Основы теории массового обслуживания

Лекция для магистрантов направления
«Сервис»

План лекции

Учебные вопросы
1. Предмет и основные понятия теории массового обслуживания *1.1. Состав систем массового обслуживания и характеристика её элементов* *1.2. Типы задач, решаемых на базе теории массового обслуживания*
2. Классификация систем массового обслуживания
3. Условия работы и характеристики систем массового обслуживания *3.1. СМО с отказами* *3.2. СМО с ограниченным временем ожидания* *3.3. СМО с ожиданием*

- ***Система массового обслуживания*** (СМО), как правило, состоит из следующих элементов:
- Входящий поток заявок
- Очередь заявок, ожидающих обслуживания
- Каналы обслуживания
- Выходящий поток обслуженных заявок
- Выходящий поток необслуженных заявок

Система массового обслуживания

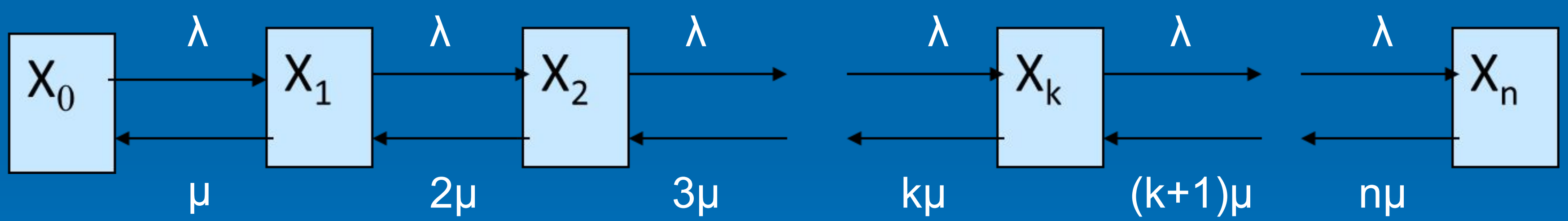
Классификация систем массового обслуживания

№ п/п	*Признак классификации*	*Тип СМО*
1	Поведение заявки, заставшей в момент прихода в систему все каналы занятыми	С отказами
		С ограниченным временем ожидания
		С ожиданием
2	Дисциплина очереди	С приоритетом
		Без приоритета
3	Режим обслуживания	С концентрацией сил
		Без концентрации сил
4	Источник заявок	Замкнутая
		Разомкнутая
5	Число каналов обслуживания	Одноканальная
		Многоканальная
6	Состав каналов обслуживания	Однородная
		Неоднородная
7	Число фаз обслуживания	Однофазная
		Многофазная
8	Возможность восстановления каналов	С восстановлением каналов
		Без восстановления каналов

СМО с отказами

На вход системы, состоящей из n каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании и покидает систему.

Размеченный граф состояния СМО с отказами



СМО с отказами

Вероятность того, что система находится в состоянии $X_к$, то есть, что в системе находится k заявок и, соответственно, k каналов заняты, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{m=0}^{n} \dfrac{\alpha^m}{m!}}, k = 0 \div n$$

Параметр α называется ***приведенной плотностью входящего потока заявок*** и представляет собой среднее число заявок, поступивших в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

СМО с отказами

Если все каналы обслуживания заняты, т.е. k = n, то очередная заявка получит отказ, ***вероятность отказа*** вычисляется по формуле:

$$P_{отк} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!}} = \varphi(n, \alpha)$$

Вероятность обслуживания как вероятность противоположного события рассчитывается по формуле: $P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - \varphi(n, \alpha) = q$.

СМО с ограниченным временем ожидания

На вход системы, состоящей из n каналов обслуживания, поступает простейший поток заявок с плотностью λ. На обслуживание каждой заявки назначается один канал из числа свободных. Время обслуживания заявки случайно и подчиняется показательному закону распределения с параметром μ. Заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания в течение случайного времени, распределенного по показательному закону с параметром ν. Если за время ожидания обслуживание не началось (ни один канал не освободился), то заявка покидает систему необслуженной; но если обслуживание началось, то оно доводится до конца независимо от времени пребывания заявки в очереди.

СМО с ограниченным временем ожидания

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^{n+s}}{n!\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{\alpha^{m}}{m!} + \dfrac{\alpha^{n}}{n!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^{s}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}, k = 0 \div n, s \geq 1$$

Параметр β называется ***приведенной плотностью уходов заявок из очереди необслуженными*** и представляет собой среднее число заявок, уходящих из очереди необслуженными за среднее время обслуживания одной заявки, при условии, что в очереди в среднем одна заявка.

СМО с ожиданием

Особенностью функционирования систем данного типа по сравнению со СМО с ограниченным временем ожидания является то, что заявка, заставшая в момент поступления все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока не освободится какой-либо канал. То есть, в СМО с ожиданием обслуживаются все заявки, и поток заявок, уходящих из очереди необслуженными отсутствует ($\nu = 0$).

СМО с ожиданием

Вероятность того, что система находится в состоянии X_{n+s}, то есть, что в системе находится n+s заявок и, соответственно, n каналов заняты и, кроме того, s заявок стоят в очереди, вычисляется по формуле Эрланга:

$$P_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{m=0}^{n}\frac{\alpha^m}{m!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\alpha}{n-\alpha}}, k = 0 \div n, s \geq 1$$

Условием существования в системе установившегося режима является $\alpha < n$, то есть, среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки не должно превышать количества каналов в системе.

Показатели эффективности систем массового обслуживания

Показатель	СМО с отказами	СМО с огр вр ож	СМО с ожид
Вероятность обслуживания заявки = Относительная пропускная способность	$P_{обсл} = 1 – \varphi(n, \alpha)$	$P_{обсл} = 1 – \psi(n, \alpha, \beta)$	
Вероятность немедленного обслуживания			
Абсолютная пропускная способность	$Q = \lambda\ P_{обсл}$	$Q = \lambda\ P_{обсл}$	$Q = \lambda$
Среднее число занятых каналов	$M_з = \alpha\ P_{обсл}$	$M_з = \alpha\ P_{обсл}$	$M_з = \alpha$
Коэффициент загрузки системы	$K_з = \alpha\ P_{обсл} / n$	$K_з = \alpha\ P_{обсл} / n$	$K_з = \alpha / n$
Коэффициент простоя системы	$K_п = 1 - \alpha\ P_{обсл} / n$	$K_п = 1 - \alpha\ P_{обсл} / n$	$K_п = 1 - \alpha / n$
Средняя длина очереди		$m_s = \alpha(1 - P_{обсл}) / \beta$	$m_s = (1- P_{но})/(n/\alpha-1)$
Среднее число заявок в системе			$R = m_s + M_з$
Среднее время пребывания заявки в очереди		$t_{оч} = t_{ож}\ (1 - P_{обсл})$	$t_{оч} = t_{обс}(1 - P_{но})/(n-\alpha)$
Среднее время пребывания заявки в системе			$t_{преб} = t_{оч} + t_{обс}$