Решение логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма: методы, приемы, равносильные переходы

учитель математики МБОУ СОШ № 143

Князькина Т. В.

Среди всего многообразия логарифмических неравенств отдельно изучают неравенства с переменным основанием. Они решаются по специальной формуле, которую почему-то редко рассказывают в школе:

$\log_{k(x)} f(x) \vee \log_{k(x)} g(x) \Rightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (k(x) - 1) \vee 0$

Вместо галки «∨» можно поставить любой знак неравенства: больше или меньше. Главное, чтобы в обоих неравенствах знаки были одинаковыми.

Так мы избавляемся от логарифмов и сводим задачу к рациональному неравенству. Последнее решается намного проще, но при отбрасывании логарифмов могут возникнуть лишние корни. Чтобы их отсечь, достаточно найти область допустимых значений. Не забывайте ОДЗ логарифма!

Все, что связано с областью допустимых значений, надо выписать и решить отдельно:

$f(x) > 0$; $g(x) > 0$; $k(x) > 0$; $k(x) \neq 1$.

Эти четыре неравенства составляют систему и должны выполняться одновременно. Когда область допустимых значений найдена, остается пересечь ее с решением рационального неравенства — и ответ готов.

Решите неравенство:

$$\log_{x^2+1} 10 < 1$$

Решение

Для начала выпишем ОДЗ логарифма $\begin{cases} 10 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ x^2 + 1 \neq 1 \end{cases}$

Первые два неравенства выполняются автоматически, а последнее придется расписать. Поскольку квадрат числа равен нулю тогда и только тогда, когда само число равно нулю, имеем:

$x^2 + 1 \neq 1;$

$x^2 \neq 0;$

$x \neq 0.$

Получается, что ОДЗ логарифма — все числа, кроме нуля:

$x \in (-\infty0) \cup (0;+\infty)$. Теперь решаем основное неравенство:

$$\log_{x^2+1} 10 < 1;$$

$$\log_{x^2+1} 10 < \log_{x^2+1} (x^2+1)^1;$$

Выполняем переход от логарифмического неравенства к рациональному. В исходном неравенстве стоит знак «меньше», значит полученное неравенство тоже должно быть со знаком «меньше».

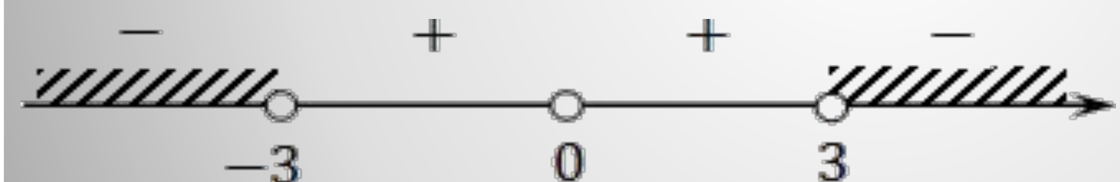
Имеем:

$(10 - (x^2 + 1)) \cdot (x^2 + 1 - 1) < 0;$

$(9 - x^2) \cdot x^2 < 0;$

$(3 - x) \cdot (3 + x) \cdot x^2 < 0.$

Нули этого выражения: $x = 3$; $x = -3$; $x = 0$. Причем $x = 0$ — корень второй кратности, значит при переходе через него знак функции не меняется. Имеем:



Получаем $x \in (-\infty\ -3) \cup (3; +\infty)$. Данное множество полностью содержится в ОДЗ логарифма, значит это и есть ответ.

Ответ: $x \in (-\infty\ -3) \cup (3; +\infty)$

Преобразование логарифмических неравенств

Часто исходное неравенство отличается от приведенного выше. Это легко исправить по стандартным правилам работы с логарифмами. А именно:

- Любое число представимо в виде логарифма с заданным основанием;
- Сумму и разность логарифмов с одинаковыми основаниями можно заменить одним логарифмом.
- Отдельно хочу напомнить про область допустимых значений. Поскольку в исходном неравенстве может быть несколько логарифмов, требуется найти ОДЗ каждого из них. Таким образом, общая схема решения логарифмических неравенств следующая:
- Найти ОДЗ каждого логарифма, входящего в неравенство;
- Свести неравенство к стандартному по формулам сложения и вычитания логарифмов;
- Решить полученное неравенство по схеме, приведенной выше.

- Решите неравенство: $\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 2$

Решение

Найдем область определения (ОДЗ) первого логарифма: $\frac{3x-2}{x-1} > 0$

Решаем методом интервалов. Находим нули числителя:

$3x - 2 = 0;$

$x = 2/3.$

Затем — нули знаменателя:

$x - 1 = 0;$

$x = 1.$

Отмечаем нули и знаки на координатной прямой:

Получаем $x \in (-\infty\ 2/3) \cup (1; +\infty)$. У второго логарифма ОДЗ будет таким же. Не верите — можете проверить. Теперь преобразуем второй логарифм так, чтобы в основании стояла двойка:

$$3\log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} = 3\log_{2^3} \frac{(x-1)^3}{3x-2} = \log_2 \frac{(x-1)^3}{3x-2}$$

Как видите, тройки в основании и перед логарифмом сократились. Получили два логарифма с одинаковым основанием. Складываем их:

$$\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + \log_2 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 2;$$

$$\log_2 \left(\frac{3x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^3}{3x-2}\right) < 2;$$

$$\log_2 (x-1)^2 < 2;$$

$$\log_2 (x-1)^2 < \log_2 2^2.$$

Получили стандартное логарифмическое неравенство. Избавляемся от логарифмов по формуле. Поскольку в исходном неравенстве стоит знак «меньше», полученное рациональное выражение тоже должно быть меньше нуля. Имеем:

$(f(x) - g(x)) \cdot (k(x) - 1) < 0;$

$((x - 1)^2 - 2^2)(2 - 1) < 0;$

$x^2 - 2x + 1 - 4 < 0;$

$x^2 - 2x - 3 < 0;$

$(x - 3)(x + 1) < 0;$

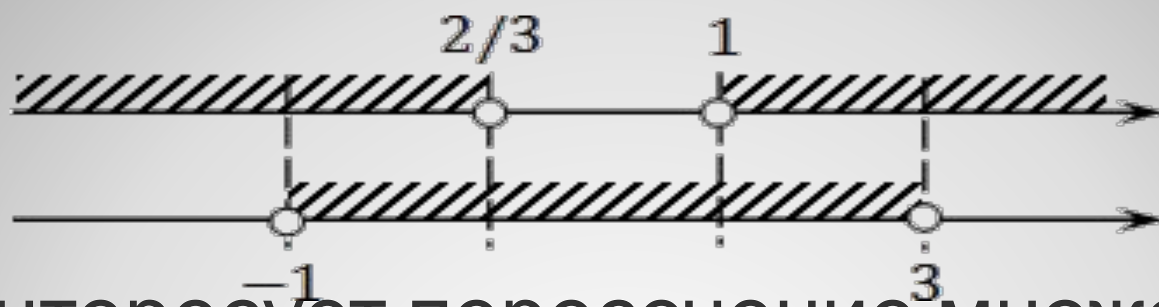
$x \in (-1; 3).$

Получили два множества:

ОДЗ: $x \in (-\infty\ 2/3) \cup (1; +\infty);$

Кандидат на ответ: $x \in (-1; 3).$

Осталось пересечь эти множества — получим настоящий ответ:



Нас интересует пересечение множеств, поэтому выбираем интервалы, закрашенные на обоих стрелах.

Получаем:

$x \in (-1;\ 2/3) \cup (1;\ 3)$ —все точки выколоты.

Ответ:

$x \in (-1;\ 2/3) \cup (1;\ 3)$

Решение заданий ЕГЭ-2014 типа С3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

Решение.

1) *ОДЗ:*

$$\begin{cases} x+8>0, \\ \dfrac{x+1}{x-7}>0, \\ x+8 \ne 1; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-8;\ -7) \cup (-7;\ -1) \cup (7;\ +\infty).$$

2) $4^x - 129 \le 2^{x+7}$

$4^x - 128 \cdot 2^x - 129 \le 0$

Пусть $2^x = t,\ t > 0,$ *тогда*

$t^2 - 128 \cdot t - 129 \le 0$

$(t+1)(t-129) \le 0$

$-1 \le t \le 129$

Учитывая, что $t > 0$, *имеем*

$0 < t \le 129$

Вернемся к исходной переменной

$0 < 2^x \le 129$

$2^x \le 2^{\log_2 129}$

$x \le \log_2 129$

$\log_2 129 > 7 = \log_2 128$

С учетом ОДЗ, имеем

$x \in (-8;\ -7) \cup (-7;\ -1) \cup (7;\ \log_2 129].$

3) Решите систему неравенств *(продолжение)*

$$\begin{cases} 4^x - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{7-x}{x+1}\right)^2 \le 1 - \log_{x+8}\frac{x+1}{x-7}$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2 + \log_{x+8}\frac{x+1}{x-7} \le \log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x+1}{x-7}\right) \le \log_{x+8}(x+8)$$

$$\log_{x+8}\left(\frac{x-7}{x+1}\right) \le \log_{x+8}(x+8)$$

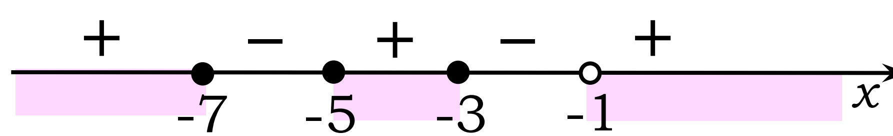
$$(x+8-1)\left(\frac{x-7}{x+1} - (x+8)\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x-7-x^2-9x-8}{x+1}\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{-x^2-8x-15}{x+1}\right) \le 0$$

$$(x+7)\left(\frac{x^2+8x+15}{x+1}\right) \ge 0$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x+5)}{x+1} \ge 0$$



$$x \in (-\infty; -7] \cup [-5; -3] \cup (-1; +\infty)$$

С учетом ОДЗ, имеем

$$x \in (-8; -7) \cup [-5; -3] \cup (7; +\infty).$$

Решите систему неравенств

(продолжение)

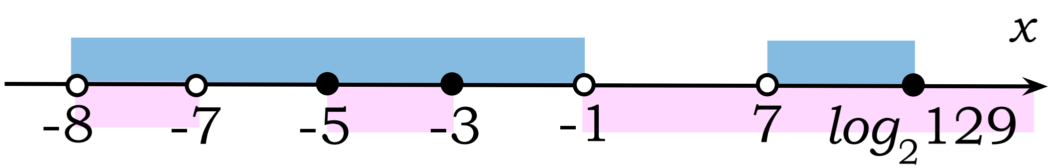
$$\begin{cases} 4^{x} - 129 \le 2^{x+7}, \\ \log_{x+8}\left(\dfrac{7-x}{x+1}\right)^{2} \le 1 - \log_{x+8}\dfrac{x+1}{x-7}. \end{cases}$$

4) *Общее решение:*

$$x \in (-8;\ -7) \cup (-7;\ -1) \cup \left(7;\ \log_2 129\right]$$

и

$$x \in (-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup (7;\ +\infty)$$



$$x \in (-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup \left(7;\ \log_2 129\right]$$

Ответ : $(-8;\ -7) \cup [-5;\ -3] \cup \left(7;\ \log_2 129\right]$.

Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 25-x^2>0, \\ 24+2x-x^2>0, \\ 25-x^2\neq 16; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-4;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(3;\ 5).$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$$

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16}$$

$$\left(\frac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14}-\frac{25-x^2}{16}\right)>0$$

$$(9-x^2)(8(24+2x-x^2)-7(25-x^2))>0$$

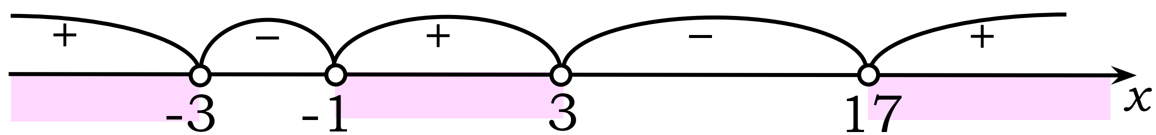
$$(9-x^2)(17+16x-x^2)>0$$

Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$

(продолжение)

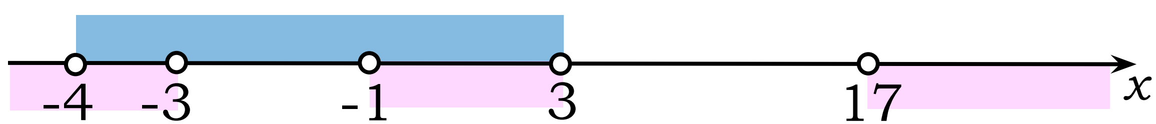
$$\left(x^2-9\right)\left(x^2-16x-17\right) > 0$$

$$(x-3)(x+3)(x+1)(x-17) > 0$$



$$x \in (-\infty;\ -3) \cup (-1;\ 3) \cup (17;\ +\infty).$$

С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-4;\ -3) \cup (-1;\ 3).$$

Ответ: $(-4;\ -3) \cup (-1;\ 3).$

Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right).$$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ 36+16x-x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \qquad x\in(-2;\,-1)\cup(-1;\,18).$$

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)$$

$$4\log^2_{x+2}|x-18|+32\le 16\log_{x+2}(x+2)(18-x)$$

$$\text{С учетом ОДЗ, имеем}$$

$$4\log^2_{x+2}(18-x)+32\le 16\left(\log_{x+2}(x+2)+\log_{x+2}(18-x)\right)$$

$$4\log^2_{x+2}(18-x)-16\log_{x+2}(18-x)+16\le 0$$

$$\log^2_{x+2}(18-x)-4\log_{x+2}(18-x)+4\le 0$$

$$\left(\log_{x+2}(18-x)-2\right)^2\le 0$$

$$\log_{x+2}(18-x)=2$$

Решите неравенство

$$\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)$$

(продолжение)

$$\log_{x+2}(18-x)=\log_{x+2}(x+2)^2$$

$$18-x=(x+2)^2$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-7, \quad -\textit{не удовлетвор яет ОДЗ} \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ : 2.

Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

<u>Решение.</u>

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ 2-x\ne 1, \\ x+2>0, \\ x+3>0, \\ x+3\ne 1, \\ 3-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;\,1)\cup(1;\,2)$$

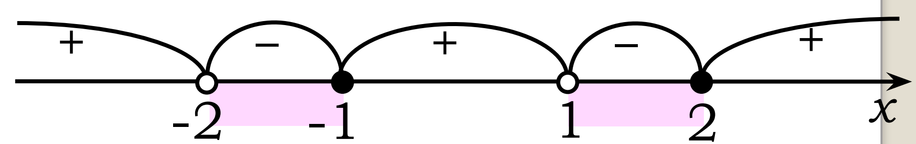
$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$$

$$\frac{\log_2(x+2)\cdot\log_2(3-x)}{\log_2(2-x)\cdot\log_2(x+3)}\le 0$$

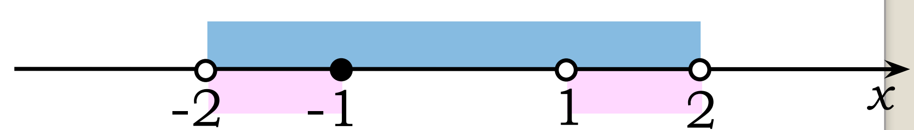
$$\frac{((x+2)-1)\cdot((3-x)-1)}{((2-x)-1)\cdot((x+3)-1)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(2-x)}{(1-x)\cdot(x+2)}\le 0$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+2)}\le 0$$



С учетом ОДЗ, имеем



$$x\in(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$$

Ответ: $(-2;\,-1]\cup(1;\,2)$