

Линейное программирование

Оглавление

- Задача линейного программирования – 3 слайд.
 - Геометрический метод решения ЗЛП – 26 слайд.
 - Задача линейного программирования в стандартной форме – 32 слайд.
 - Симплексный метод решения ЗЛП – 42 слайд.
 - Метод Гаусса – 48 слайд.
 - Симплекс метод – 58 слайд.
 - Метод искусственного базиса – 76 слайд.
 - Двойственность задач линейного программирования – 87 слайд.
-

Задача линейного программирования (ЛП)

- Задачей ЛП называется оптимизационная задача, в которой целевая функция – линейна на множестве линейных ограничений.

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}, x_j \geq 0$$

- Ограничения, накладываемые на координаты x_j , могут быть равенствами и неравенствами (I и II рода).

Задачи ЛП – самая обширная часть ОПТИМИЗАЦИОННЫХ (примерно 70%)

Этапы построения математической модели

1. Определение переменных задачи.
 2. Представление ограничений в виде линейных уравнений или неравенств.
 3. Задание линейной целевой функции и смысла оптимизации.
-

Классические задачи линейного программирования

- Задача технического контроля (слайд 6);
 - Транспортная задача (слайд 13);
 - Задача о диете (слайд 16);
 - Задача об использовании сырья (слайд 19).
-

Задача технического контроля

Примечание: ОТК – Отдел Технического Контроля

- В ОТК некоторой фирмы работают контролеры 1 и 2 разрядов (К1 и К2);
- Норма выработки ОТК за 8 часов (раб. день) составляет не менее 1800 изделий;
- К1 проверяет 25 изделий/час (точность 98%);
- К2 проверяет 15 изделий/час (точность 95%);
- Заработная плата К1 равна 4\$ / час;
- Заработная плата К2 равна 3\$ / час;
- При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в 2\$;
- Фирма может использовать не более 8 - К1 и 10 - К2;

**Определить оптимальный состав ОТК,
при котором общие затраты на контроль будут минимальны.**

Разряд

1

2

Выработка

25 изд/час.

15 изд/час

Точность

98 %

95 %

Зарплата

4\$/час

3\$/час

Макс.
количество

8

10

Построение модели

1. Определим переменные задачи

- x_1 – число контролеров 1 разряда;
- x_2 – число контролеров 2 разряда.

2. Представим ограничение в виде неравенств

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

Построение модели

В день необходимо изготовить 1800 изделий (за 8 часов работы).

$$\begin{aligned}8 \cdot (25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2) &\geq 1800 \\ 200 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 &\geq 1800\end{aligned}$$

Или

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45$$

Расходы фирмы имеют две составляющие

- заработная плата контроллеров;
- убытки из-за ошибок контроллеров.

Таким образом, один контроллер соответствующего разряда обходится фирме:

- I разряд $4 + 2 \cdot 0.02 \cdot 25 = 5$ \$/час
- II разряд $3 + 2 \cdot 0.05 \cdot 15 = 4.5$ \$/час

Целевая функция затрат на ОТК за 8 часов:

$$f(\bar{x}) = 8 \cdot (5 \cdot x_1 + 4.5 \cdot x_2) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

3. Задание целевой функции

$$f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Вся задача технического контроля может быть сформулирована следующим образом.

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ \text{при } 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ \quad x_1 \leq 8, \quad x_2 \leq 10 \\ \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Транспортная задача

Или задача о рациональном перевозе однородных продуктов из пунктов производства в пункты потребления.

- В каждом пункте A_i производится a_i количество продукта, $i = \overline{1, m}$.
- Пункт B_j потребляет b_j количества продукта, $j = \overline{1, n}$.
- Предполагается, что спрос соответствует предложению:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

- Транспортные издержки перевозки продукта из пункта A_i в пункт B_j составляют c_{ij} .

Требуется минимизировать транспортные издержки и удовлетворить запросы всех потребителей за счет производства

Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество продукта перевозимого из пункта A_i в пункт B_j .

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

Задача о диете

Или задача о составлении рациона

Имеется n различных продуктов. Стоимость каждого продукта составляет c_j .

Ингредиенты продуктов следующие:

- Калорийность a_{1j} ($j = 1, n$);
- жиры a_{2j} ;
- белки a_{3j} ;
- углеводы a_{4j} .

Суточная потребность конкретного человека в калориях, жирах, белках и углеводах составляет b_1, b_2, b_3, b_4 единиц соответственно.

Требуется удовлетворить суточную потребность в энергии, не превышая потребления жиров, белков, углеводов при минимальных затратах.

Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество потребления j -го продукта.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot x_j &\geq b_1; \quad \sum_{j=1}^n a_{3j} \cdot x_j \geq b_3; \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot x_j &\geq b_2; \quad \sum_{j=1}^n a_{4j} \cdot x_j \geq b_4. \end{aligned} \right\}$$

Задача об использовании сырья

Изготавливаются два продукта Π_1 и Π_2 из трех видов сырья s_1, s_2, s_3 .

Запасы каждого сырья равны b_1, b_2, b_3 .

На единицу продукции Π_1 уходит a_{11} количества сырья s_1

$$a_{21} - s_2;$$

$$a_{31} - s_3.$$

На единицу продукции Π_2 уходит a_{12} количества сырья s_1

$$a_{22} - s_2;$$

$$a_{32} - s_3.$$

Требуется так запланировать выпуск продуктов Π_1 и Π_2 , чтобы доход от реализации продукции был максимален при имеющихся запасах сырья.

Исходные данные задачи

Представим исходные данные в виде таблицы

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		$П_1$	$П_2$
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}
s_3	b_3	a_{31}	a_{32}
Доход		c_1	c_2

Пусть имеет место задача об использовании сырья некоторого кондитерского предприятия, выпускающего

- Π_1 - карамель А;
- Π_2 - карамель Б.

При этом используется сырье

- s_1 – сахар;
 - s_2 – джем;
 - s_3 – шоколад.
-

Исходные данные для кондитерской

Тогда после перехода к условным единицам получим таблицу

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		карамель А	карамель Б
сахар	160	5	2
джем	180	3	4
шоколад	196	7	0
Доход		3	2

Математическая модель задачи

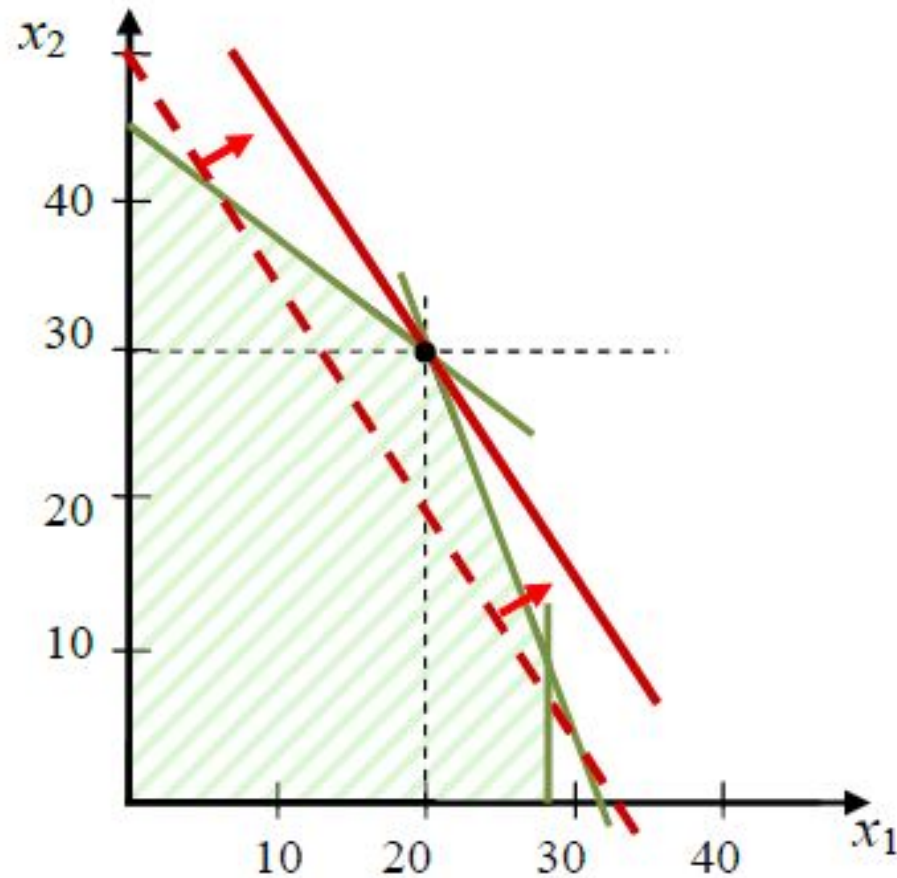
Введем переменные

- x_1 единиц продукции Π_1 выпускает предприятие;
- x_2 единиц продукции Π_2 выпускает предприятие;

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 180 \\ 7 \cdot x_1 &\leq 196 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

Графическое решение



— Ограничения
— Линия уровня

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 180 \\ 7 \cdot x_1 &\leq 196 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

1. Строим ограничения – неравенства.
2. Строим линию уровня $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = const$
3. Зададим $const = 100$.
4. Перенесем линию уровня параллельно в сторону увеличения ЦФ до пересечения с крайней вершиной многогранника ограничений

Геометрический метод решения ЗЛП

Решим геометрическим методом задачу технического контроля:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\geq 45 \\ x_1 &\leq 8, \quad x_2 \leq 10 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

Построив все ограничения-неравенства, получим множество допустимых решений – треугольник ABC.

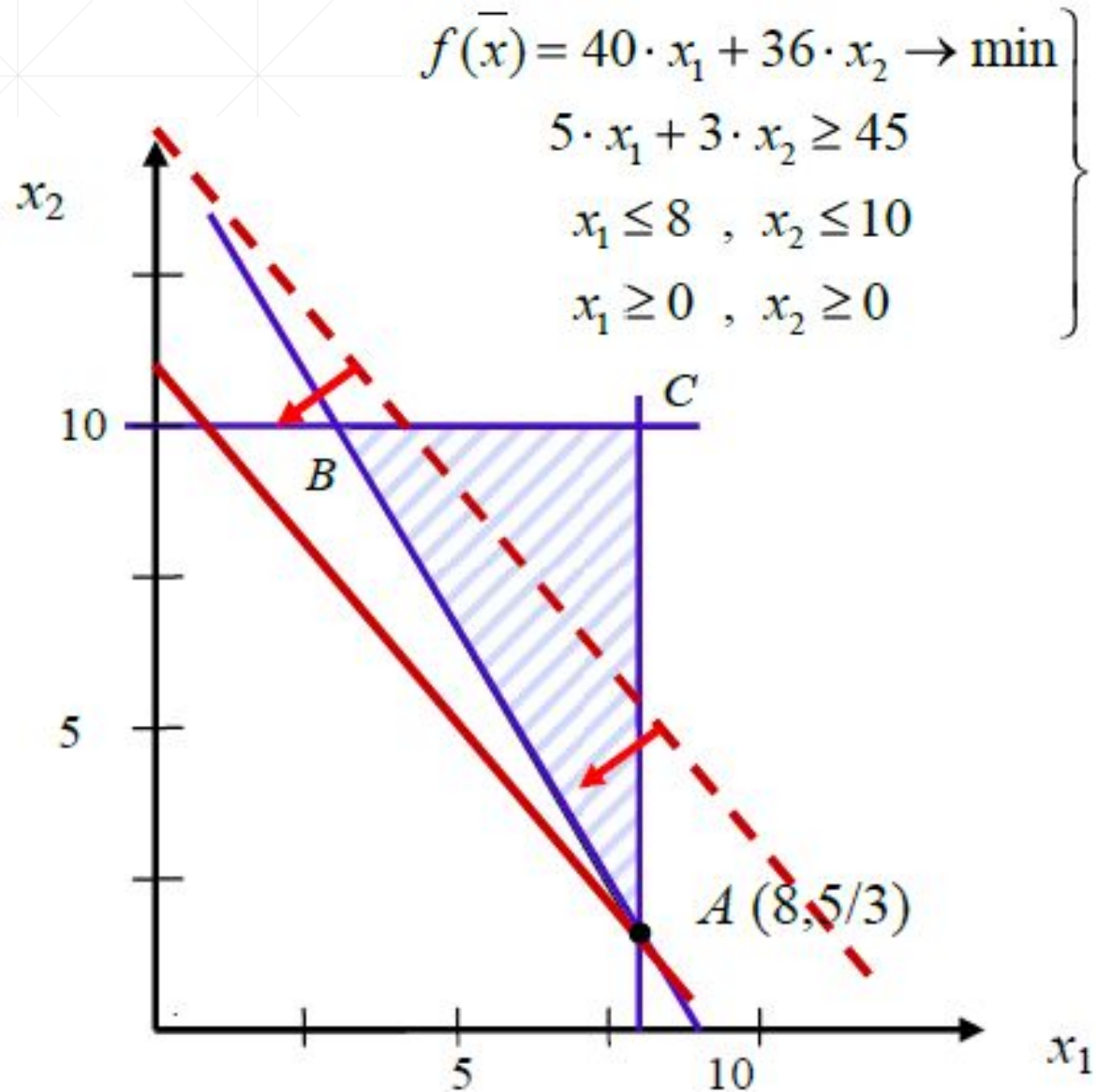
Для построения ЦФ необходимо построить линию уровня для любой константы, например для 600.

$$40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 = 600$$

Линия уровня попала в область допустимых решений.

Теперь если изменять константу, то линия уровня будут перемещаться параллельно.

Увеличиваем константу до тех пор, пока линия уровня не достигнет крайней вершины треугольника ABC - A.

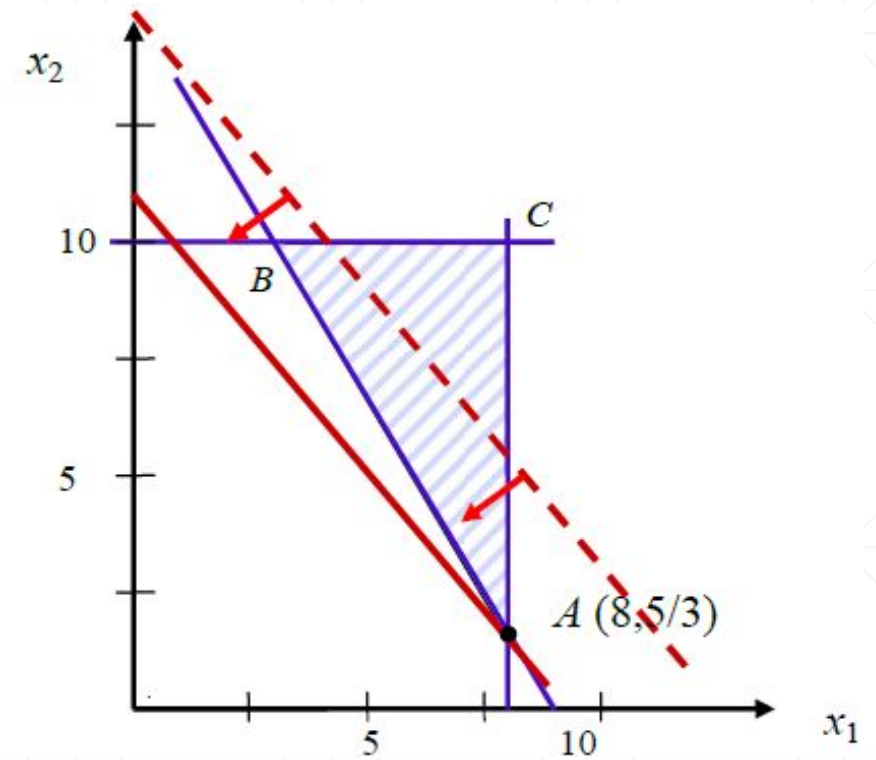


Вершина треугольника A имеет координаты $(8; \frac{5}{3})$.

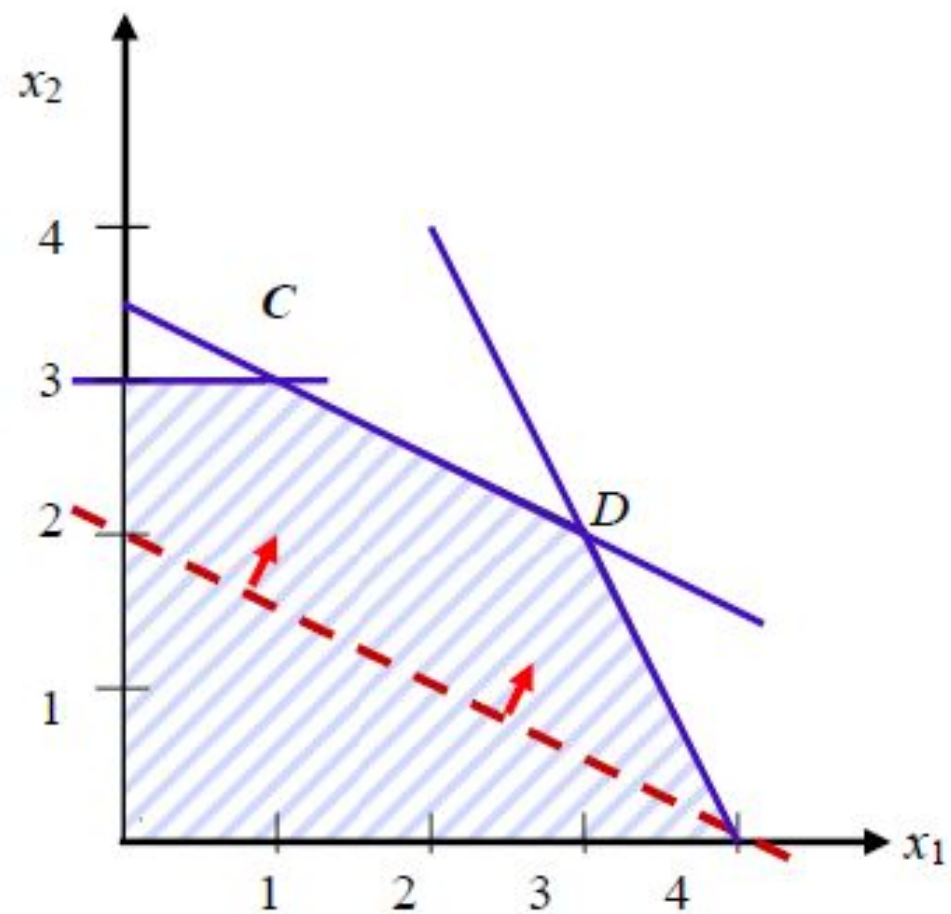
$$f(\bar{x}) = f\left(8; \frac{5}{3}\right) = 377.6$$

Таким образом, для оптимальной работы ОТК необходимо использовать 8 контроллеров 1 разряда и 1.6 контроллеров 2 разряда.

Значение 1.6 означает или неполный рабочий день, или округление до двух контроллеров.

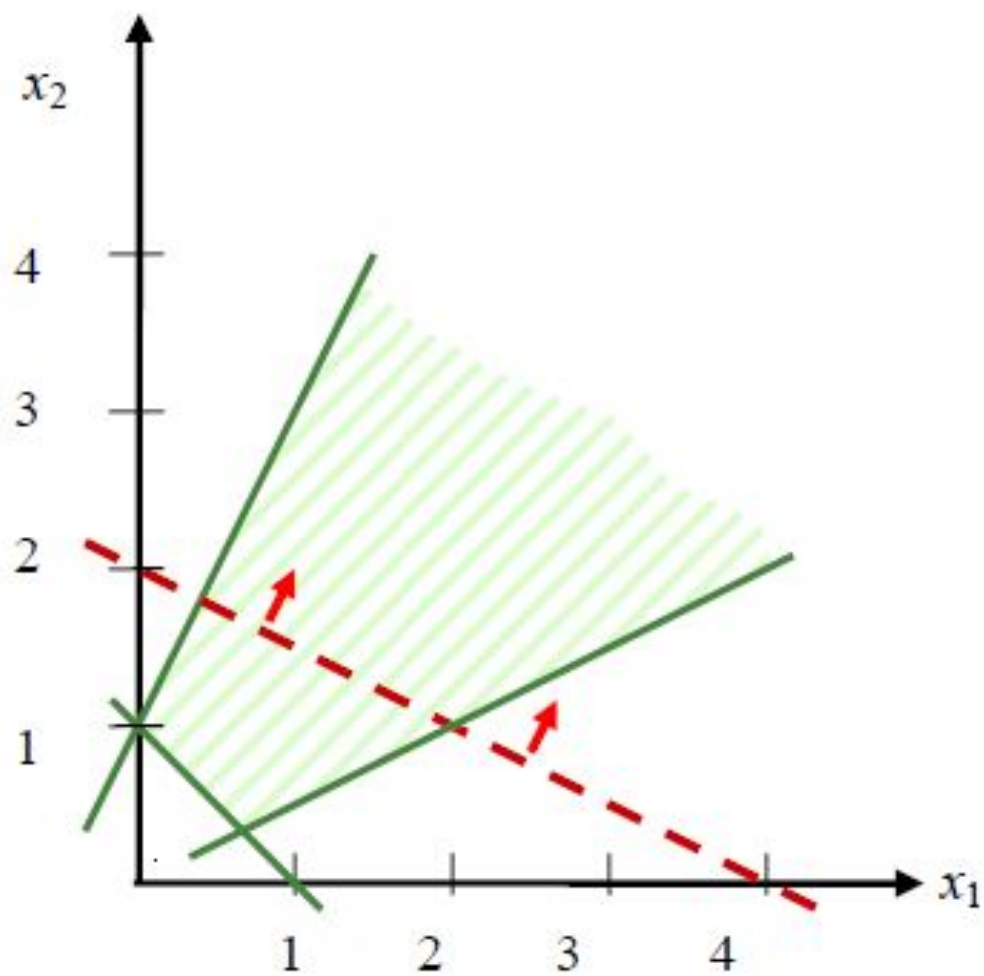


Частные случаи геометрических решений



Пример 1

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



Пример 2

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Задача линейного программирования в стандартной форме

ЗЛП в стандартной форме содержит следующие элементы:

- Ограничения только в виде равенств;
- Все переменные $x_j, j = \overline{1, n}$ ограничены;
- Ресурсы $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$
- ЦФ $\rightarrow \min$.

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Матрично–векторная запись

▪

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = c(\bar{c}, \bar{x}) &\rightarrow \min \\ A \cdot \bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} \geq 0, \quad \bar{b} &\geq 0 \end{aligned}$$

где A – матрица коэффициентов;

\bar{x} - вектор переменных;

\bar{b} - вектор ресурсов

\bar{c} - вектор оценок задачи линейного программирования.

Приведение ЗЛП к стандартному виду

▮ Преобразование неравенств

Ограничения – неравенства можно преобразовать в равенства при помощи введения остаточных и избыточных переменных x_{n+i} .

Остаточные переменные вводятся со знаком «плюс», избыточные со знаком «минус».

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Преобразования неравенств

- Пример 1

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 25$$

Добавим остаточную переменную $x_5 > 0$:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + x_5 = 25$$

- Пример 2

$$2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 \geq 12$$

Добавим избыточную переменную $x_4 > 0$:

$$2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 - x_4 = 12$$

Преобразования неравенств

Преобразуем неравенства из задачи об использовании сырья добавив во все три уравнения остаточную переменную.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180 \\ 7 \cdot x_1 \leq 196 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{array} \right\}$$

Приведение ЗЛП к стандартному виду

Н. Преобразование неограниченных по знаку переменных

Переменные задачи линейного программирования в стандартной форме предполагаются только неотрицательными. Неограниченные переменные необходимо заменить разностью двух положительных переменных.

$$x_j = x_{n+1} - x_{n+2}$$

Здесь $x_{n+1}, x_{n+2} > 0$. Переменные x_j может быть положительным и отрицательным в зависимости от соотношения x_{n+1}, x_{n+2} .

Приведение ЗЛП к стандартному виду

III. Устранение отрицательных ресурсов

Уравнения с отрицательными значениями ресурсов b_i необходимо умножить на (-1).

Пример приведения ЗЛП к стандартному виду

Дана следующая система:

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \quad 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \quad 2$$

$$3 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = -5 \quad 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Переменная x_3 - неограниченна

$$x_3 = x_4 - x_5$$

2. Умножим на (-1) уравнение (3).
 3. Введем дополнительные переменные: остаточную x_6 в уравнение (1) и избыточную переменную x_7 в уравнение (2).
-

Перепишем задачу ЛП с учетом новых переменных и замен:

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \quad 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \quad 2$$

$$3 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = -5 \quad 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7$$

$$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2$$

$$-3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 = 5$$

$$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Симплекс метод решения ЗЛП

Метод Гаусса – Жордана

Основная идея метода состоит в сведении m уравнения с n неизвестными к каноническому или ступенчатому виду, путем линейных преобразования над строками (сложение строк и умножение на скаляр).

Это позволяет привести СЛАУ к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \dots + \bar{a}_{1m+1} \cdot x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1n} \cdot x_n &= \bar{b}_1 \\ x_2 + \dots + \bar{a}_{2m+1} \cdot x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2n} \cdot x_n &= \bar{b}_2 \\ \dots &\dots \\ x_m + \dots + \bar{a}_{mm+1} \cdot x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{mn} \cdot x_n &= \bar{b}_m \end{aligned} \right\}$$

Базисные и свободные переменные

- Переменные x_1, x_2, \dots, x_m , которые входят в одно уравнение с коэффициентом 1, а в остальные с коэффициентом 0 называют **базисными** (зависимыми).
 - Переменные x_{m+1}, \dots, x_n называют **свободными** (независимыми).
 - В канонических системах в любом уравнении присутствует только одна базисная переменная.
-

Выразим из предыдущей системы базисные переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1} \cdot x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1n} \cdot x_n \\ x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1} \cdot x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{mn} \cdot x_n \end{aligned} \right\}$$

- Из этой системы можно получить решение для базисных переменных, присваивая независимым переменным произвольные значения
-

Базисное решение

Базисным решением системы канонического вида называют решение, полученное при нулевых значениях независимых переменных. То есть

$$x_1 = \bar{b}_1, \dots, x_m = \bar{b}_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

Опорный план

Если $\bar{b}_i > 0, i = \overline{1, m}$, то полученное базисное решение называется допустимым базисным решением или опорным планом

Базисными переменными могут быть любые m штук переменных системы.

Метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса)

Метод Гаусса состоит из двух этапов:

- I. Прямой ход
- II. Обратный ход

Цель прямого хода - приведение матрицы системы A к верхнетреугольному виду.

Прямой ход

На каждом шаге преобразования выбирается k -я главная или ведущая строка. Диагональные элементы главной строки a_{kk} называются главными элементами

На прямом ходе выполняются следующие действия:

1. Для всех строк, кроме главной, находим множитель l_i :

$$l_i = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

2. К каждой неглавной добавляем главную строку, умноженную на множитель l_i

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + l_{ik} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + l_{ik} \cdot b_k^{(k-1)}$$

Прямой ход

3. Главную строку делим на главный элемент a_{kk} ;
 4. Главную строку вычеркиваем, размерность системы становится меньше на единицу, то есть $(n-1)$.
 - На следующем шаге исключения главной строкой вновь становится верхняя строка, находящаяся под вычеркнутой на предыдущем шаге.
 - Все указанные выше преобразования повторяются столько раз, пока главная строка не становится единственной в системе.
-

Обратный ход

Вектор неизвестных СЛАУ \bar{x} находится в обратном порядке, начиная с последнего. Для этого составляется матрица из вычеркнутых строк, она имеет верхнетреугольный вид.

Из последнего уравнения находится неизвестный x_n , затем неизвестные находятся в порядке $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

Пример решения СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15 \end{cases}$$

	k	l_i	Коэффициенты при неизвестных			b	c
			x_1	x_2	x_3		
Прямой ход	0		3	-1	0	5	7
		2/3	-2	1	1	0	0
		-2/3	2	-1	4	15	20
	1		3	-1	0	5	7
			0	1/3	1	10/3	14/3
		1	0	-1/3	4	35/3	46/3
	2	0	3	-1	0	5	7
		0	0	1/3	1	10/3	14/3
		0	0	0	5	45/3	60/3
	Обратный ход						$\bar{x}_3 = 4$
			$x_1=1$	$x_2=1$	$x_3=3$	$\bar{x}_2 = 2$	
						$\bar{x}_1 = 3$	

Для уменьшения возможности ошибок счета вводятся контрольные суммы (столбец c), с которыми выполняются следующие преобразования.

- на прямом ходе те же преобразования, что со столбцом свободных членов b . Контроль правильности преобразования строки на очередном шаге проводится суммированием всех коэффициентов в строке и свободного члена. Эти значения должны быть равны.
 - на обратном ходе одновременно с вычислением корней x_i , вычисляются корни \bar{x}_i , которые получены если в выделенном в системе уравнении вместо свободного члена b_i использовать значение контрольной суммы c_i . Между корнями должно выполняться такое соответствие $\bar{x}_i = x_i + 1$.
-

Метод главных элементов

Применяется в случаях, когда главные диагональные элементы системы уравнений в результате преобразований получаются нулевые.

В этих условиях схема единственного деления становится неработоспособной, так как на главные элементы в ходе преобразований производится деление.

Основная идея метода главных элементов

1. На каждом шаге выбирают главный элемент матрицы A – максимальный по модулю коэффициент в матрице a_{pq} . Строка p – главная строка.

2. Для всех строк, кроме главной, вычисляются множители:

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

3. К каждой неглавной строке добавляют главную, умноженную на сомножитель m_i . В результате q -й столбец – нулевой.

4. Вычеркиваем p -ю строку и q -й столбец. В результате получаем матрицу A^1 , размерность которой на единицу меньше предыдущей матрицы A .

5. Процедуру повторяем с первого шага $(n-1)$ раз.

Основная идея метода главных элементов

В результате составляем новую систему уравнений из вычеркнутых строк. Полученная матрица не треугольного вида, как в схеме единственного деления Гаусса. Но каждое уравнение содержит разное количество неизвестных:

- в последнем уравнении – 1 неизвестное;
- в $(n-1)$ -м – 2 неизвестных и т.д.;
- в первом уравнении – все n неизвестных.

Такой вид преобразованной системы позволяет последовательно находить неизвестные, начиная с последнего уравнения.

Пример решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15 \end{cases}$$

	k	m_i	Коэффициенты при неиз- вестных			b	c
			x_1	x_2	x_3		
Прямой ход	0	0	3	-1	0	5	7
		-1/4	-2	1	1	0	0
		-1	2	-1	4	15	20
	1	-1	3	-1	-	5	7
		5/6	-5/2	5/4	-	-15/4	-5
			-	-	-	-	-
	2		-	5/12	-	5/12	5/6
			-	-	-	-	-
			-	-	-	-	-
Обратный ход				$x_2=1$		$\bar{x}_2=2$	
			$x_1=2$			$\bar{x}_1=3$	
				$x_3=3$		$\bar{x}_3=4$	

Симплекс метод

- Теорема 1

Множество опорных планов – выпукло

- Теорема 2

Если ЗЛП разрешима, то экстремум целевой функции достигается на одном из опорных планов (допустимом базисном решении).

То есть оптимальное решение соответствует крайней точке выпуклого множества.

Число опорных планов конечно и определяется числом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Алгоритм симплекс метода

- I. Выбор начального опорного плана.
 - II. Переход от начального опорного плана к другому опорному плану с лучшим значением целевой функции. (!Смежному).
Приведение системы, для смежного опорного плана к каноническому виду
 - III. Продолжение поиска опорного плана улучшающего целевую функцию до достижения оптимального плана..
-

Смежный опорный план

- Смежным опорным планом называют план, отличающийся от текущего лишь одной переменной.
 - Для получения смежного опорного плана одну базисную переменную превращают в свободную, а эту свободную вводят в базисные переменные.
 - Основной здесь вопрос – какую переменную выбрать, чтобы целевая функция уменьшалась?
-

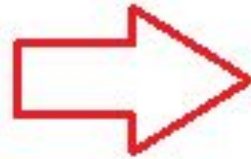
Составим симплекс – таблицу для задачи использования ресурсов.

Для этого

запишем - задачу в каноническом виде и

заменяем - цель поиска максимум на минимум.

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 180 \\ 7 \cdot x_1 &\leq 196 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} z(\bar{x}) &= -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 &= 196 \end{aligned} \right\}$$

Начальный опорный план

$$\begin{aligned}
 z(\bar{x}) &= -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\
 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\
 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\
 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196
 \end{aligned}$$

Базис	Свободные переменные					b_i	Q_{ik}
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	5	2	1	0	0	160	32
x_4	3	4	0	1	0	180	60
x_5	<u>7</u>	0	0	0	1	196	28
Δ_k	-3	-2	-	-	-		

$$\Delta_1 = -3 - x_4 \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 5 \\ & 0 & 3 \\ & x_5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = -3$$

$$\Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

I. Нахождение начального опорного плана

- Переменные x_3, x_4, x_5 – входят только в одно уравнения, значит они базисные.
 - Переменные x_1, x_2 - свободные.
 - Свободные переменные могут принимать любые значения, но для удобства их принимают равным 0.
 - $x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow x_3 = 160, x_4 = 180, x_5 = 196$
 - Таким образом опорный план $\bar{x}^1 = (0, 0, 160, 180, 196)$.
 - Целевая функция $z(\bar{x}^1) = 0$
-

II. Нахождение смежного опорного плана

- Необходимо одну переменную из свободных перевести в базис, так, чтобы целевая функция уменьшалась.
- Для удобства запишем ЗЛП в стандартной векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j &\geq 0 \quad j = \overline{1, n} \\ b_i &\geq 0 \quad i = \overline{1, m} \end{aligned}$$

Приращение целевой функции Δ_k :

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i$$

$$\left. \begin{aligned} z(\bar{x}) &= -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned} \right\}$$

Где $k \in$ свободным переменным (в нашем случае $k=1, k=2$).

$\sum_{i \in \text{баз}}$ – суммирование ведется только по базисным переменным.

Приращения вычисляются только для свободных переменных:

$$\Delta_1 = -3 - x_4 \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 5 \\ x_4 & 0 & 3 \\ x_5 & 0 & 7 \end{bmatrix} = -3 \quad \Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}$$

$$b_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Лемма 1

- Если все приращения симплекс-плана $\Delta_k > 0$, следовательно, текущий опорный план оптимальный.

Следовательно улучшение целевой функции приносит та свободная переменная x_k , приращение которой отрицательно $\Delta_k < 0$.

Если есть несколько отрицательных Δ_k , то для замены можно выбрать любую. Но обычно выбирают переменную с наименьшим Δ_k .

Лемма 2

- Если хотя бы одно из приращений $\Delta_k < 0$ и при этом среди коэффициентов a_{ik} есть хотя бы один положительный, то существует опорный план улучшающий текущий.

Величина θ_i определяет, какая из базисных переменных уйдет в свободные на место x_k .

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

θ_i вычисляется только для $a_{ik} > 0$

В свободные переменные уходит та переменная x_k , для которой отношение θ_i минимально

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(x) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180$$

$$7 \cdot x_1 + x_5 = 196$$

Выбранная для данного примера переменная x_5 меняется местами с x_1 .

Базис	Свободные переменные					b_i	Q_{ik}	$\Delta_1 = -3 - x_3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ x_4 & 0 \\ x_5 & 7 \end{bmatrix} = -3$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
x_3	5	2	1	0	0	160	32	$\Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$
x_4	3	4	0	1	0	180	60	
x_5	<u>7</u>	0	0	0	1	196	28	
Δ_k	-3	-2	-	-	-			

III. Приведение системы к каноническому виду

- Так как переменную x_1 ввели в базис, то она должна в третьем уравнении иметь коэффициент равный единице, а во всех остальных нулю.
- Записав второй столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, осуществим эквивалентные преобразования с первой строкой системы.
- К каждой неглавной строке добавляем главную, умноженную на коэффициент m_i

$$m_i = -\frac{a_{ik}}{a_{pk}}$$

Где a_{ik} – главный (ведущий) элемент.

k- номер столбца ведущего элемента.

p – строка ведущего элемента.

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik} \quad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned}$$

Шаг 1

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
I	-5/7	x_3	5	2	1	0	0	160	32
	-3/7	x_4	3	4	0	1	0	180	60
		x_5	7	0	0	0	1	196	28
		Δ_k	-3	-2	-	-	-		

$$\bar{x}_1 = 0, 0, 160, 180, 196, \quad f(\bar{x}_1) = 0.$$

$$\Delta_1 = -3 - x_4 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned}$$

Шаг 2

m_i		Переменные					b	Q	
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4			x_5
II		x_3	0	2	1	0	-5/7	20	10
	-2	x_4	0	4	0	1	-3/7	96	24
	0	x_1	1	0	0	0	1/7	28	-
		Δ_k	-	-2	-	-	3/7		

$$\bar{x}_2 = 28, 0, 20, 96, 0, \quad f(\bar{x}_2) = -3 \cdot 28 = -84.$$

$$\Delta_2 = -2 - x_4 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -2, \quad \Delta_5 = 0 - \begin{bmatrix} 0 & -5/7 \\ 0 & -3/7 \\ -3 & 1/7 \end{bmatrix} = -3/7$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik} \quad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned}$$

Шаг 3

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
III	5/14	x_2	0	1	1/2	0	- 5/14	10	-
		x_4	0	0	-2	1	1	56	56
	-1/7	x_1	1	0	0	0	1/7	28	196
		Δ_k	-	-	1	-	-2/7		

$$\bar{x}_3 = 28, 10, 0, 56, 0, \quad f(\bar{x}_3) = -104.$$

$$\Delta_3 = 0 - \begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \Delta_5 = 0 - \begin{matrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & -5/14 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1/7 \end{bmatrix} = -2/7$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned}$$

Шаг 4

m_i	Переменные						b	Q
	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
IV	x_2	0	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	0	30	
	x_5	0	0	-2	1	1	56	
	x_1	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	20	
	Δ_k	-	-	$\frac{6}{14}$	$\frac{4}{14}$	-		

$\bar{x}_4 = 20, 30, 0, 0, 56$, $f(\bar{x}_4) = -120$ - оптимальный план.

$$\Delta_3 = 0 - x_2 \begin{bmatrix} -2 & -3/14 \\ 0 & -2 \\ -3 & 2/7 \end{bmatrix} = 6/14, \quad \Delta_4 = 0 - x_5 \begin{bmatrix} -2 & 5/14 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1/7 \end{bmatrix} = 4/14$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

$$\left. \begin{aligned} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 &= 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 180 \\ 7 \cdot x_1 &+ x_5 = 196 \end{aligned} \right\}$$

Полная симплекс таблица

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4			
I	-5/7	x_3	5	2	1	0	0	160	32
	-3/7	x_4	3	4	0	1	0	180	60
		x_5	7	0	0	0	1	196	28
		Δ_k	-3	-2	-	-	-		
II		x_3	0	2	1	0	-5/7	20	10
	-2	x_4	0	4	0	1	-3/7	96	24
	0	x_1	1	0	0	0	1/7	28	-
		Δ_k	-	-2	-	-	3/7		
III	5/14	x_2	0	1	1/2	0	-5/14	10	-
		x_4	0	0	-2	1	1	56	56
	-1/7	x_1	1	0	0	0	1/7	28	196
		Δ_k	-	-	1	-	-2/7		
IV		x_2	0	1	-3/14	5/14	0	30	
		x_5	0	0	-2	1	1	56	
		x_1	1	0	2/7	-1/7	0	20	
		Δ_k	-	-	6/14	4/14	-		

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

Замечание

Если на шаге I выбрать $\Delta_k = -2$ - разрешающим столбцом, то стратегия поиска такова:

$$\bar{x}^2 = (0, 45, 70, 196, 0), \quad f(\bar{x}^2) = -90$$

$$\bar{x}^3 = (20, 30, 0, 0, 56), \quad f(\bar{x}^3) = -120$$

Оптимум достигнут за 2 шага.

Метод искусственного базиса

Пусть задача линейного программирования приведена к стандартному виду:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &= b_i, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\}$$

Пусть все $b_i > 0$, но часть или все базисные переменные отрицательны, $x_j < 0$.
Следовательно, опорного плана нет.

Дополним уравнения – ограничения искусственными переменными (предполагаем, что все $x_j < 0, j = \overline{1, n}$).

Введем m переменных (по количеству уравнений) $x_{n+i} < 0, i = \overline{1, m}$, которые в новой системе будут базисными, а отрицательные $x_j < 0$ уйдут в свободные.

В результате получим следующую эквивалентную задачу:

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} &= b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_k &> 0, \quad k = \overline{1, n+m} \end{aligned} \right\}$$

Переменные x_{n+i} не имеют никакого отношения к исходной задаче линейного программирования и служат лишь для получения опорного плана и называются искусственными переменными. А новая целевая функция $f(\hat{x})$ сформирована для полноты задачи.

В оптимальном опорном плане искусственные переменные должны быть равны нулю. В противном случае нарушится условие первоначальной задачи.

В начальном опорном плане искусственные переменные являются базисными, то есть не равны нулю, а в оптимальном плане искусственные переменные должны быть равны нулю.

Значит, искусственные переменные должны стать в оптимальном плане свободными.

Пример

Перепишем ЗЛП в стандартной форме. Для этого введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и запишем задачу в канонической форме.

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 5 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{array} \right\}$$

Так как часть базисных переменных отрицательны ($x_3 = -5$ и $x_4 = -5$), следовательно опорного плана нет.

Для получения начального опорного плана введем переменные x_7, x_8 в двух первых уравнениях-ограничениях и сформулируем вспомогательную задачу:

$$\left. \begin{array}{l} f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8 \rightarrow \min \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_7 = 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 + x_8 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,8} \end{array} \right\}$$

Таким образом, начальным базисом является: $\bar{x}^1 = (0, 0, 0, 0, 7, 9, 5, 5)$

Симплекс таблица с искусственным базисом

m_i	Ба- зис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	θ
I											
$-\frac{1}{3}$	x_7	2	1	-1	0	0	0	1	0	5	5
0	x_8	1	3	0	-1	0	0	0	1	5	5/3
-1	x_5	-2	3	0	0	1	0	0	0	7	7/3
-1/3	x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	9	9
	$\hat{\Delta}_k$	-3	<u>-4</u>	1	1	-	-	-	-		
II											
	x_7	5/3	0	-1	1/3	0	0	1	- 1/3	10/3	2
-1/5	x_2	1/3	1	0	- 1/3	0	0	0	1/3	5/3	5
-9/5	x_5	-3	0	0	1	1	0	0	-1	2	-
-2/5	x_6	2/3	0	0	1/3	0	1	0	- 1/3	22/3	11
	$\hat{\Delta}_k$	<u>-5/3</u>	-	1	- 1/3	-	-	-	4/3		

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(\bar{x}) &= x_7 + x_8 \rightarrow \min \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 &+ x_7 = 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 &+ x_8 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_5 &= 7 \\ x_1 + x_2 &+ x_6 = 9 \\ x_i &\geq 0, \quad i=1,8 \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{\Delta}_k = \hat{c}_k - \sum_{i \in \text{баз}} \hat{c}_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$\boxtimes \Delta_1 = 0 - \begin{matrix} x_7 \\ x_8 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -3, \quad \boxtimes \Delta_2 = 0 - \begin{matrix} x_7 \\ x_8 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$\hat{\Delta}_k = \hat{c}_k - \sum_{i \in \text{баз}} \hat{c}_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8 \rightarrow \min$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

m_i	Ба- ЗИС	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	θ
I											
$-\frac{1}{3}$	x_7	2	1	-1	0	0	0	1	0	5	5
0	x_8	1	3	0	-1	0	0	0	1	5	5/3
-1	x_5	-2	3	0	0	1	0	0	0	7	7/3
-1/3	x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	9	9
	$\hat{\Delta}_k$	-3	<u>-4</u>	1	1	-	-	-	-		
II											
	x_7	5/3	0	-1	1/3	0	0	1	-1/3	10/3	2
-1/5	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	0	0	1/3	5/3	5
-9/5	x_5	-3	0	0	1	1	0	0	-1	2	-
-2/5	x_6	2/3	0	0	1/3	0	1	0	-1/3	22/3	11
	$\hat{\Delta}_k$	<u>-5/3</u>	-	1	-1/3	-	-	-	4/3		

III											
	x_1	1	0	-3/5	1/5	0	0	3/5	-1/5	2	
	x_2	0	1	1/5	-2/5	0	0	1/5	2/5	1	
	x_5	0	0	-9/5	8/5	1	0	9/5	-8/5	8	
	x_6	0	0	2/5	1/5	0	1	2/5	1/5	6	
	$\hat{\Delta}_k$	-	-	0	0	-	-	1	1		
	Δ_k	-	-	-1/5	<u>3/5</u>	-	-				
IV											
	x_1	1	0	-3/8	0	-1/8	0			1	
	x_2	0	1	-1/4	0	1/4	0			3	
	x_4	0	0	-9/8	1	5/8	0			5	
	x_6	0	0	5/8	0	-1/8	1			5	8
	Δ_k	-	-	<u>-7/8</u>	-	3/8	-				

Симплекс таблица с искусственным базисом

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_{ik} \quad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow \min$$

V											
	x_1	1	0	0	0	-1/5	3/5			4	
	x_2	0	1	0	0	1/5	2/5			5	
	x_4	0	0	0	1	2/5	9/5			14	
	x_3	0	0	1	0	-1/5	8/5			8	
	Δ_k	-	-	-	-	1/5	7/5				

Симплекс таблица с искусственным базисом

- Для первых трех шагов приращения $\hat{\Delta}_k$ вычисляются только по искусственным переменным, которые входят в искусственную целевую функцию $\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8$ с коэффициентом $c_i = 1$.
- На третьем шаге искусственные переменные исключены, так как все $\hat{\Delta}_k$ положительны.
- Эквивалентная задача решена. Далее приращения Δ_k вычисляются на основе исходной целевой функции.

$$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2.$$

$$\bar{x}^{-1} = 0, 0, 0, 0, 7, 9, 5, 5, \quad f(\bar{x}^{-1}) = 0, \quad \hat{f}(\bar{x}^{-1}) = 10.$$

$$\bar{x}^{-2} = \left[0, \frac{5}{3}, 0, 0, 2, \frac{22}{3}, \frac{10}{3}, 0 \right], \quad f(\bar{x}^{-2}) = -\frac{10}{3}, \quad \hat{f}(\bar{x}^{-2}) = \frac{10}{3}$$

$$\bar{x}^{-3} = 2, 1, 0, 0, 8, 6, \quad f(\bar{x}^{-3}) = -4, \quad \hat{f}(\bar{x}^{-3}) = 0.$$

$$\bar{x}^{-4} = \underline{[3, 0, 5, 0, 5]}, \quad f(\bar{x}^{-4}) = -7.$$

$$\bar{x}^{-5} = \underline{[4, 5, 8, 14, 0, 0]}, \quad f(\bar{x}^{-5}) = -14.$$

Этапы метода искусственного базиса

- ▮ Формирование и решение вспомогательной задачи ЛП с введением искусственных переменных. Искусственные переменные в начальном опорном плане являются базисными. Искусственная целевая функция включает только искусственные переменные. При получении смежных опорных планов искусственные переменные из базисных переводим в свободные. В результате получен оптимальный опорный план для вспомогательной задачи $\hat{f}(\bar{x}) = 0$.
-

Этапы метода искусственного базиса

Н. Оптимальный опорный план вспомогательной задачи ЛП является начальным опорным планом основной задачи ЛП. Задача решается для исходной целевой функции $f(\bar{x})$ обычным симплекс – методом

Введение искусственных переменных требуется в двух случаях:

1. Ряд базисных переменных x_i в канонической форме отрицательны;
 2. если трудно свести к канонической форме, то просто в любое уравнение-ограничение добавляем искусственную переменную.
-

Двойственность задач линейного программирования

Определение двойственности

Для любой задачи линейного программирования существует некоторая другая задача линейного программирования, решение которой тесно связано с решением исходной.

Таким образом, двойственность состоит в существовании пары задач:

- прямая задача;
 - двойственная задача.
-

Прямая и двойственная задачи

Прямая задача

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}$$

Двойственная задача

$$z(\bar{y}) = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot y_i \geq c_j, j = \overline{1, n}$$

Теорема 1

Если существует оптимальный план одной задачи, то и существует оптимальный план другой, при этом справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i$$

Неравенство переходит в равенство если \bar{x} и \bar{y} оптимальны.

Теорема 2

Если \bar{x}^* , \bar{y}^* – оптимальные планы то компоненты планов связаны соотношениями:

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* \right) \cdot y_i^* = 0$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^* \right) \cdot x_j^* = 0$$

Сравнение прямой и двойственной задачи

Матрица ограничений $A = a_{ij}$

В исходной задаче

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В двойственной

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Т.е. матрица A^1 является транспонированной к матрице A .

Число ограничений и переменных

В исходной задаче

- n – переменных;
- m – ограничений.

В двойственной

- m – переменных;
 - n – ограничений.
-

Правые части ограничений – это коэффициенты целевой функции двойственной задачи

Прямая задача

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \underline{c}_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq \underline{b}_i, i = \overline{1, m}$$

Двойственная задача

$$z(\bar{y}) = \sum_{i=1}^m \underline{b}_i \cdot y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot y_i \geq \underline{c}_j, j = \overline{1, n}$$

Знаки ограничений и цель задачи меняются на противоположные

В исходной задаче

- Знаки ограничений $<$
- Целевая функция $\rightarrow \max.$

В двойственной

- Знаки ограничений $>$
 - Целевая функция $\rightarrow \min.$
-

Исходная задача	Двойственная задача
Целевая функция $\rightarrow \max$	Целевая функция $\rightarrow \min$
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты целевой функции
Коэффициенты целевой функции	Константы в правых частях ограничений
j -й столбец коэффициентов в ограничениях	j -я строка коэффициентов в ограничениях
j -я строка коэффициентов в ограничениях	j -й столбец коэффициентов в ограничениях
j -я неотрицательная переменная	j -е неравенство вида \geq
j -я переменная, не имеющая ограничений в знаке	j -е соотношение в виде $=$
i -е неравенство вида \leq	i -я неотрицательная переменная
i -е соотношение в виде $=$	i -я переменная не имеющая ограничений в знаке

Соответствие двойственных задач ЛП

Пример

Запишем прямую и двойственную задачи

Для решения двойственной задачи введен искусственный базис, переменные y_6, y_7 которые исключаются из опорного плана на третьем шаге.

Прямая задача

$$f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 160$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180$$

$$7 \cdot x_1 \leq 196$$

$$n = 2, m = 3$$

Двойственная задача

$$f(\bar{y}) = 160 \cdot y_1 + 180 \cdot y_2 + 196 \cdot y_3 \rightarrow \min$$

$$5 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 - y_4 \quad y_6 \quad = 3$$

$$2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 \quad - y_5 \quad + y_7 = 2$$

$$F_{\text{иск}} = y_6 + y_7$$

	m_i	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b	θ
I		y_6	5	3	7	-1	0	1	0	3	3/7
	0	y_7	2	4	0	0	-1	0	1	2	-
		$\hat{\Delta}$	-7	-7	-7	1	1	-	-		
II		y_3	5/7	3/7	1	-1	0	1	0	3/7	1
	0	y_7	2	4	0	0	-1	0	1	2	1/2
		$\hat{\Delta}$	-2	-4	-	0	1	1	-		
III		y_3	1/2	0	1	-1	0			3/14	3/7
	-1	y_2	1/2	1	0	0	-1			11/2	1
		$\hat{\Delta}$	0	-	-	0	0				
		Δ	-28	-	-	0	0				
IV		y_1	1	0	2					3/7	
		y_2	0	1	-1					2/7	
		Δ	-	-	56						

Симплекс таблица
двойственной
задачи

Таким образом, получен следующий оптимальный план двойственной задачи:

$$\begin{cases} y^* = \left[\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 0 \right] \\ F(y^*) = 120. \end{cases}$$

Для получения оптимального решения прямой задачи воспользуемся соотношением из Теоремы 2:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^* \right) \cdot x_j^* = 0$$

Подставив оптимальные значения вектора \bar{y}^* , получим оптимальные значения вектора \bar{x}^* .

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1^* + 2 \cdot x_2^* - 160 \cdot \frac{3}{7} = 0, \\ 3 \cdot x_1^* + 4 \cdot x_2^* - 180 \cdot \frac{2}{7} = 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = 20, \quad x_2^* = 30.$$

Получен тот же оптимальный план что и при решении прямой задачи (см. слайд 25 «Задача об использовании сырья»)

Экономическая трактовка двойственности

Если прямую задачу:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \right\}$$

рассматривать, как задачу об использовании сырья (ресурсов), то параметры задачи имеют следующий экономический смысл.

Экономический смысл переменных

В прямой задаче:

- x_j – количество единиц j -го продукта;
- c_j – стоимость единицы j -го продукта;
- b_i – ресурс(запас) i -го сырья;

В двойственной:

y_i – стоимость единицы i -го сырья;

Тогда стоимость всех ресурсов

$$\sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \rightarrow \min$$

А стоимость всех затраченных ресурсов, идущих на выпуск единицы j -ой продукции не меньше окончательной стоимости этого продукта

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot y_i \geq c_j$$

Если коэффициенты ограничений b_i понимается как ресурсы, то с точки зрения предприятия эти ресурсы имеют определенную ценность.

Любой вид ресурса обладает некоторой «теневой ценой», определяющей ценность данного ресурса для получения предприятием дохода, равного разности (прибыль – затраты). А под оптимальным планом понимается отношение

$$\frac{\text{прибыль}}{\text{затраты}}$$

Определение оптимальных «теневых цен» – основная цель двойственной задачи.
