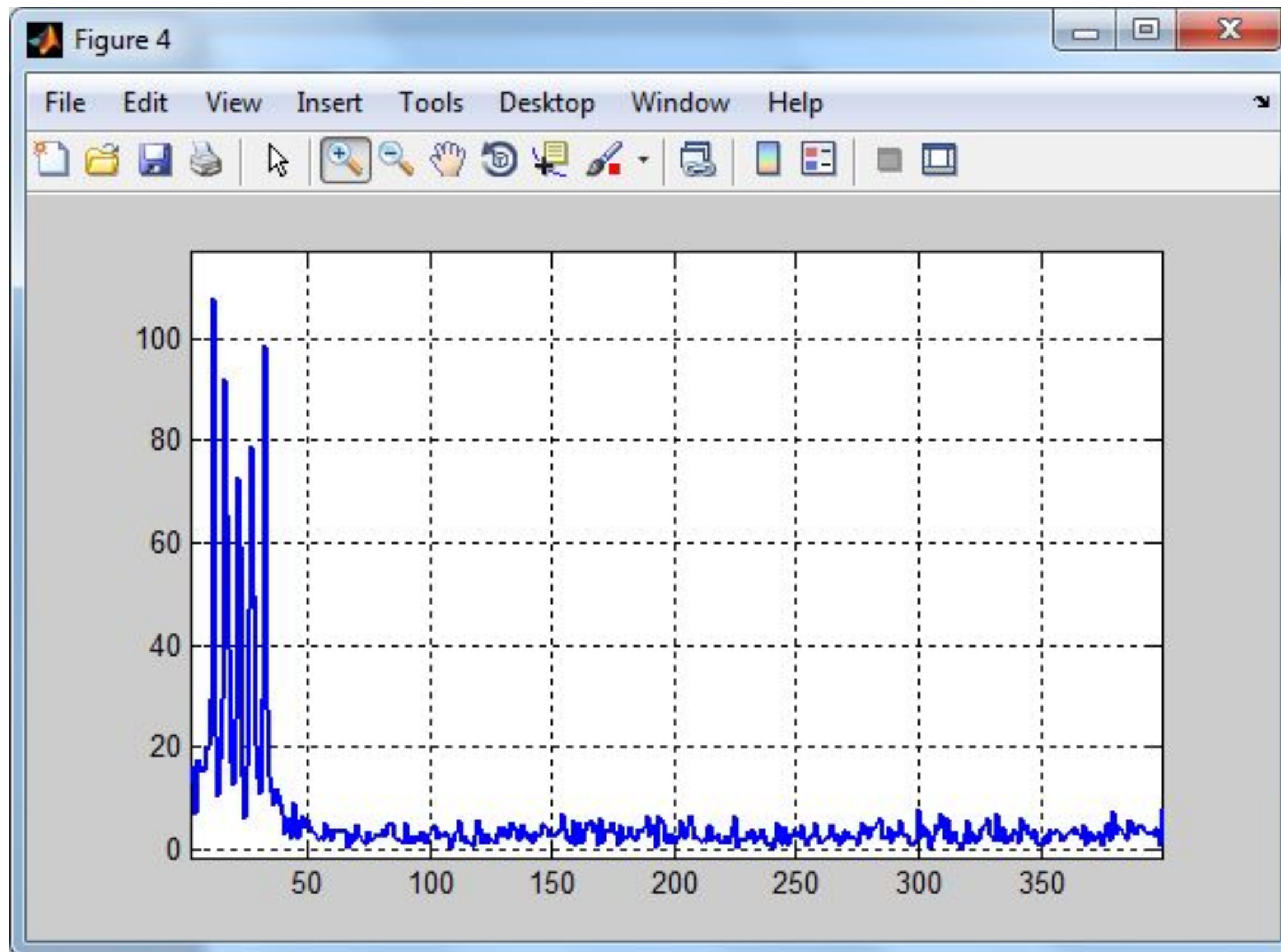
## Амплитудный спектр АЧХ





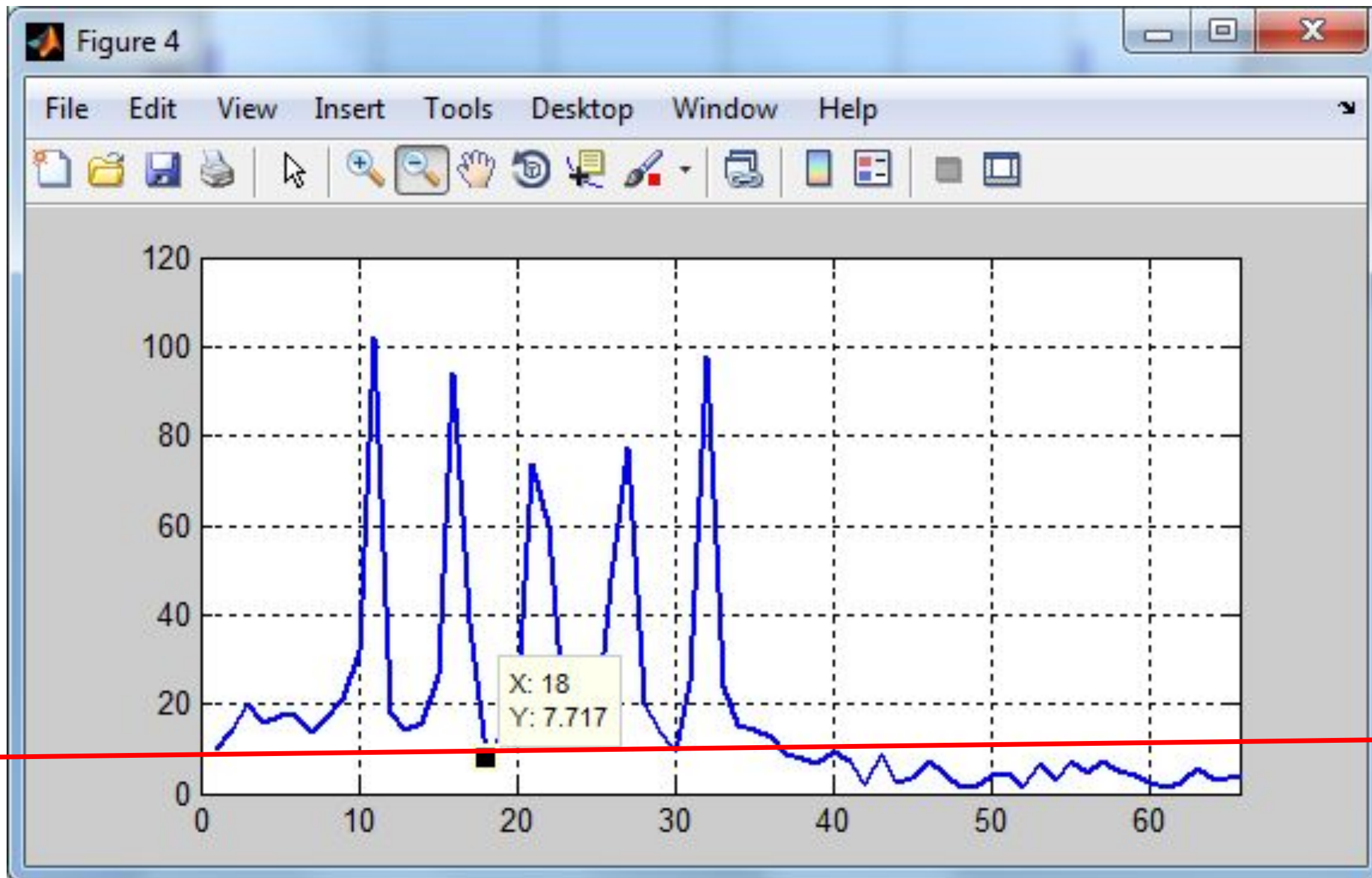
# 17 Спектральный анализ

## Амплитудный спектр АЧХ (сигнал + шум)



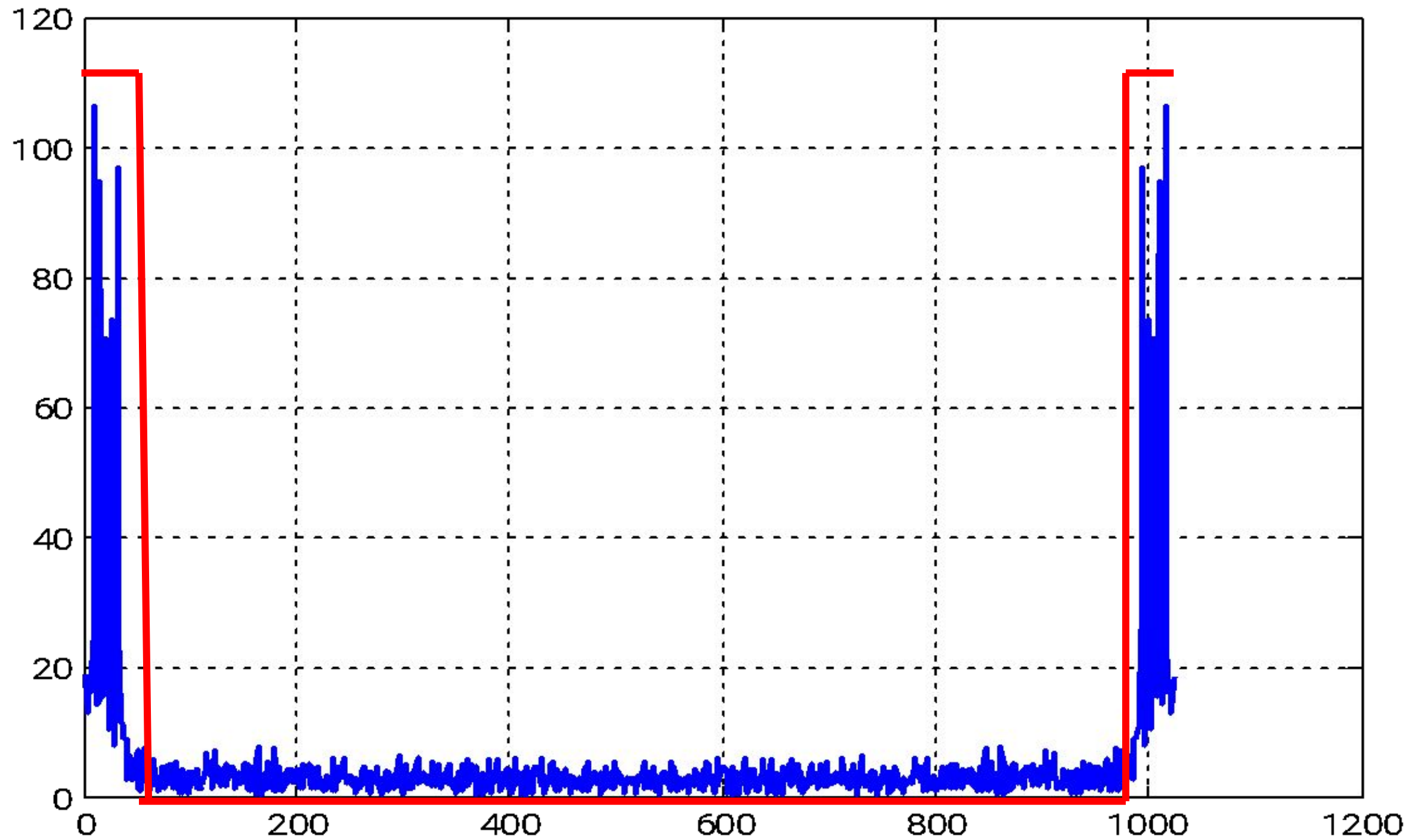
# 18 Спектральный анализ

## Простейший цифровой фильтр



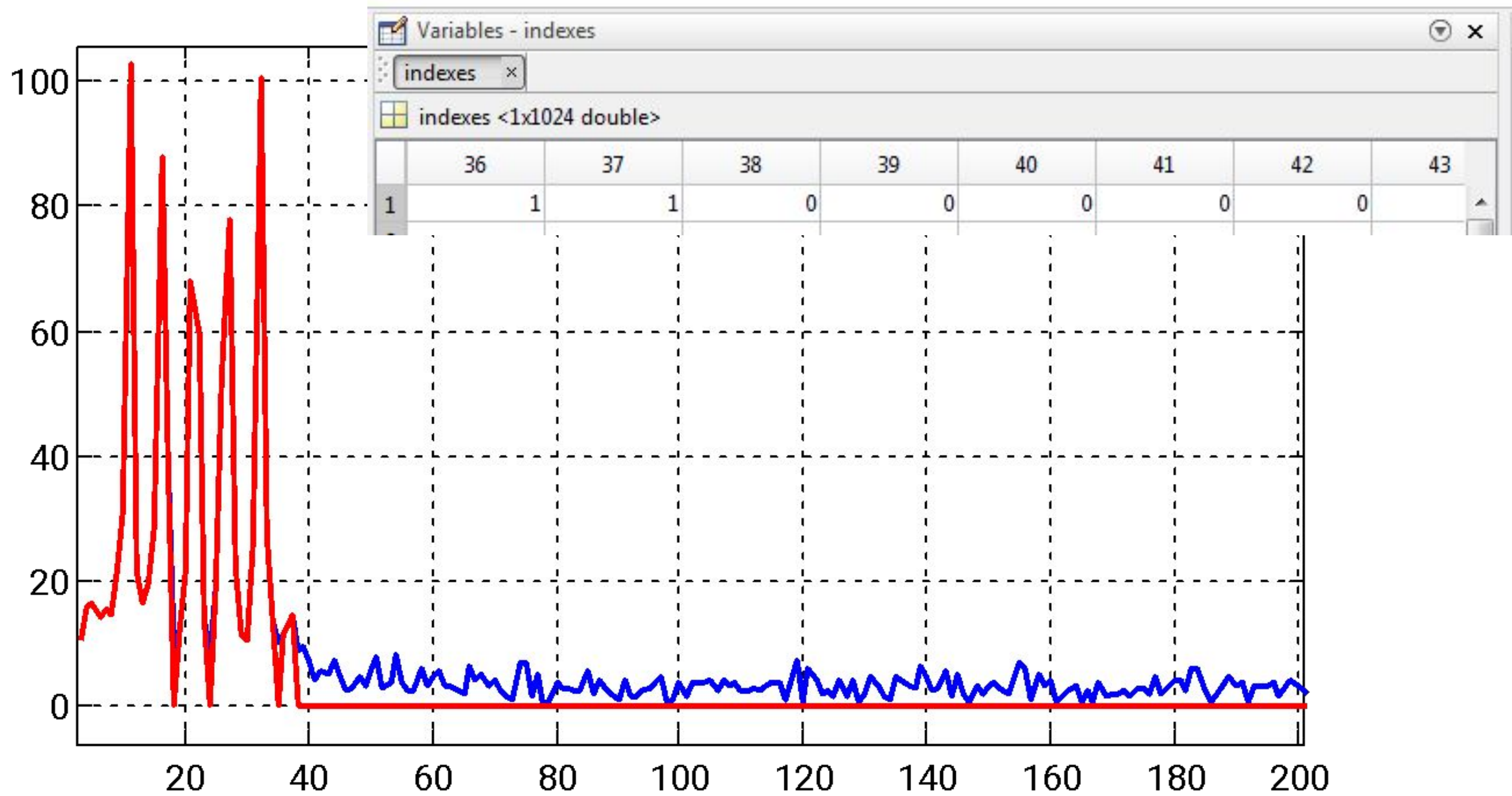
# 19 Спектральный анализ

## Простейший цифровой фильтр



# 20 Спектральный анализ

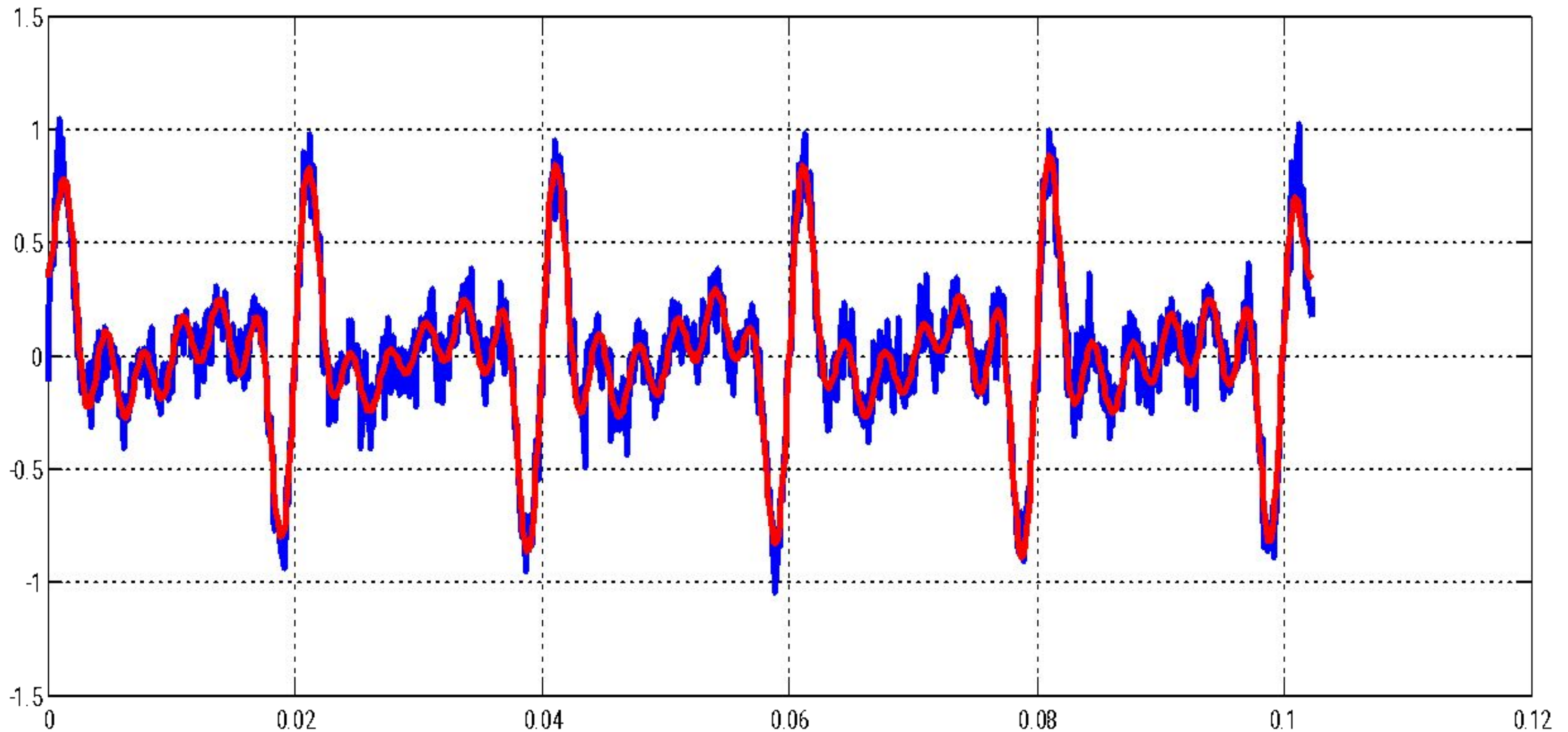
## Простейший цифровой фильтр



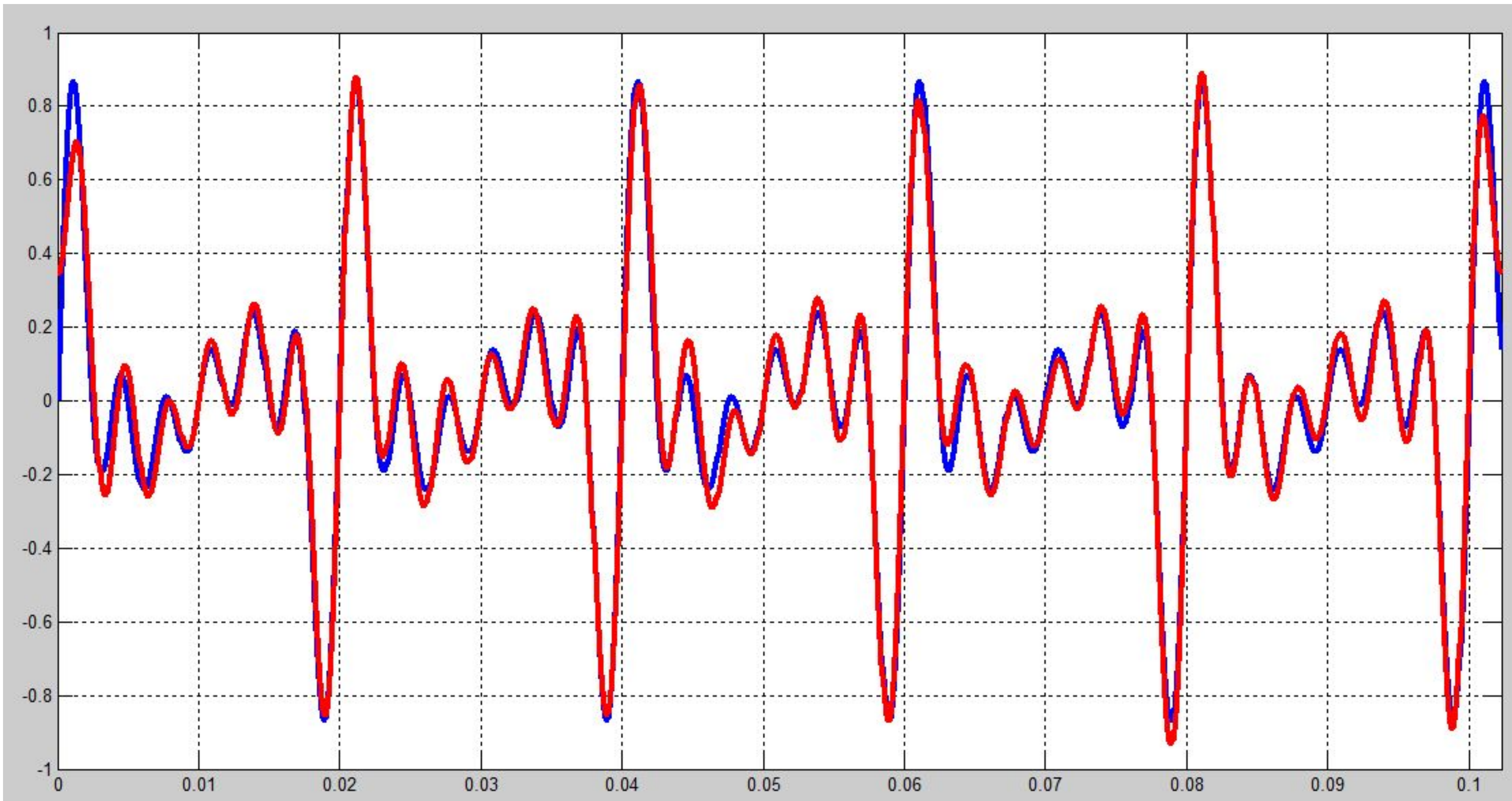
# 21 Спектральный анализ

## Простейший цифровой фильтр

```
YOFFT = FsinSumN.*indexes;
```



## Простейший цифровой фильтр



## Использование разрешения по частоте

$$b = \frac{1}{NT} \quad i = 0 .. N \quad b * i = 0, b, 2b, \dots$$

