

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Динамическое программирование

Григорьева А.В.

Задача «Таблица»

Рассмотрим прямоугольную таблицу размером $n \times m$. Занумеруем строки таблицы числами от 1 до n , а столбцы — числами от 1 до m . Будем такую таблицу последовательно заполнять числами следующим образом.

Обозначим через a_{ij} число, стоящее на пересечении i -ой строки и j -ого столбца. Первая строка таблицы заполняется заданными числами — $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}$. Затем заполняются строки с номерами от 2 до n . Число a_{ij} вычисляется как сумма всех чисел таблицы, находящихся в «треугольнике» над элементом a_{ij} . Все вычисления при этом выполняются по модулю r .

				$a_{i,j}$		

Например, если таблица состоит из трёх строк и четырёх столбцов, и первая строка состоит из чисел 2, 3, 4, 5, а $r = 40$ то для этих исходных данных таблица будет выглядеть следующим образом (взятие по модулю показано только там, где оно приводит к изменению числа):

2	3	4	5
$5 = 2 + 3$	$9 = 2 + 3 + 4$	$12 = 3 + 4 + 5$	$9 = 4 + 5$
$23 = 2 + 3 + 4 + 5 + 9$	$0 = (2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 9 + 12) \bmod 40 = 40 \bmod 40$	$4 = (2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 12 + 9) \bmod 40 = 44 \bmod 40$	$33 = 3 + 4 + 5 + 12 + 9$

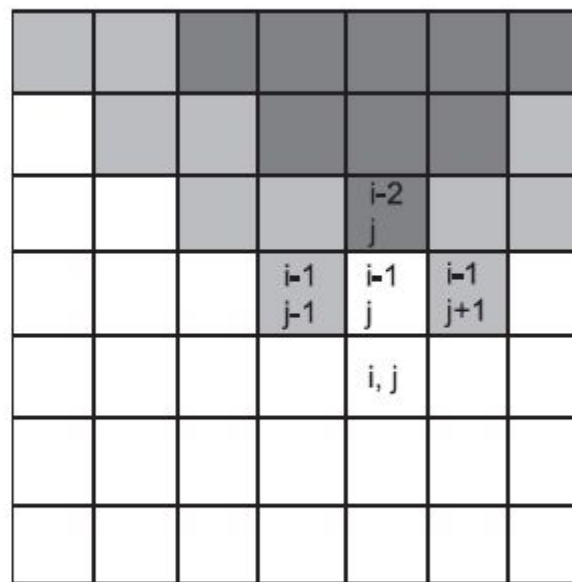
Требуется написать программу, которая по заданной первой строке таблицы ($a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}$), вычисляет последнюю строку, как описано выше.

Первый способ

База динамики (первая строка) нам явно задана. Рассмотрим два варианта вычисления значения в ячейке с использованием уже вычисленных данных.

В первом варианте нам достаточно завести массив B в котором мы будем накапливать ответы для ячеек. Очевидно, первая строка массива B совпадает с первой строкой массива A . Рассмотрим, как можно вычислить значение ячейки $B[i, j]$. Треугольник с вершиной в точке (i, j) состоит из треугольников с вершинами в точках $(i - 1, j - 1)$, $(i - 1, j + 1)$ а также из точек $(i - 1, j)$ и (i, j) . В то же время, треугольник с вершиной в точке $(i - 2, j)$ перекрывается дважды, что приводит к двукратному суммированию значений в этом треугольнике. Избежать этого очень просто — достаточно один раз вычесть уже подсчитанную для этого треугольника сумму. Таким образом, в итоге получим следующую формулу

$B[i][j] = B[i - 1][j - 1] + B[i - 1][j + 1] - B[i - 2][j] + A[i - 1][j] + A[i][j]$. Пользуясь этой формулой легко подсчитать массив, содержащий ответ.



Второй способ

С диагоналями. Нужен, чтобы хранить не 3 строки одной таблицы (B), а по две строки трех таблиц (L , R , B)

можно создать два дополнительных массива L и R , таких, что ячейка $L[i][j]$ будет содержать сумму всех элементов на диагонали, проведённой от точки (i, j) вверх и влево (для массива R диагональ проводится вверх и вправо). Первая строка массивов L и R будет совпадать с первой строкой массива A .

L

2	3	4	5

R

2	3	4	5

B

2	3	4	5

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Первую строку заполняем первой строкой из A
Заполняем вторую строку B по-честному

L

2	3	4	5

R

2	3	4	5

B

2	3	4	5
2+3	2+3+4	3+4+5	4+5

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Первую строку заполняем первой строкой из A
Заполняем вторую строку B по-честному

L

2	3	4	5
5	11	15	13

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Заполняем вторую строку L и R по формулам

Теперь можно и третью строку B заполнить

L

2	3	4	5
5	11	15	13

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
$2 * 5 + 13$			

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Теперь можно и третью строку B заполнить

L

2	3	4	5
5	11	15	13

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	$2 * 9 + 5 + 17$		

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Теперь можно и третью строку B заполнить

L

2	3	4	5
5	11	15	13

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	$12 * 2 + 11 + 9$	

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Теперь можно и третью строку B заполнить

L

2	3	4	5
5	11	15	13

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	$2 * 9 + 15 + 0$

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Теперь можно и третью строку B заполнить

L

2	3	4	5
5	11	15	13
23+0			

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Далее заполняем по формулам третьи строки L и R

L

2	3	4	5
5	11	15	13
23	40+5		

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Далее заполняем по формулам третьи строки L и R и т.д.

L

2	3	4	5
5	11	15	13
23	45	¹¹⁺⁴⁴	

R

2	3	4	5
8	13	17	9

$$B[i, j] = 2 * B[i-1, j] + L[i-1, j-1] + R[i+1, j+1]$$

$$L[i, j] = L[i-1, j-1] + B[i, j]$$

$$R[i, j] = R[i-1, j+1] + B[i, j]$$

B

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33

Что должно
получиться

2	3	4	5
5	9	12	9
23	40	44	33
...

Далее заполняем по формулам третьи строки L и R и т.д.