Лекция 4

Задачи линейной оптимизации

Формулировка задач линейной оптимизации

Найти максимальное или минимальное значение ***целевой функции***

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (\min) \quad (1)$$

при имеющихся ***ограничениях***

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, x_j \le b_i \;, \quad i = 1,..m \;. \qquad (2)$$

Здесь

$c_1, c_2, \ldots, \; - c_n$ - ***коэффициенты целевой функции***,

b_i - ***ограничения по ресурсам***,

a_{ij} - ***нормы расхода ресурсов***, показывающие, сколько требуется ***ресурса*** типа i для выпуска единицы ***продукции*** типа j,

x_j - количество выпускаемых товаров

Вектор неизвестных , $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяющих условию данной задачи, называется ***допустимым решением*** (или ***допустимым планом***).

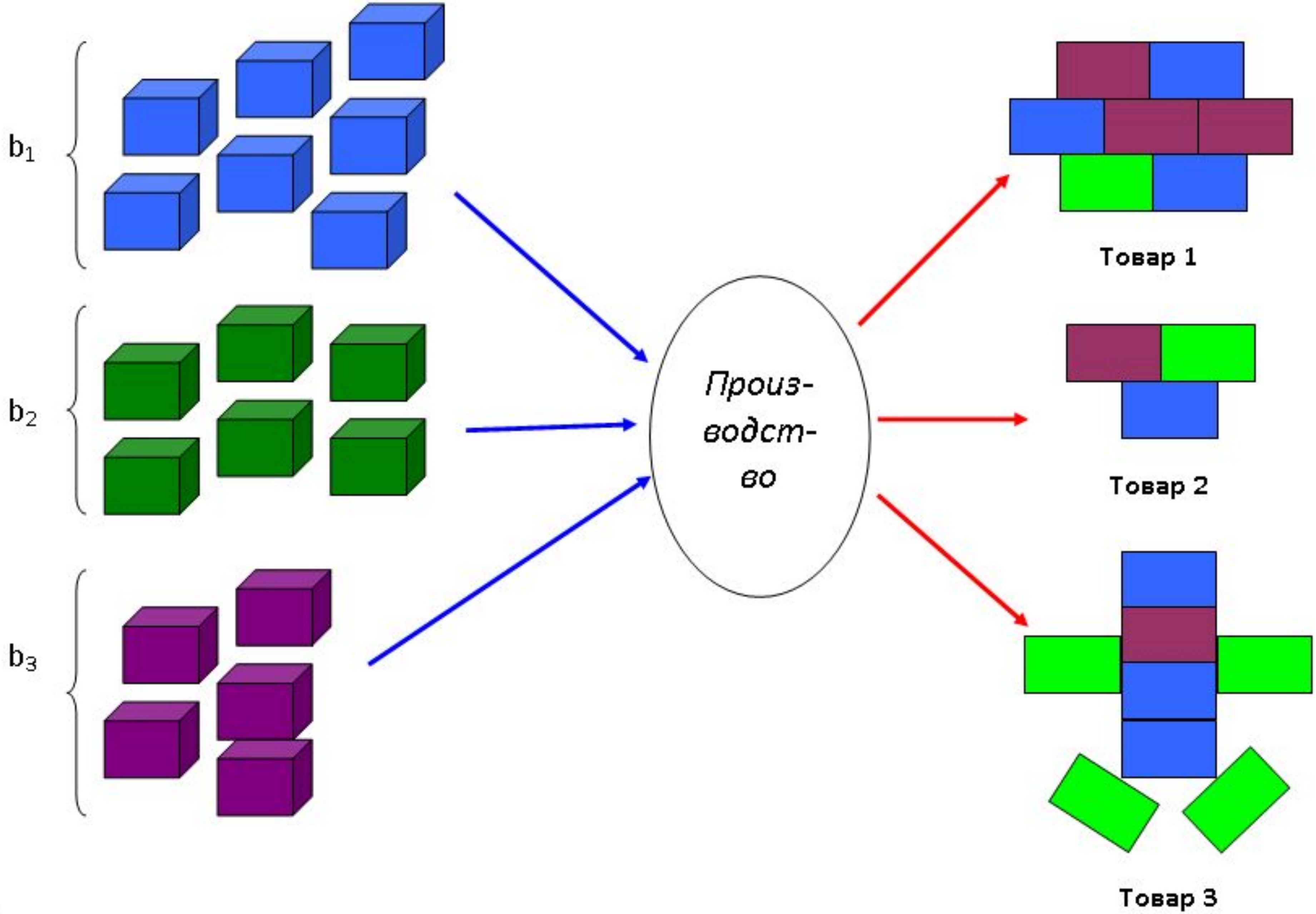
Допустимое решение называется ***оптимальным***, если оно ***оптимизи-рует*** (т.е. ***максимизирует*** или, в зависимости от условий задачи, - ***минимизирует***) значение ***целевой функции***.

Например, рассматривается вопрос о ***наиболее прибыльной стратегии предприятия***. Пусть оно выпускает товары (например, телевизоры) ***трех видов*** (марок): 1,2, 3.

Требуется определить, какое количество телевизоров первой, второй и третьей марок произвести, чтобы ***прибыль от продаж была наибольшей***.

В этом случае $n=3$. Мы должны знать прибыль от реализации ***одного телевизора каждой марки*** (c_1, c_2, c_3) и имеющиеся у нас ресурсы ($b_1, b_2 \ldots, b_m$), а также то, сколько ресурса каждого вида необходимо для производства одного телевизора марки 1, 2 и 3 (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).

В результате решения задачи (1) мы узнаем, ***сколько телевизоров*** марки 1 (x_1), 2 (x_2) и 3 (x_3) должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую возможную – ***при имеющихся ресурсах*** – прибыль.



b_1
b_2
b_3
Произ-
водст-
во
Товар 1
Товар 2
Товар 3

Построение модели оптимального распределения ресурсов

Предприятие располагает определенным количеством трудовых, сырьевых и финансовых ресурсов.

Требуется определить, какое количество продукции четырех типов П1, П2, П3, П4 нужно выпустить, чтобы получить максимальную прибыль. Нормы расхода и прибыль от реализации единицы каждого вида продукции, а также имеющиеся ресурсы приведены в таблице.

Ресурс	***П1***	***П2***	***П3***	***П4***	***наличие ресурса***
прибыль	110	80	120	150	-
Трудовые ресурсы	2	3	1	4	25
Сырье	5	7	4	6	90
Финансы	3	5	8	12	140

Введем обозначения:

x_j - ***количество выпускаемой продукции*** типа j $(j=1,2,3,4)$;

b_i - ***количество ресурса*** вида i $(i=1,2,3)$;

a_{ij} - ***норма расхода*** i – го ресурса для выпуска единицы продукции типа j;

c_j - прибыль, получаемая от реализации единицы продукции типа j.

Таким образом, нужно ***максимизировать*** ***целевую функцию***

$$F(x) = 110x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 150x_4 \quad \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \le 25$$

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 90$$

$$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 12x_4 \le 140$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0,$$

где левая часть представляет выражение для величины требуемого ресурса, а правая – его ***количество***.

Решение задачи, например, с помощью ***Поиска решения*** Excel, дает оптимальные значения выпускаемого продукта, обеспечивающие ***максимальную прибыль***

$$x_1^* = 4{,}615 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 15{,}769 \quad x_4^* = 0 \ .$$

Задача о распределении бюджета

Вариант	Чистая прибыль, тыс. д.е.	Вложения по годам, тыс. д.е.				
		1	2	3	4	5
Расширение завода в стране *А*	***400***	100	50	200	100	0
Расширение мощностей по производству ПК в своей стране	***700***	300	200	100	100	100
Открытие нового завода в стране *Б*	***800***	100	200	270	200	100
Расширение мощностей по производству комплектующих в своей стране	***1000***	200	100	400	200	200
Имеющиеся средства		***500***	***450***	***700***	***400***	***300***

Целевая функция

$$400\cdot x_1 + 700\cdot x_2 + 800\cdot x_3 + 1000\cdot x_4 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$100\,x_1 + 300\,x_2 + 100\,x_3 + 200\,x_4 \le 500,$$

$$50\,x_1 + 200\,x_2 + 200\,x_3 + 100\,x_4 \le 450,$$

$$200\,x_1 + 100\,x_2 + 270\,x_3 + 400\,x_4 \le 700,$$

$$100\,x_1 + 100\,x_2 + 200\,x_3 + 200\,x_4 \le 400,$$

$$100\,x_2 + 100\,x_3 + 200\,x_4 \le 300,$$

$$x_i = 0 \text{ или } 1, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Пусть вложение дополнительных средств x_{ij} в операцию (i, j) ***сокращает время ее выполнения***

$$с \quad t_{ij} \quad до \quad t'_{ij} < t_{ij} \quad .$$

Требуется определить времена ***начала*** $T^{н}_{ij}$ и ***окончания*** T^{o}_{ij} всех работ, и величину ***дополнительных средств*** x_{ij}, которые необходимо вложить в каждую из них, чтобы ***минимизировать общее время выполнения проекта***.

При этом общая сумма ограничена величиной C, а продолжительность каждой операции не должна быть меньше ***минимально возможного времени*** ее выполнения d_{ij}.

Пример оптимизации проекта ***по времени***.

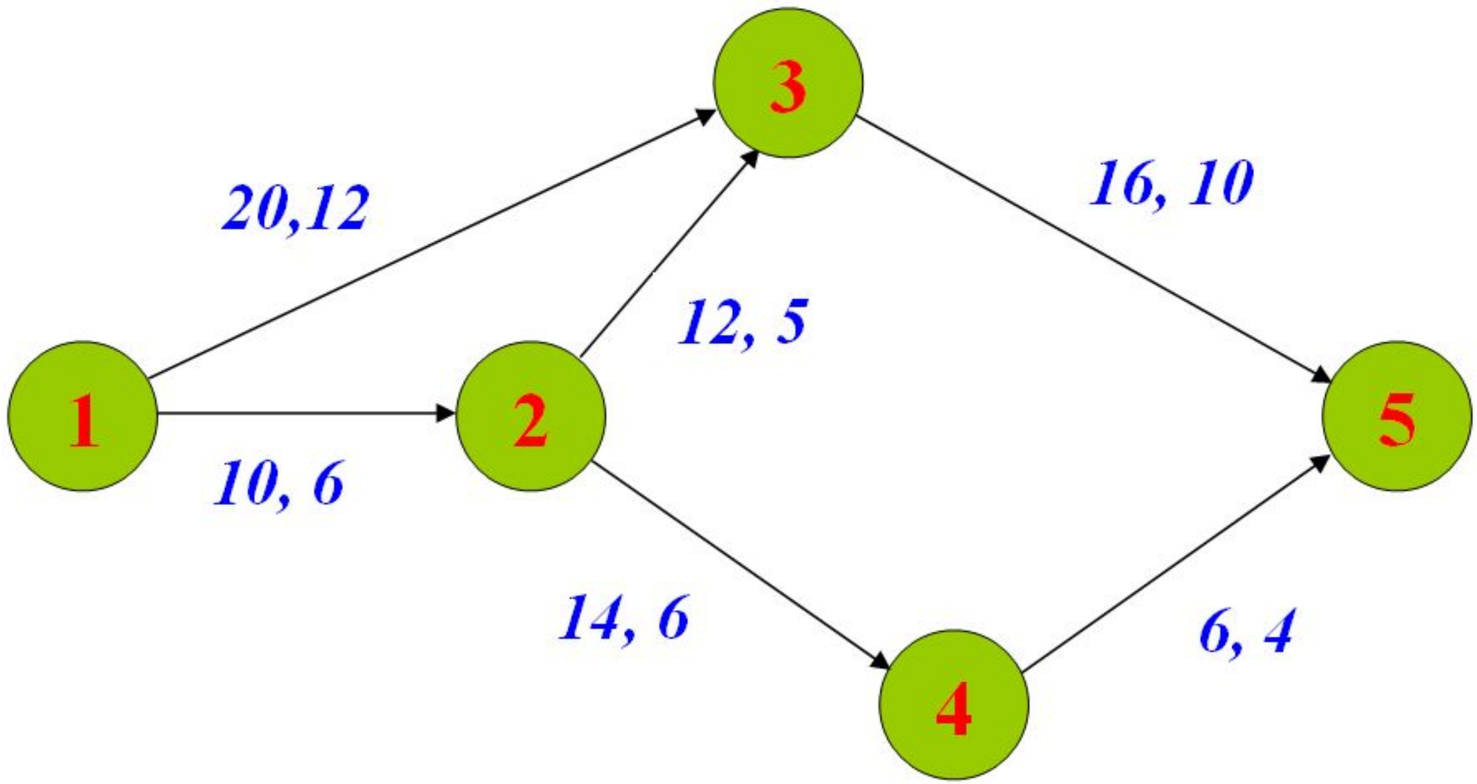


Рис. 1. Приведены продолжительности t_{ij} и минимально возможные времена d_{ij} выполнения работ соответственно (в днях).

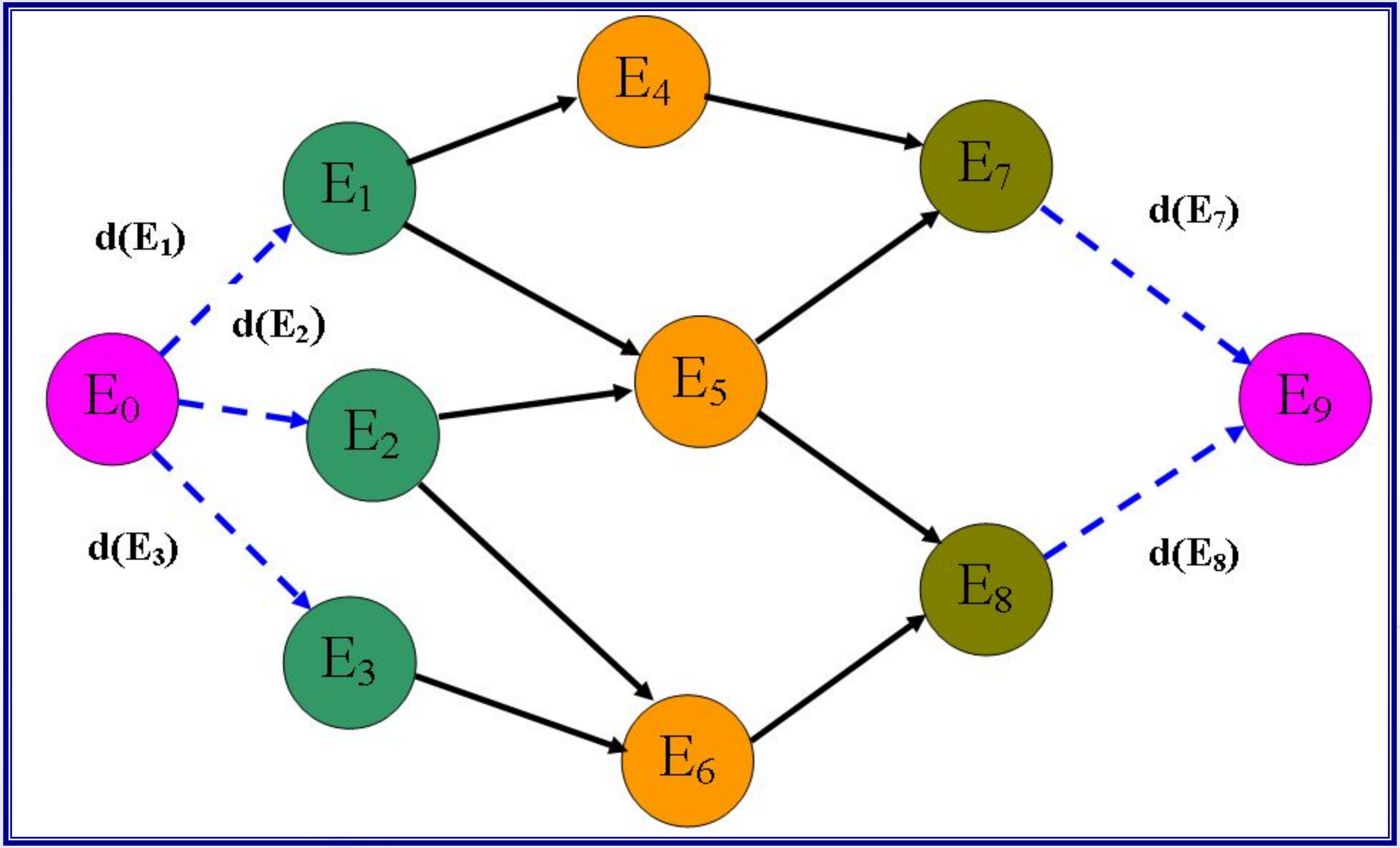
А. Задача о максимальном потоке

По сети, состоящей из множества ***вершин*** $E_0, E_1, \dots, E_n$ и ***дуг***, пропускаются ***потоки вещества*** (газ, жидкость) или **транспорта**.

Каждая вершина E_i характеризуется ***интенсивностью потока*** $d(E_i)$, причем, если $d(E_i) > 0$, то вершина называется ***источником***, если $d(E_i) < 0$, - ***стоком***; все остальные вершины являются ***промежуточными***.

Каждой дуге (E_i, E_j) сети соответствует некоторая ***пропускная способность*** b_{ij}, т.е. ***максимальный поток***, который она может пропустить за единицу времени. В простейшем случае имеется единственный источник E_0 и единственный сток E_n.

Требуется найти ***максимальную величину потока из источника в сток***. Поток в сети представляет совокупность потоков $\{x_{ij}\}$ по ***всем ее дугам*** (количество перемещаемой субстанции в единицу времени).



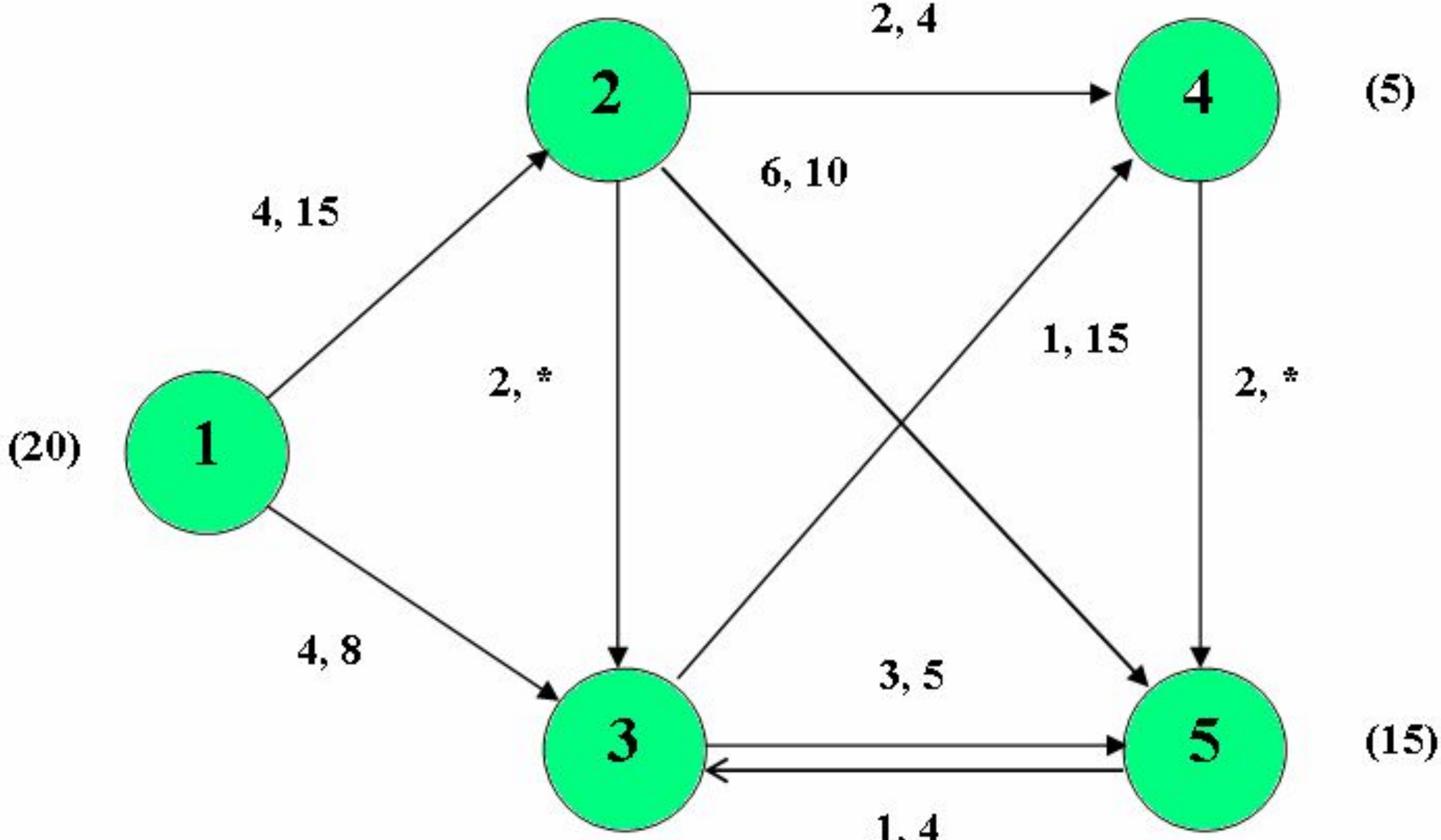
E_0
E_1
E_2
E_3
E_4
E_5
E_6
E_7
E_8
E_9
$d(E_1)$
$d(E_2)$
$d(E_3)$
$d(E_7)$
$d(E_8)$

Б. Задача о потоке минимальной стоимости

Задана сеть, каждой дуге которой соответствует ***пропускная способность*** b_{ij} и ***дуговая стоимость*** c_{ij} (стоимость доставки единицы потока по дуге).

Необходимо найти поток из источника E_0 в сток E_n ***заданной величины*** B, обладающий ***минимальной стоимостью***.

Под стоимостью потока понимается стоимость доставки продукта из источника в сток.



2, 4
2
4
(5)
6, 10
4, 15
1, 15
2, *
2, *
1
(20)
4, 8
3, 5
3
5
(15)
1, 4