

Задачи о распределении ресурсов

Линейное программирование

Характерные черты задач линейного программирования:

- 1) показатель оптимальности представляет собой *линейную* функцию от элементов решения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- 2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид *линейных* равенств или неравенств

Общая постановка задачи планирования производства

Определить план производства одного или нескольких видов продукции, обеспечивающий наиболее рациональное использование имеющихся материальных, финансовых и других видов ресурсов.

Такой план должен быть оптимальным с точки зрения выбранного критерия: максимум прибыли, минимум затрат на производство и т. д.

Задача о распределении ресурсов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m; \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

n — число выпускаемых продуктов;

m — количество используемых производственных ресурсов
(например, производственные мощности, сырье, рабочая сила);

a_{ij} — объем затрат ресурса i на выпуск единицы продукта j ;

c_j — прибыль от выпуска и реализации единицы продукта j ;

b_i — количество имеющегося ресурса i ;

x_j — *переменная* — объем выпуска продукта j ;

Эта задача линейного программирования в стандартной форме *на максимум*.

Пример 1

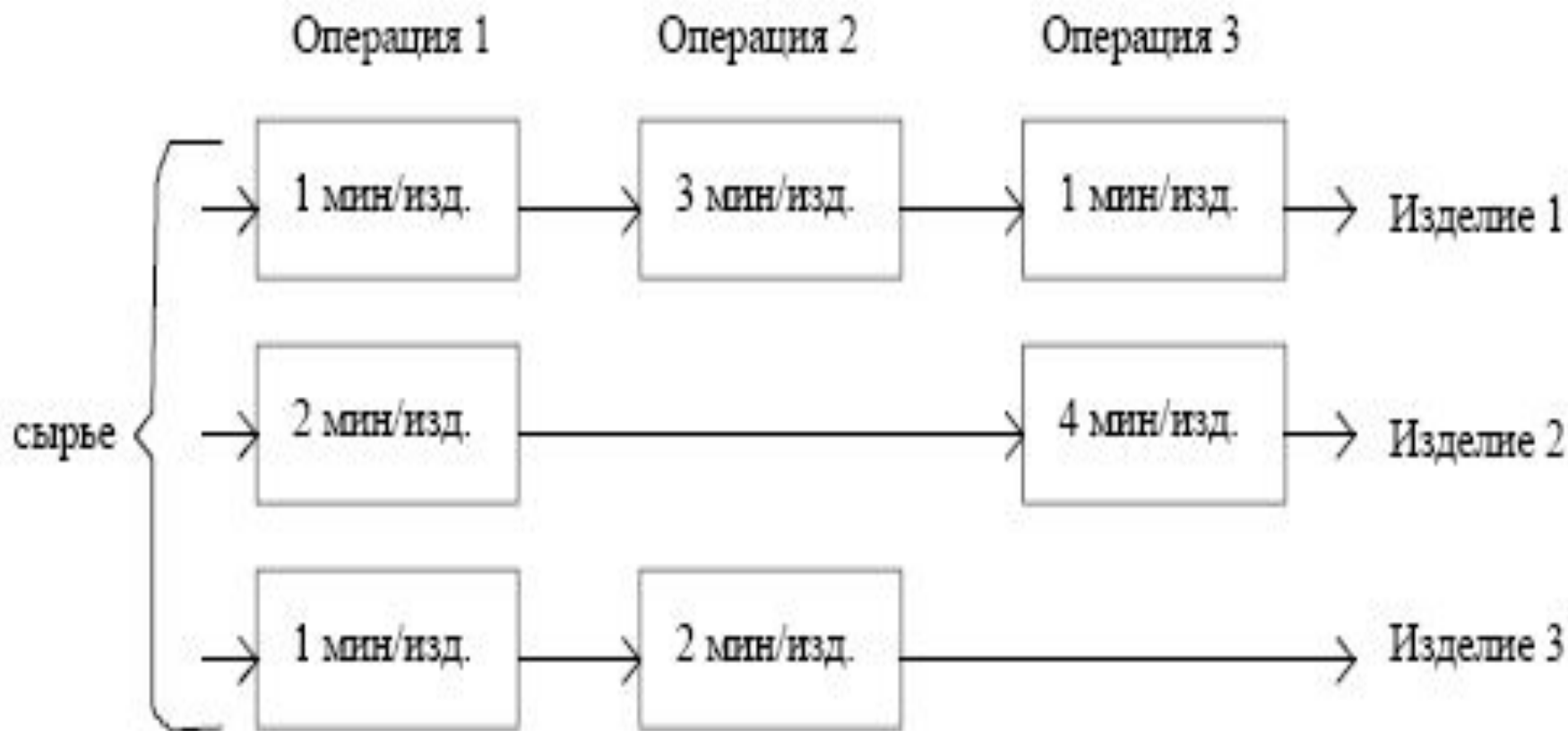
Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции.

Затраты времени на каждую операцию для каждого изделия указаны на технологической схеме.

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для 1 операции – 430 мин, для 2 операции – 460 мин, для 3 операции – 420 мин. Ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 ден. ед. соответственно.

Определить наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции.

Технологическая схема производства



Построение математической модели задачи

1. *Что является искомыми величинами задачи?*

Искомые величины являются *переменными* задачи:

x_1 – объем производства изделия 1,

x_2 – объем производства изделия 2,

x_3 – объем производства изделия 3.

2. *Какова цель решения?*

Какой параметр задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения?

В каком направлении должно изменяться значение этого параметра (к max или к min)?

Цель решения записывается в виде *целевой функции*

Построение математической модели задачи

Цель решения – максимизация прибыли.

Целевая функция:

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

3. *Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены?*

Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы **ограничений**.

Возможные объемы x_1 , x_2 и x_3 ограничиваются фондом рабочего времени по каждой операции:

- использование фонда рабочего времени на операции 1(мин):
 $1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$;
- использование фонда рабочего времени на операции 2(мин): $3x_1 + 2x_3 \leq 460$;
- использование фонда рабочего времени на операции 3(мин): $1x_1 + 4x_2 \leq 420$;
- объемы производства компьютеров не могут быть отрицательными
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Модель задачи

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$

$$1x_1 + 4x_2 \leq 420$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов
2	1	на операции 1	1	2	1		430
3	2	на операции 2	3	0	2		460
4	3	на операции 3	1	4	0		420
5						Общая прибыль, руб.	
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5		
7		Количество единиц продукции					
8							

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос

Σ Arial Cyr 10 Ж К Ч

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(C2:E2;C7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов	
2	1	на операции 1	1	2	1	=СУММПРОИЗВ(C2:E2;C7:E7)		
3	2	на операции 2	3	0	2	СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)		
4	3	на операции 3	1	4	0		420	
5						Общая прибыль, руб.		
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5			
7		Количество единиц продукции						
8								
9								
10								

Лист1 / Лист2 / Лист3

Правка NUM

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Σ Arial Cyr 10 Ж К Ч

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(С6:Е6;С7:Е7)

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов	
2	1	на операции 1	1	2	1	0	430	
3	2	на операции 2	3	0	2		460	
4	3	на операции 3	1	4	0		420	
5						Общая прибыль, руб.		
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5	=СУММПРОИЗВ(С6:Е6;С7:Е7)		
7		Количество единиц продукции				СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)		
8								
9								
10								

Лист1 / Лист2 / Лист3

Правка

NUM

Поиск решения



Установить целевую ячейку:

Выполнить

Равной: максимальному значению

значению:

Закреть

минимальному значению

Изменяя ячейки:



Предположить

Ограничения:

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка



F6 =СУММПРОИЗВ(C6:E6;C7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов
2	1	на операции 1	1	2	1	0	430
3	2	на операции 2	3	0	2		460
4	3	на операции 3	1	4	0		420
5						Общая прибыль, руб.	
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5	0	
7		Количество единиц продукции					
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

\$F\$6

Выполнить

Равной: максимальному значению значению:

0

Закреть

 минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$C\$7:\$E\$7

Предположить

Ограничения:

\$F\$2:\$F\$4 <= \$G\$2:\$G\$4

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка

Параметры поиска решения

Максимальное время: секунд

ОК

Предельное число итераций:

Отмена

Относительная погрешность:

Загрузить модель...

Допустимое отклонение: %

Сохранить модель...

Сходимость:

Справка

Линейная модель

Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения

Показывать результаты итераций

Оценки

Разности

Метод поиска

линейная

прямые

Ньютона

квадратичная

центральные

сопряженных градиентов

Задачи анализа чувствительности оптимального решения

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

- на сколько можно увеличить запас *дефицитного* ресурса для улучшения оптимального значения целевой функции?
- на сколько можно уменьшить запас *недефицитного* ресурса при сохранении оптимального значения целевой функции?

2. Увеличение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения коэффициентов целевой функции:

каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции, при котором не меняется оптимальное решение?

Отчет по результатам

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1					
3	Отчет создан: 08.09.2010 18:54:20					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$F\$7	количество ед продукции Общая прибыль, д.е	0	1350		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$C\$7	количество ед продукции Изделие 1	0	0		
14	\$D\$7	количество ед продукции Изделие 2	0	100		
15	\$E\$7	количество ед продукции Изделие 3	0	230		
16						
17						
18	Ограничения					
19	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
20	\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	\$F\$2<=\$G\$2	связанное	0
21	\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	\$F\$3<=\$G\$3	связанное	0
22	\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	\$F\$4<=\$G\$4	не связан.	20
23						
24						
25						
26						

Отчет по устойчивости

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1							
3	Отчет создан: 08.09.2010 18:54:21							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7			Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое	
8	Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение	
9	\$C\$7	количество ед продукции Изделие 1	0	-4	3	4	1E+30	
10	\$D\$7	количество ед продукции Изделие 2	100	0	2	8	2	
11	\$E\$7	количество ед продукции Изделие 3	230	0	5	1E+30	2,666666667	
12								
13	Ограничения							
14			Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
15	Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение	
16	\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	1	430	10	200	
17	\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	2	460	400	20	
18	\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	0	420	1E+30	20	
19								
20								
21								

1. **Результирующее значение** - оптимальные значения переменных решения.
2. **Нормированная стоимость** показывает, на сколько изменится значение целевой функции в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение.

Например, нормированная стоимость для изделия 1 равна -4. Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение, потребуем включить в план выпуска еще одно изделие 1, то новый план выпуска принесет нам прибыль $2150 - 4 = 2146$ руб./день, что на 4 руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. **Коэффициенты ЦФ.**

4. **Предельные значения приращения целевых коэффициентов**, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение (допустимое увеличение, допустимое уменьшение).

Например, допустимое увеличение прибыли от реализации изделия равно 4 ден.ед./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено. Это означает, что если прибыль от реализации изделия 1 возрастет более чем на 4 ден. ед./шт (станет равной 7 ден.ед./шт.), то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск изделия 1. А если она будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение останется прежним.

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	1	430	10	200
\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	2	460	400	20
\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	0	420	1E+30	20

Если остальные данные модели останутся неизменными, то увеличение на 1 мин фонда рабочего времени по операции 1 в пределах от 230 (=430-200) до 440 (=430+10) приведет к увеличению значения целевой функции (прибыли от реализации) на 1 ден. ед.

Теневая цена рассчитывается только для дефицитных ресурсов.

Позволяет сделать вывод – какой ресурс целесообразно наращивать в первую очередь.

Двойственная задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, \dots, n; \\ y_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

y_i – стоимость единицы ресурса i