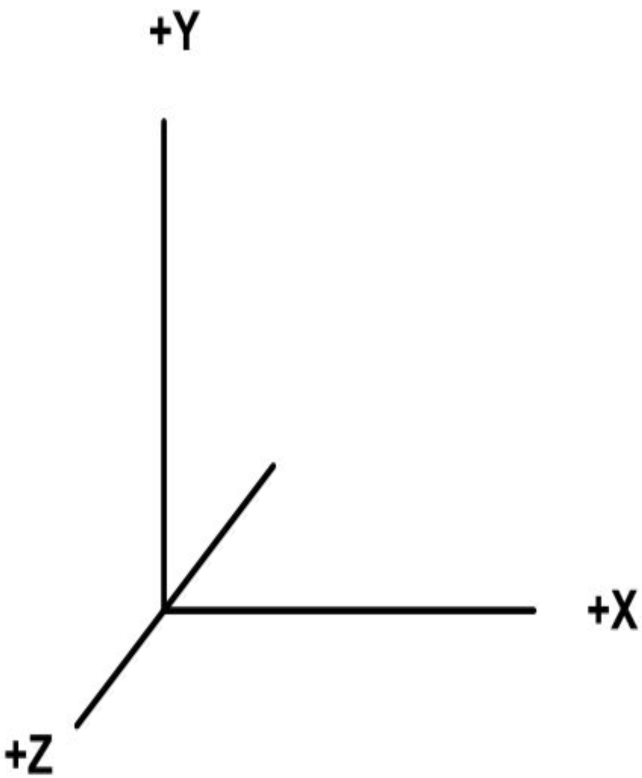
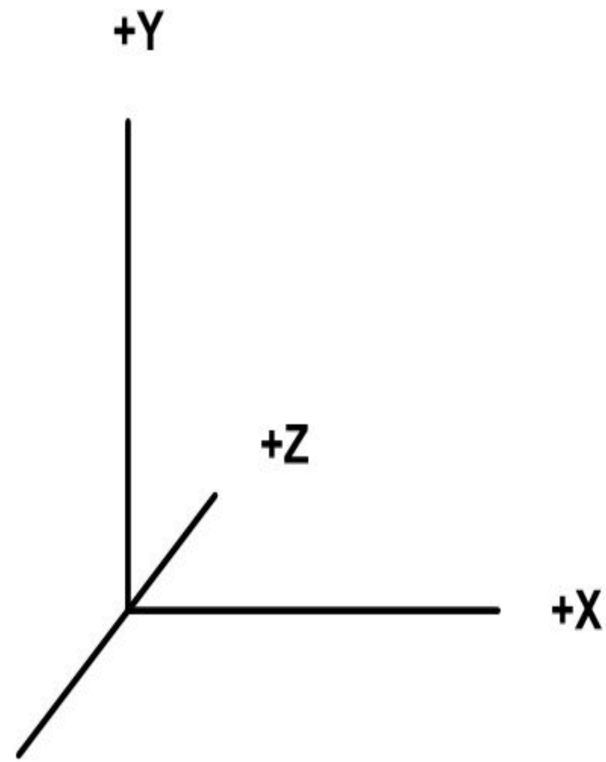
# 4. Преобразования проецирования

# Системы координат

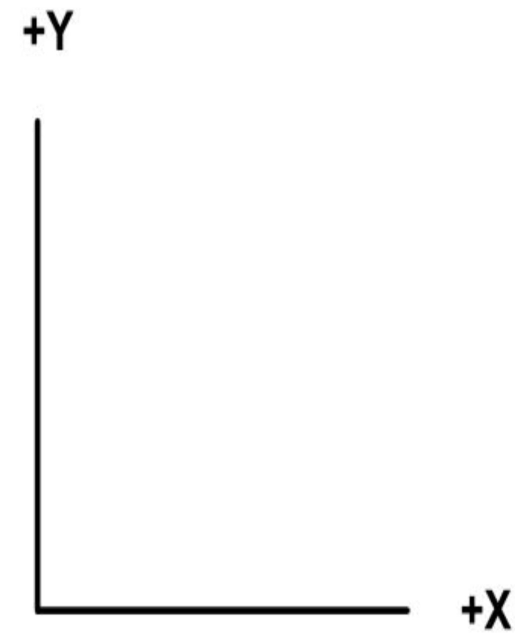
Правосторонняя



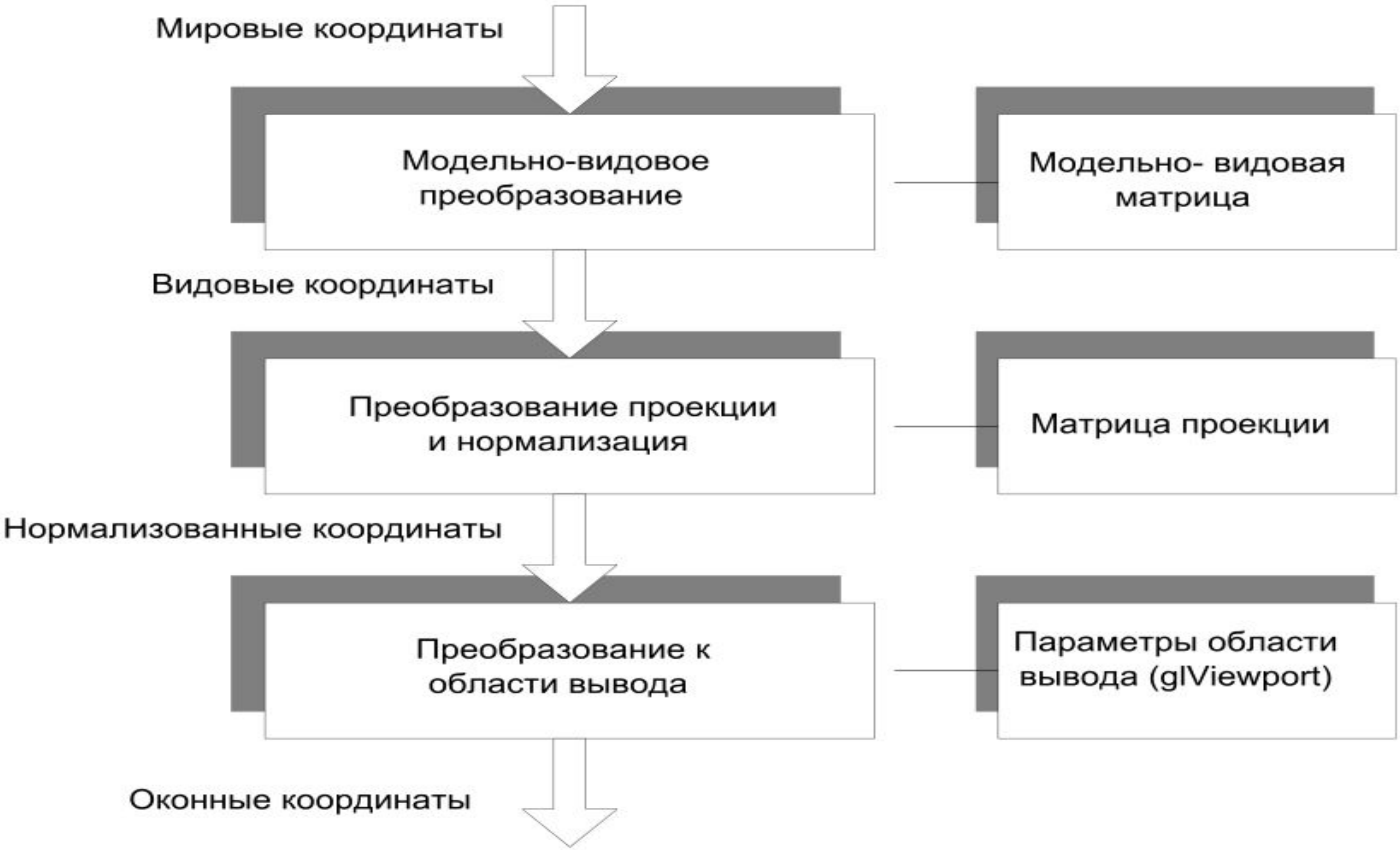

Левосторонняя




Оконная



# Преобразования координат



# Формирование изображения камерой

1. Установить штатив и направить камеру на сцену (видовое преобразование).
2. Подготовить сцену в нужной композиции (модельное преобразование).
3. Подобрать объектив или отрегулировать масштабирование (преобразование проекции).
4. Определить размер изображения (преобразование в порт просмотра).

# Системы координат OpenGL

1. Правосторонняя: модельно-видовые преобразования.
2. Левосторонняя: установка параметров проецирования.
3. Оконная: преобразование в порт просмотра.

# Проекции


Плоские геометрические проекции
параллельная
перспективная
ортографическая
аксонометрическая
косоугольная
триметрическая
кавалье
кабине
диметрическая
изометрическая
одноточечная
двуточечная
трехточечная

# Плоские геометрические проекции объектов

Плоские геометрические проекции объектов образуются пересечением прямых, называемых проекторами, с плоскостью, называемой центром проекции.

Проекторы – это прямые, проходящие через произвольную точку, называемую центром проекции, и каждую точку объекта.

# Перспективные и параллельные проекции

Перспективная проекция: центр проекции расположен в конечной точке трехмерного пространства.

Параллельная проекция: центр проекции расположен в бесконечности (проекторы параллельны).

# Ортографические проекции

Ортографические проекции – это проекции на одну из координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$.

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Аксонометрические проекции

Аксонометрические проекции – это проекции на плоскость, не являющуюся одной из координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$.

Триметрическая проекция строится произвольными поворотами вокруг произвольных координатных осей в произвольном порядке с последующим проецированием на плоскость $z = 0$.

Диметрическая проекция – это триметрическая проекция с двумя одинаковыми коэффициентами искажения и произвольным третьим коэффициентом.

Изометрическая проекция – это триметрическая проекция, в которой все три коэффициента искажения равны

# Триметрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

# Диметрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

$$f_x^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi = f_y^2 = \cos^2\theta$$

$$f_z^2 = \sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi$$

$$\theta = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2}), \varphi = \arcsin(\pm f_z / \sqrt{2 - f_z^2})$$

# Изометрическая проекция

$$T = P_z R_x(\theta) R_y(\varphi)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x^* & x_y^* & x_z^* & 0 \\ y_x^* & y_y^* & y_z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_x = \sqrt{x_x^{*2} + y_x^{*2}}, f_y = \sqrt{x_y^{*2} + y_y^{*2}}, f_z = \sqrt{x_z^{*2} + y_z^{*2}}$$

$$f_x^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi = f_y^2 = \cos^2\theta = f_z^2 = \sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi$$

$$\theta = \arcsin(\pm\sqrt{1/3}) = \pm 35.26^{\circ}, \varphi = \arcsin(\pm 1/2) = \pm 45^{\circ}$$

# Косоугольные проекции

Косоугольная проекция – это проекция, которая формируется параллельными проекторами, расположенными под косым углом к плоскости проекции.

Проекция кавалье получается когда угол между проекторами и плоскостью проекции составляет 45°.

Проекция кабине получается когда угол между проекторами и плоскостью проекции составляет arctg(1/2).

# Проекции кавалье и кабине

$$T_{кавалье} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.433 & 0 \\ 0 & 1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{кабине} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.866 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

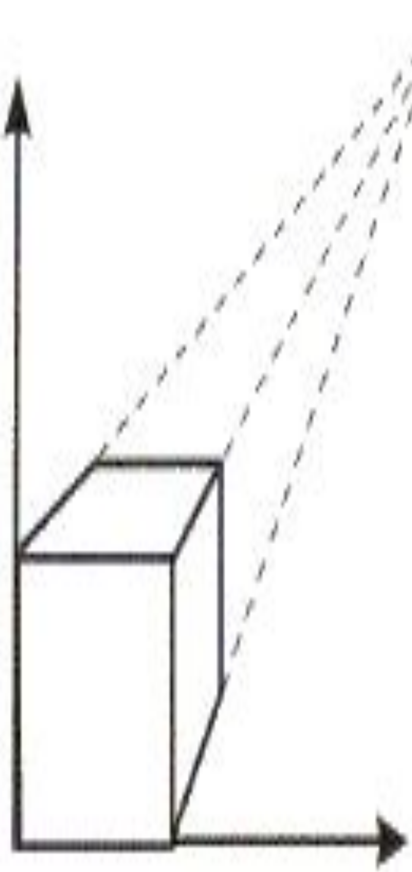
# Перспективные проекции

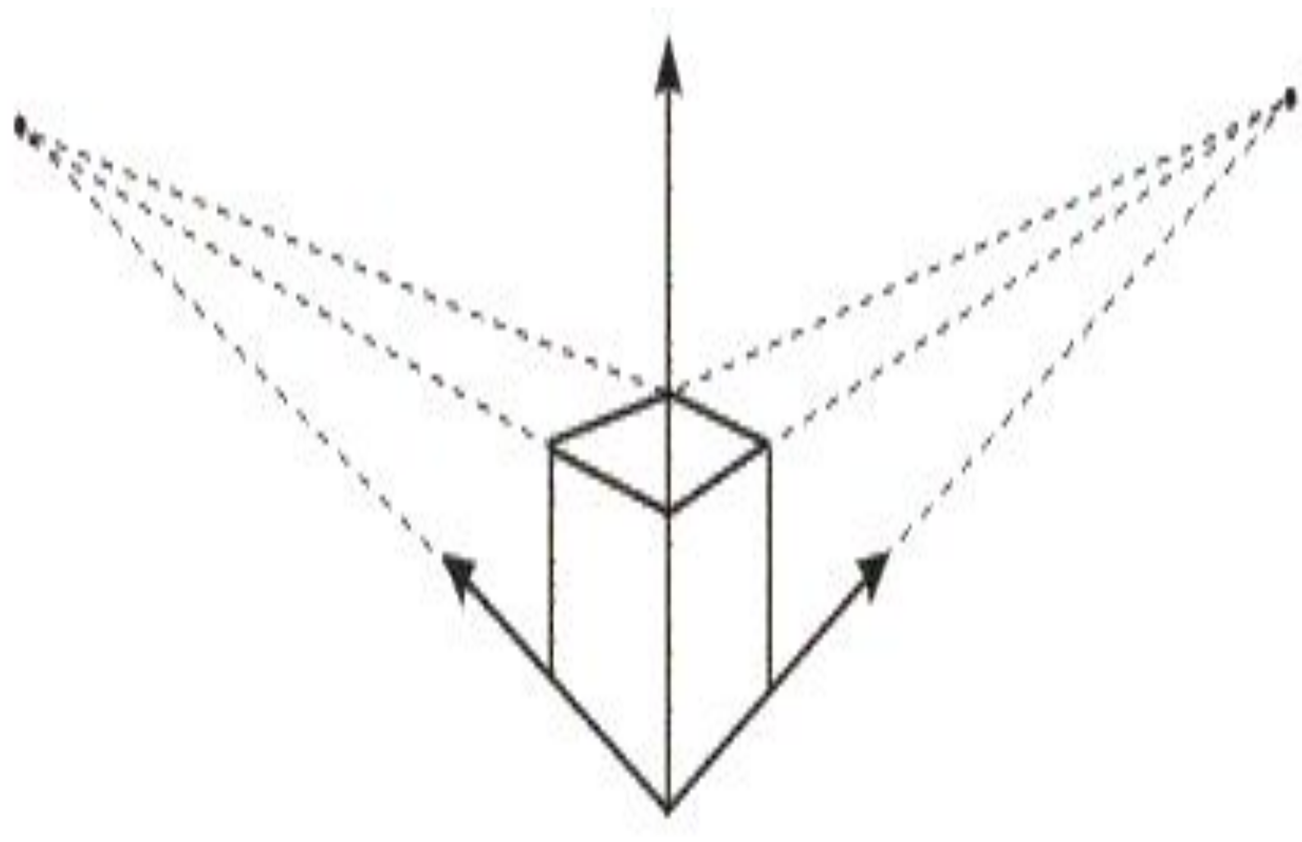
Перспективная проекция получается в результате перспективного преобразования.

При перспективном преобразовании параллельные прямые сходятся, размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра проекции и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

Перспективная проекция любой совокупности параллельных прямых, которые не параллельны проекционной плоскости, будет сходиться в точке схода. Если совокупность прямых параллельна одной из главных координатных осей, то их точка схода называется главной точкой схода. Перспективные проекции классифицируются в зависимости от числа главных точек схода, которыми они обладают, т.е. от числа координатных осей, которые пересекают проекционную плоскость.

# Примеры перспективных проекций

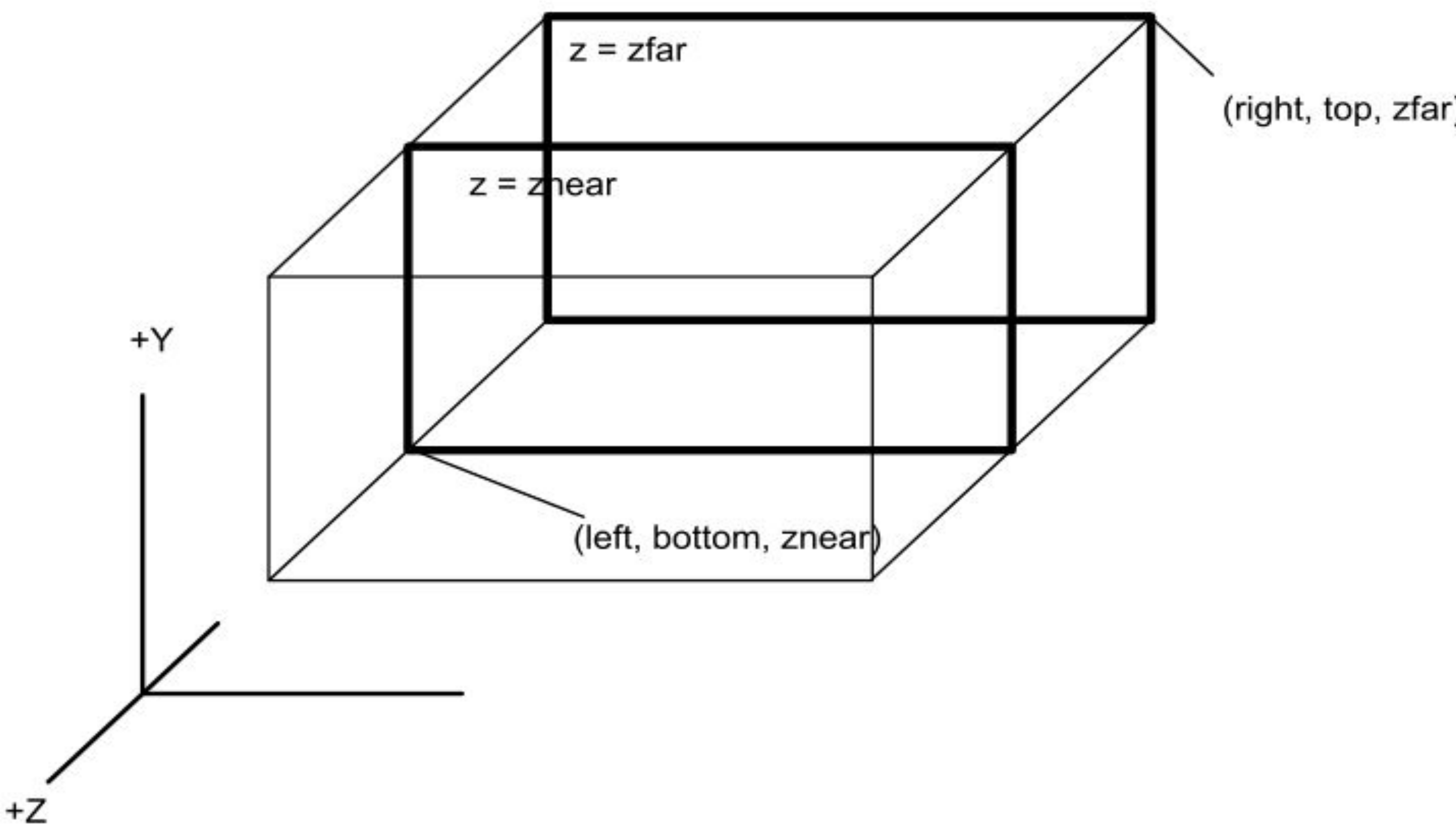




# Общая форма однородных координат

$$A = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$$

# Ортографическое проецирование в OpenGL



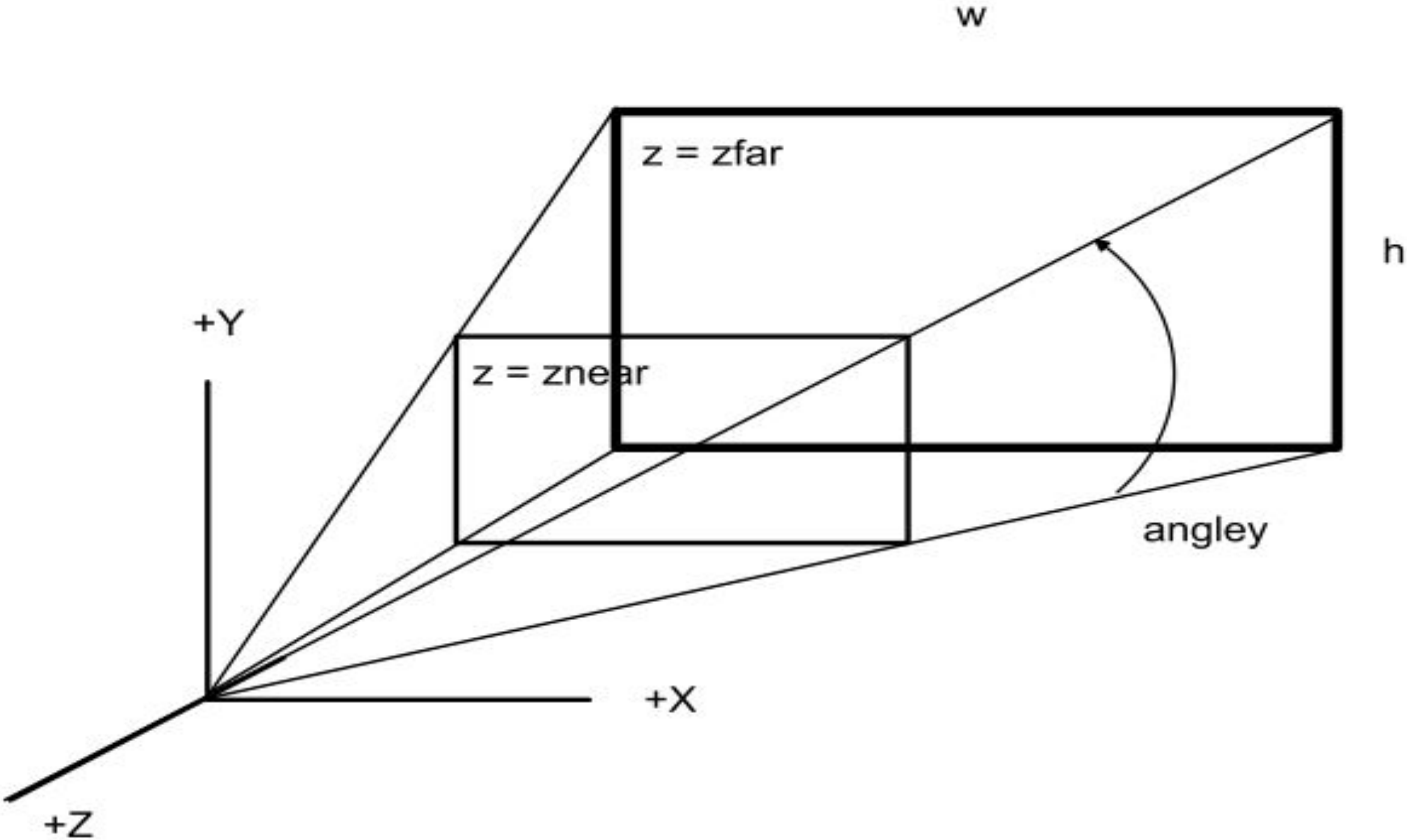
# Функции ортографического преобразования

void glOrtho(GLdouble *l*, GLdouble *r*, GLdouble *b*, GLdouble *t*, GLdouble *n*, GLdouble *f*);

void gluOrtho2D(GLdouble *l*, GLdouble *r*, GLdouble *b*, GLdouble *t*);

// glOrtho(*l*, *r*, *b*, *t*, –1.0, 1.0);

# Перспективное проецирование в OpenGL



# Матрица перспективного проецирования

$$\mathrm{F}_{e1} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & f \cdot n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & f \cdot n \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} nx_e \\ ny_e \\ fz_e + fn \\ -z_e \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{nx_e}{-z_e} \\ \dfrac{ny_e}{-z_e} \\ \dfrac{fz_e + fn}{-z_e} \\ 1 \end{vmatrix}$$

# Функции перспективного преобразования

void glFrustum(GLdouble *l*, GLdouble *r*, GLdouble *b*, GLdouble *t*, GLdouble *n*, GLdouble *f*);

void gluPerspective(GLdouble *angle*, GLdouble *aspect*, GLdouble *n*, GLdouble *f*);

$t = n * \mathrm{tg}(\pi / 180 * angle / 2);$

$b = -t;$

$r = t * aspect;$

$l = -r;$

# Пример программы

```
…
void setShape(float vAng, float asp, float nearD, float
   farD)
{
   glMatrixMode(GL_PROJECTION);
   glLoadIdentity();
   gluPerspective(vAng, asp, nearD, farD);
}
…
setShape(30.0f, 64.0f/48.0f, 0.5f, 50.0f);
…
```

# Пример программы