

Теорема Виета

Подготовил учитель математики 34 школы Белгорода
Василисин С.В.

В математике существуют специальные приемы, с которыми многие квадратные уравнения решаются очень быстро и без всяких дискриминантов. Более того, при надлежащей тренировке многие начинают решать квадратные уравнения устно, буквально «с первого взгляда».

Квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$ называется приведенным. Обратите внимание: коэффициент при x^2 равен 1. Никаких других ограничений на коэффициенты не накладывается.

Примеры:

$x^2 + 7x + 12 = 0$ — это приведенное квадратное уравнение;

$x^2 - 5x + 6 = 0$ — тоже приведенное;

Задача. Преобразовать квадратное уравнение в приведенное:

$$3x^2 - 12x + 18 = 0;$$

$$-4x^2 + 32x + 16 = 0;$$

$$1,5x^2 + 7,5x + 3 = 0;$$

$$2x^2 + 7x - 11 = 0$$

- ▶ Разделим каждое уравнение на коэффициент при переменной **x^2** . Получим:
- ▶ **$3x^2 - 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$** — разделили все на **3**;
- ▶ **$-4x^2 + 32x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 4 = 0$** — разделили на **-4**;
- ▶ **$1,5x^2 + 7,5x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$** — разделили на **1,5**, все коэффициенты стали целочисленными;
- ▶ **$2x^2 + 7x - 11 = 0 \Rightarrow x^2 + 3,5x - 5,5 = 0$** — разделили на **2**. При этом возникли дробные

Как видите, приведенные квадратные уравнения могут иметь целые коэффициенты даже в том случае, когда исходное уравнение содержало дроби. Теперь сформулируем основную теорему, для которой, собственно, и вводилось понятие приведенного квадратного уравнения:

- ▶ Теорема Виета. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$. Предположим, что это уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2 . В этом случае верны следующие утверждения:
 - ▶ $x_1 + x_2 = -b$. Другими словами, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при переменной x , взятому с противоположным знаком;
 - ▶ $x_1 \cdot x_2 = c$. Произведение корней квадратного уравнения равно свободному коэффициенту

- ▶ Примеры. Для простоты будем рассматривать только приведенные квадратные уравнения, не требующие дополнительных преобразований:
- ▶ $x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -(-9) = 9; x_1 \cdot x_2 = 20;$ корни: $x_1 = 4; x_2 = 5;$
- ▶ $x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = -15;$ корни: $x_1 = 3; x_2 = -5;$
- ▶ $x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -5; x_1 \cdot x_2 = 4;$ корни: $x_1 = -1; x_2 = -4.$

Теорема Виета дает нам дополнительную информацию о корнях квадратного уравнения. На первый взгляд это может показаться сложным, но даже при минимальной тренировке вы научитесь «видеть» корни и буквально угадывать их за считанные секунды.

▶ Задача. Решите квадратное уравнение:

▶ $x^2 - 9x + 14 = 0$;

▶ $x^2 - 12x + 27 = 0$;

▶ $3x^2 + 33x + 30 = 0$;

▶ $-7x^2 + 77x - 210 = 0$.

- ▶ Попробуем выписать коэффициенты по теореме Виета и «угадать» корни:
- ▶ $x^2 - 9x + 14 = 0$ — это приведенное квадратное уравнение.
- ▶ По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = -(-9) = 9$; $x_1 \cdot x_2 = 14$. Несложно заметить, что корни — числа 2 и 7;
- ▶ $x^2 - 12x + 27 = 0$ — тоже приведенное.
- ▶ По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -(-12) = 12$; $x_1 \cdot x_2 = 27$. Отсюда корни: 3 и 9;
- ▶ $3x^2 + 33x + 30 = 0$ — это уравнение не является приведенным. Но мы это сейчас исправим, разделив обе стороны уравнения на коэффициент $a = 3$. Получим: $x^2 + 11x + 10 = 0$.
- ▶ Решаем по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -11$; $x_1 \cdot x_2 = 10 \Rightarrow$ корни: -10 и -1;
- ▶ $-7x^2 + 77x - 210 = 0$ — снова коэффициент при x^2 не равен 1, т.е. уравнение не приведенное. Делим все на число $a = -7$. Получим: $x^2 - 11x + 30 = 0$.
- ▶ По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -(-11) = 11$; $x_1 \cdot x_2 = 30$; из этих уравнений легко угадать корни: 5 и 6.

- ▶ Разумеется, во всех размышлениях мы исходили из двух важных предположений, которые, вообще говоря, не всегда выполняются в реальных задачах:
- ▶ Квадратное уравнение является приведенным, т.е. коэффициент при x^2 равен 1;
- ▶ Уравнение имеет два различных корня. С точки зрения алгебры, в этом случае дискриминант $D > 0$ — по сути, мы изначально предполагаем, что это неравенство верно.

- ▶ Таким образом, общая схема решения квадратных уравнений по теореме Виета выглядит следующим образом:
- ▶ Свести квадратное уравнение к приведенному, если это еще не сделано в условии задачи;
- ▶ Если коэффициенты в приведенном квадратном уравнении получились дробными, решаем через дискриминант. Можно даже вернуться к исходному уравнению, чтобы работать с более «удобными» числами;
- ▶ В случае с целочисленными коэффициентами решаем уравнение по теореме Виета;
- ▶ Если в течение нескольких секунд не получилось угадать корни, забиваем на теорему Виета и решаем через дискриминант.

- ▶ Задача. Решите уравнение: $5x^2 - 35x + 50 = 0$.
- ▶ Итак, перед нами уравнение, которое не является приведенным, т.к. коэффициент $a = 5$.
- ▶ Разделим все на 5, получим: $x^2 - 7x + 10 = 0$.
- ▶ Все коэффициенты квадратного уравнения целочисленные — попробуем решить по теореме Виета.
- ▶ Имеем: $x_1 + x_2 = -(-7) = 7$; $x_1 \cdot x_2 = 10$.
- ▶ В данном случае корни угадываются легко — это 2 и 5.
- ▶ Считать через дискриминант не надо.

- ▶ Задача. Решите уравнение: $-5x^2 + 8x - 2,4 = 0$.
- ▶ Смотрим: $-5x^2 + 8x - 2,4 = 0$ — это уравнение не является приведенным, разделим обе стороны на коэффициент $a = -5$.
- ▶ Получим: $x^2 - 1,6x + 0,48 = 0$ — уравнение с дробными коэффициентами.
- ▶ Лучше вернуться к исходному уравнению и считать через дискриминант:
 $-5x^2 + 8x - 2,4 = 0 \Rightarrow D = 8^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2,4) = 16 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = 1,2; x_2 = 0,4$.