Моделирование процессов с целочисленными значениями

ГРЫЗЛОВА Т. П. РГАТА, 2 0 1 0

Моделирование.

Компьютерное моделирование.

- **п**уассоновский процесс
- **п**роцесс **р**азмножения и **г**ибели
- **п**роцесс чистого размножения
- **р**аспределение **П**уассона
- **м**арковская цепь
- **с**лучайные потоки
- **о**череди
- **д**исциплины обслуживания

ПРОЦЕССЫ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Методика описания характеристик процессов с целочисленными значениями

- **В**водятся постулаты процесса
- **С**троится автоматная модель (стохастический автомат Мура)
- **С**оставляется выражение для вероятности произвольного состояния процесса
- **С**оставляется выражение для приращения вероятности состояния процесса
- **В**ыполняется предельный переход к дифференциальному уравнению
- **З**адаются начальные условия и решаются системы дифференциальных уравнений

Пуассоновский процесс

Постулаты:

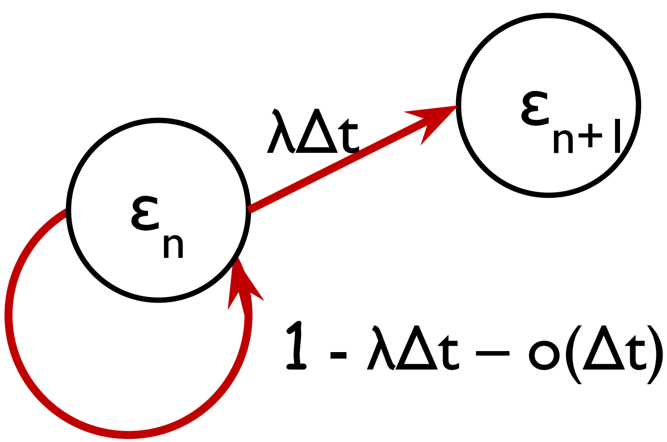
(1) **П**роцесс начинается в момент времени 0 в состоянии ε_0 .

(2) **Н**епосредственный переход из состояния ε_i возможен только в состояние ε_{i+1}

$$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

(3) **В**ероятность перехода

$o(\Delta t)$ – **в**ероятность более чем **о**дного скачка.



Вероятности (находятся аналитически)

$\boxed{P_n(t+\Delta t)}$ **В**ероятность того, что **с**истема в момент времени (t + Δt) будет находиться в **с**остоянии *n*

$$P_n(t)P_0(\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + P_{n-1}(t)\lambda + o(\Delta t)/\Delta t$$

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$n = 0$ $\quad P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \quad P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad P_0(0) = 1$

$n = 1$ $\quad P_1(0) = 0 \quad P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

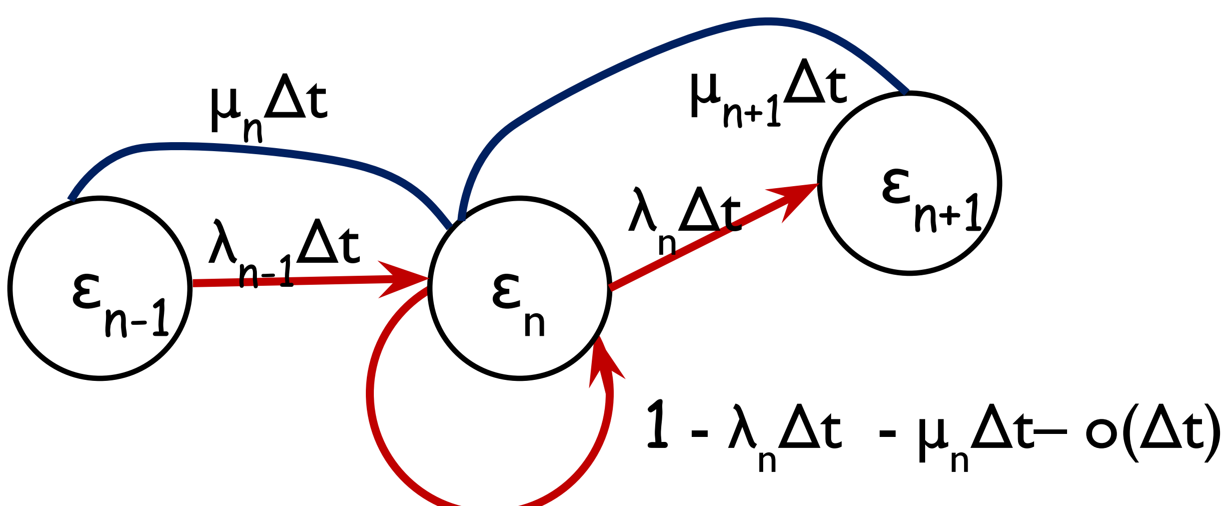
Процесс размножения и гибели

Постулаты:

(1) **Н**епосредственный переход из состояния ε_i , $i \geq 1$ возможен в состояния ε_{i+1} и ε_{i-1}. Из состояния ε_0 **п**ереход возможен только в **с**остояние ε_1

(2) **В**ероятность перехода в течении интервала $(t, t+\Delta t)$ из состояния ε_i в состояние ε_{i+1} составляет $\lambda_i \Delta t$ а в ε_{i-1} – $\mu_i \Delta t$

(3) **В**ероятность более чем одного скачка - $o(\Delta t)$



Вероятности переходов

Состояние ε_n в момент времени $t + \Delta t$

возможно, если:

(1) в момент времени t система находилась в состоянии ε_{n-1} и на рассматриваемом интервале произошел переход в ε_n

(2) в момент времени t система находилась в состоянии ε_n и на рассматриваемом интервале времени не произошло никаких событий

(3) система находилась в состоянии ε_{n+1} и на рассматриваемом интервале произошел переход в ε_n

(4) на интервале $(t, t + \Delta t)$ происходит несколько переходов.

Поскольку возможности взаимно исключают друг друга, их складывают:

Вероятности состояний

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda_n\Delta t-\mu_n\Delta t)+$$
$$\lambda_{n-1}\Delta t P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}\Delta t P_{n+1}(t)+o(\Delta t)$$

$$\boxed{n \ge 1}$$

$$P_n'(t) = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)$$

$$\boxed{n = 0} \quad P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)$$

Условие стационарности

$$\boxed{P_i(0)=1, \quad P_n(0)=0,\, n\ne i}$$

Начальные условия

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n$$

$$\varepsilon_n \to \varepsilon_{n+1}$$

$$\varepsilon_n \to \varepsilon_{n-1}$$

Вероятности переходов в марковской сети

$$\pi_{n,n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}; \quad \pi_{n,n-1} = \frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}$$

Процесс линейного роста

Элементы совокупности на интервале Δt

могут делиться с **в**ероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$

погибнуть с **в**ероятностью $\mu\Delta t + o(\Delta t)$

$$\lambda_n = n\lambda \qquad \mu_n = n\mu$$

$$P_n'(t) = -(\lambda+\mu)nP_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t),$$
$$P_0'(t) = \mu P_1(t)$$

$$E\{n(0)\} = n_0 \Longrightarrow E\{n(t)\} = n_0 e^{(\lambda-\mu)t}$$

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона – распределение вероятностей случайной величины *X* с целочисленными неотрицательными значениями,

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

заданное формулой

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Математическое ожидание и дисперсия такой случайной величины равна параметру λ

$$\overline{X} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$$

Процесс радиоактивного распада: если в *n* независимых испытаниях события

$A_1, \ldots, A_n$ происходят с одной и той же малой вероятностью *p*, то вероятность того, что *k* событий произойдут одновременно приблизительно выражается распределением Пуассона с параметром λ = *pn*:

$$P_k(np)$$

Пуассоновский процесс

В теории случайных процессов при расчете нагрузки линий связи обычно полагают, что количество вызовов, поступивших за непересекающиеся интервалы времени, – независимые случайные величины, подчиняющиеся распределению Пуассона с параметрами, значения которых пропорциональны длинам соответствующих интервалов времени.

Пуассоновский процесс – удобная математическая модель, описывает однородный поток требований в теории массового обслуживания:

- **в**ызовы, поступающие на телефонную станцию
- **в**ыезды машин скорой помощи при транспортных происшествиях и т.п.

Пуассоновский процесс – случайный процесс, описывающий моменты наступления случайных событий, в которых число событий за **ф**иксированный интервал времени имеет распределение **П**уассона, а числа событий, происходящих в непересекающиеся промежутки времени, независимы.

Марковская цепь

Марковская цепь – важный пример последовательности зависимых случайных испытаний с конечным или счетным числом исходов. Более точно – последовательность случайных величин

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

со значениями из множества натуральных чисел, при этом условное распределение случайной величины x_n при любом n зависит только от значения x_{n-1} и не зависит от всех предыдущих значений:

$$P\{x_n = i_n \mid x_0 = i_0, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}\} =$$
$$P\{x_n = i_n \mid x_{n-1} = i_{n-1}\}$$

Моделирование случайных потоков

Рассматривается упорядоченная последовательность случайных моментов времени, в которые происходит или не происходит какое-либо событие. Такая модель называется случайным потоком

Случайный поток событий используется при моделировании:

- **с**истем массового обслуживания
- **п**риема импульсных сигналов
- в **т**еории **н**адежности

Многомерные плотности интервалов между моментами наступления событий:

$$w(\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots \Delta t_k, \ldots)$$

$$\Delta t_1 = \tau_1 = t_1 - t_0, \quad \Delta t_2 = \tau_2 = t_2 - t_1, \ldots.$$

Моменты времени наступления события

$$\boxed{t_k = t_{k-1} + \tau_k} \quad (***)$$

Типы потоков событий

Потоки *с **о**граниченным **п**оследействием*, у которых интервалы $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$

статистически независимы, следовательно, многомерное распределение раскладывается на произведение одномерных распределений:

$$w(\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots \Delta t_k, \ldots \Delta t_n) =$$
$$w(\Delta t_1) w(\Delta t_2) \ldots w(\Delta t_k) \ldots w(\Delta t_n)$$

Потоки с ограниченным последействием задаются последовательностью одномерных законов распределения $w(\Delta t_k) = p_k(\tau)$

***Р**екуррентные **с**тационарные **п**отоки*, у которых

$$p_2(\tau) = p_3(\tau) = \ldots = p_n(\tau) = p(\tau)$$

задаются двумя одномерными плотностями $p_0(\tau),\ p(\tau)$

Потоки, у которых $p_0(\tau) = p(\tau)$

это просто ***р**екуррентные **п**отоки.*

Пример: простейший *пуассоновский поток* при $k = 1$ с распределением

$$p(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad \tau > 0$$

Методика моделирования случайных потоков

(1) Формируются реализации случайных величин Δt_k с заданным законом распределения

(2) **П**о формулам (***) вычисляются моменты времени наступления событий

Последовательность моделирования пуассоновского потока –

- **г**енерация **р**авномерно распределенных случайных величин $r_k = [0,1]$
- **о**пределение интервала времени $$\Delta t_k = -\frac{1}{\lambda}\ln r_k$$
- **в**ычисление моментов времени наступления событий

- **О**чередь в случае одного канала
- **П**редположение о показательном времени обслуживания
- **О**череди с бесконечным числом каналов
- **О**череди с фиксированным числом каналов
- **О**чередь с дисциплиной FIFO
- **О**чередь с дисциплиной LIFO
- **О**чередь со случайной дисциплиной обслуживания

ОЧЕРЕДИ

Предположение о показательном времени обслуживания

Простейший случай постоянных коэффициентов в процессе размножения и гибели

$$\lambda_n = \lambda \quad \mu_n = \mu$$

Процесс размножения и гибели сводится к задаче об очередях при $a = 1$

Аналогия основана на предположении о ***п**оказательных **в**ременах **о**бслуживания*

Телефонный разговор длится **X** секунд, причем **X** – целочисленная случайная величина с известным законом распределения

$$p_n = \mathbf{P}\{\mathbf{X} = n\}$$

Очередь – это физическая система с двумя состояниями – занято и свободно

$$(\varepsilon_0) \rightleftarrows (\varepsilon_1)$$

Если линия занята, то вероятность изменения состояния в следующую секунду **з**ависит от того, сколько идет разговор. **И**наче, прошлое влияет на будущее и процесс не является **м**арковским.

Предположение о показательном времени обслуживания

Представим, что решение продолжать или не продолжать разговор принимается каждую секунду подбрасыванием несимметричной монеты, иначе, раз в секунду производится испытание **Б**ернулли, последовательность испытаний продолжается до первого успеха. Когда произойдет успех, разговор кончится.

В этом случае **в**ремя **о**бслуживания имеет геометрическое распределение

$$p_n = q^{n-1}p$$

Когда линия занята, вероятность того, что она останется занятой более одной секунды, равна q

Вероятность перехода в свободное состояние равна p

Теперь эти вероятности не зависят от того, как долго была занята линия.

Если же время нельзя считать **д**искретным, то вместо геометрического распределения берут ***показательное***. Это единственное распределение, имеющее **м**арковский **х**арактер

Показательное время обслуживания

Вероятность того, что разговор, происходящий в момент времени s,

продлится до (*s* + Δt), не зависит от предыдущего разговора тогда, когда вероятность того, что разговор продлится более t единиц времени, равна

$$e^{-\lambda t}$$

Показательное время обслуживания – нулевой член распределения Пуассона, т. е. времени ожидания первого изменения

Входной поток (поток требований) имеет пуассоновский тип с параметром

$$\boxed{\lambda}$$