Аналитико-статистическое моделирование информационных систем

Кафедра информационных управляющих систем

Лекции читает

канд.техн.наук, доцент

Литвинов Владислав Леонидович

Список литературы:

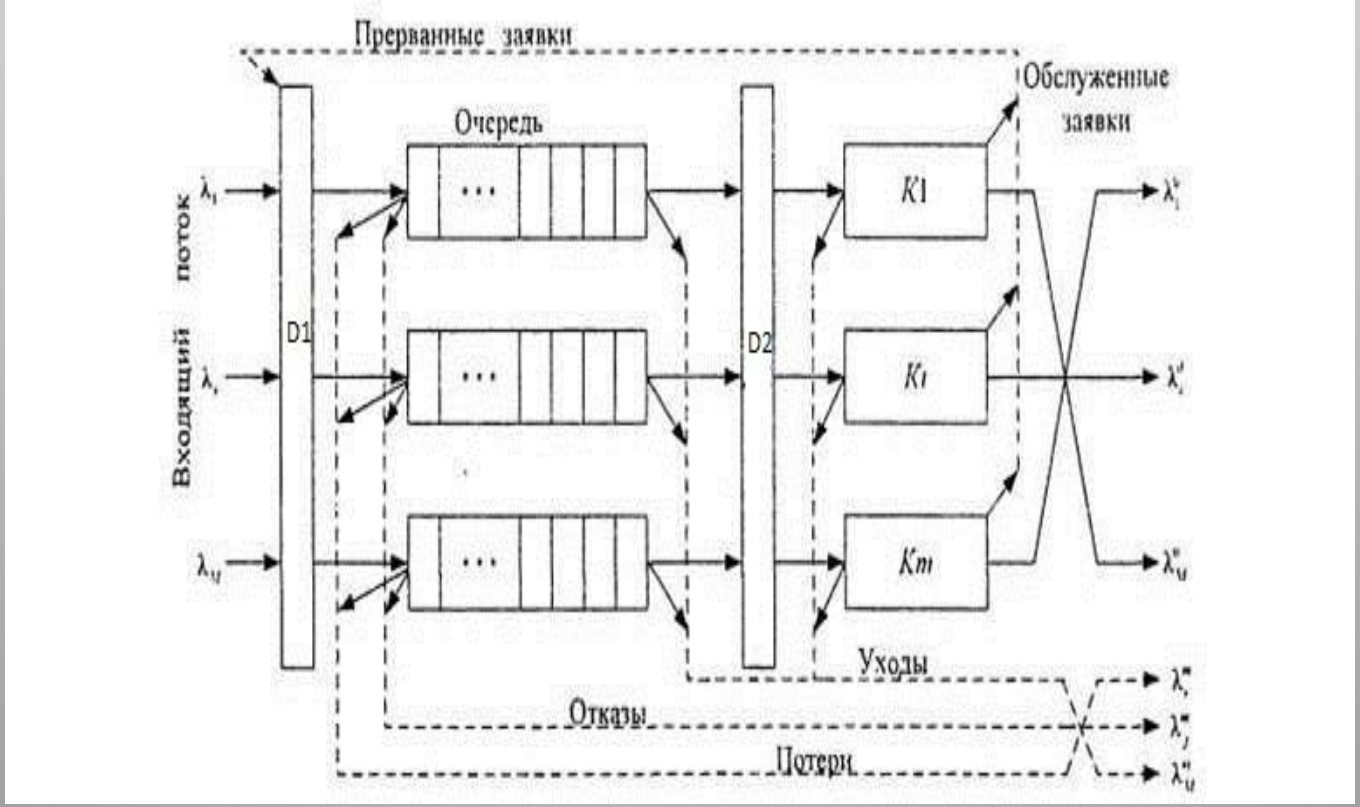
1. О.И. Кутузов, Т.М. Татарникова
   МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ
   http://dvo.sut.ru/libr/ius/w101kutu/index.htm
2. *Боев В. Д,* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS WORLD. Учеб. пособие — СПб..: БХВ-Петербург, 2004. — 368 с.
3. *Боев В. Д, Сыпченко Р. П.* Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики. Учеб. пособие — СПб..: Военная академия связи, 2009. — 432 с.
4. *Бражник А. Н,* Имитационное моделирование: возможности GPSS WORLD — СПб..: Реноме, 2006. — 439 с.

Тема лекции 3:

- **СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Общая характеристика систем массового обслуживания

- Одним из математических методов исследования сложных стохастических систем является теория массового обслуживания (ТМО), занимающаяся анализом эффективности функционирования так называемых систем массового обслуживания (СМО).
- *Под СМО понимают динамическую систему, предназначенную для эффективного обслуживания случайного потока заявок при ограниченных ресурсах системы.* Системы массового обслуживания называют также Q-схемами (англ. queuing system). Обобщенная схема СМО приведена на рис.1.


Прерванные заявки
Обслуженные заявки
Очередь
Входящий поток
D1
D2
K1
Ki
Km
Уходы
Отказы
Потери

Работа любой такой системы заключается в обслуживании поступающего на нее потока требований или заявок (вызовы абонентов, приход покупателей в магазин, требования на выполнение работы в мастерской и т.д.). Заявки поступают в систему одна за другой в некоторые случайные моменты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается какое-то время, после чего система освобождается для обслуживания очередной заявки.

Каждая такая система может содержать конечное число элементов обслуживания, называемых *каналами обслуживания* (линия связи, приборы). Примерами таких систем могут быть телефонные станции, билетные кассы, аэродромы, радиолокационные станции, ЭВМ, вычислительные центры, информационные системы различных видов.

- Отметим случайный характер поступления заявок и случайный характер промежутков времени, необходимого для выполнения заявок. В целом, имеем случайный процесс, в котором возможны как перегрузки, так и простои. Если в момент появления заявки на входе СМО есть свободный канал, ее обслуживание начинается немедленно. Если СМО загружена (т.е. все каналы заняты), заявка занимает место в очереди. На число мест в очереди может быть наложено ограничение. При этом возможны конфликтные ситуации, решением которых может быть либо отказ системы принять заявку, либо принятие заявки в систему за счет выталкивания из очереди другой, менее ценной в данный момент времени заявки.
- Процесс продвижения заявок в СМО осуществляется по некоторому закону управления, который задается дисциплинами ожидания *D1* и обслуживания *D2.* Дисциплина ожидания определяет порядок приема заявок в систему и размещения их в очереди, а дисциплина обслуживания - порядок выбора заявок из очереди для назначения на обслуживание.

- Поступающие на вход СМО (рис. 1) однородные заявки в зависимости от порождающей причины делятся на типы. Совокупность заявок всех типов образует входящий поток СМО. Интенсивность потока заявок типа i (i = 1, ..., *M)* обозначим λ_i

  Обслуживание заявок выполняется *m* каналами *(K).* Различают универсальные и специализированные каналы обслуживания. Для универсального канала типа j считаются известными функции распределения F(ţ) длительности обслуживания заявок произвольного типа. Для специализированных каналов функции распределения длительности обслуживания заявок некоторых типов являются неопределенными.
- *В качестве примера процесса обслуживания можно рассматривать различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например, потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т.д. При этом характерными для работы таких объектов являются случайное поведение заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени.*

- Основными элементами сети связи, представляемой как СМО, выступают узлы и линии (каналы) связи. Эти элементы предназначены для обслуживания вызовов и, следовательно, являются системами массового обслуживания.
- Обслуживание вызова в узле характеризуется заданным алгоритмом и может быть описано как последовательность логических операций. Свойства узла СМО (производительность коммутатора, потери вызовов на групповых устройствах и т.д.) могут быть описаны моделями элементарных СМО, которые и будут рассмотрены в дальнейшем.
- Пропускная способность СМО зависит от числа каналов, их производительности и характера потока заявок.
- Теория массового обслуживания устанавливает зависимость между характеристиками потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО, ее эффективностью и часто включает экономический аспект. Например, стремятся найти наименьшую полную стоимость единицы времени ожидания обслуживания требованиями в накопителе и простоя приборов. Кроме того, к задачам ТМО близки задачи повышения надежности технических устройств.

- Для характеристики СМО обычно применяют следующие показатели:
  - среднее число заявок, которые система может обслужить за единицу времени;
  - средний процент необслуженных заявок;
  - вероятность того, что поступившая заявка будет принята к выполнению;
  - среднее время ожидание в очереди;
  - закон распределения времени ожидания;
  - среднее число заявок в очереди;
  - закон распределения числа заявок в очереди;
  - средний доход системы в единицу времени.
- Наиболее удобны для анализа те системы, в которых случайный процесс является близким к марковскому, т.е. состояние системы в будущем зависит от состояния системы в настоящее время, но не зависит от того, каким образом эта система пришла к этому состоянию (не учитывает прошлое). В таком случае задачу ТМО можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями и выразить в явном виде основные характеристики обслуживания через параметры системы. В остальных случаях характеристики оцениваются приближенно.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания заявки и собственно обслуживание заявки. Это можно отобразить в виде некоторого i-го прибора обслуживания П, состоящего из накопителя заявок *Н,* и канала обслуживания заявок *К,* (рис. 8.2). В накопителе может находиться одновременно l = 0, ..., *L,* заявок, где *L* - емкость i-го накопителя. На каждый элемент прибора обслуживания *П* поступают потоки событий: в накопитель *Н* поток заявок *w* на канал *К* - поток обслуживания *u.*

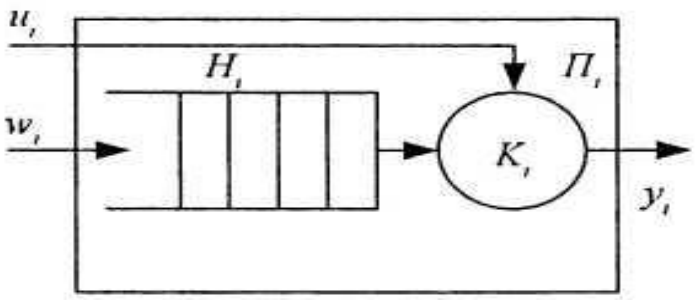


Рис. 8.2. Схема прибора СМО

- *Потоком событий (ПС) называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.* Различают однородные и неоднородные потоки событий. *Однородный ПС* (ОПС) характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью
- $\{t_n = \{0 <= t_1 <= t_2 <= ... <= t_n\}$, где t_n - момент поступления *n-ro* события - неотрицательное вещественное число.
- Однородный ПС может быть также задан в виде последовательности промежутков времени между *n- и* (*n*- 1)-ым событиями $\{t_n\}$.
- *Неоднородным ПС* называется последовательность $\{t_n; f_n\}$, где t_n — моменты поступления заявки; f_n - набор признаков события.
- Например, может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т.п.
- Рассмотрим ОПС, для которого $т_i \in \{т_n\}$. где т - случайные величины, независимые между собой. Тогда ПС называется *потоком с ограниченным последействием.*
- Поток событий называется *ординарным,* если пренебрежимо мала вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t, попадает больше одного события.

- *Стационарным ПС* называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени Δt зависит от длины этого интервала и не зависит от того, где на оси времени взят этот интервал. Для ординарных ПС справедливо

$$0 \bullet P_0(t,\Delta t) + 1 \bullet P_1(t,\Delta t) = P_1(t,\Delta t)$$

- Среднее число событий, наступающих на интервале Δt в единицу времени, составляет $P_1(t,\Delta t)$ / Δt

- Рассмотрим предел этого выражения при *Δt* -> 0:
- lim $P_1(t,\Delta t)$ / Δt = λ (t) [1/ед.врем]
- *Δt*->0
- Если этот предел существует, то он называется *интенсивностью (плотностью)* ОПС. Для стационарного ПС
- *λ(t) = λ* = const.

- Применительно к элементарному каналу обслуживания К, можно считать, что интервалы времени между моментами появления заявок на входе K_i образуют подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания , т.е. интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявки образуют подмножество управляемых переменных. Заявки, обслуженные каналом K_i и заявки, по различным причинам не обслуженные и покинувшие прибор образуют выходной поток.
- Процесс функционирования прибора обслуживания *П,* можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени *Zi(t).*
- Переход в новое состояние П означает изменение количества заявок, которые в нем находятся (в канале K_i и накопителе H_i).
- Таким образом, вектор состояний для *Пi* имеет вид $Zi = (zi^H; zi^k)$,
- где zi^H - состояния накопителя ($zi^H = 0$ - накопитель пуст, $zi^H = 1$ - в накопителе одна заявка, $zi^H = Li^H$ - накопитель занят полностью);
- zi^K - состояние канала *k,* ($zi^K = 0$ - канал свободен, $zi^K = 1$ - канал занят).

- Следует отметить, что в ТМО, в зависимости от емкости накопителя, существуют:
- системы с потерями ($L_t^H = 0$, накопитель отсутствует);
- системы с ожиданием ($L_t^H \to \infty$, емкость накопителя бесконечно большая);
- системы с ограниченной емкостью накопителя (смешанные).

- В ТМО существуют следующие дисциплины обслуживания: бесприоритетная, приоритетная, со смешанным приоритетом.
- *Бесприоритетное обслуживание* осуществляется по правилу FIFO и LIFO или по случайному правилу. Дисциплины FIFO и LIFO по среднему значению или математическому ожиданию ничем не отличаются, однако, приоритетной считается дисциплина FIFO, которая *минимизирует дисперсию времени ожидания* (т.е. уменьшается разброс времени относительно среднего значения).
- *Приоритетное обслуживание* заявок, находящихся в очереди, может выполняться по правилу *относительного и абсолютного* обслуживания. Для приоритетного обслуживания заявкам необходимо указать уровень приоритета СМО (0 > 1 > 2 >...):
- *относительная дисциплина обслуживания* заключается в следующем: заявка, пришедшая на обслуживание с более высоким приоритетом, не прерывает заявку, находящуюся на обслуживании, и только после окончания обслуживания в канале приоритетная очередная заявка поступает на обслуживание;
- *абсолютная дисциплина обслуживания* заключается в том, что пришедшая на канал заявка с более высоким приоритетом вытесняет с обслуживания заявку с меньшим приоритетом.
- При *смешанном обслуживании* наряду с различными дисциплинами приоритетного обслуживания используется бесприоритетное обслуживание.

Классификация СМО

- В теории массового обслуживания приняты сокращенные обозначения, в основе которых лежит трехбуквенное обозначение вида
- *A/B/m,*
- где *A* и *B* описывают соответственно законы распределения промежутков времени между последовательно поступающими заявками и распределение времени их обслуживания, а величина *m* - число обслуживающих приборов;
- *A u B* принимают значения из следующего набора символов:
- *M*- показательное распределение;
- E_r — распределение Эрланга порядка *r;*
- *D* - детерминированное распределение;
- *G* - распределение произвольного вида.
- Так, система обслуживания *M/G/1* представляет собой систему с пуассоновским входным потоком, произвольным распределением времени обслуживания и одним обслуживающим прибором. Символ *D* означает, что время обслуживания - постоянная величина, поэтому система с пуассоновским входным потоком в этом случае обозначается как *M/D/1.*
-

- Иногда приходится указывать также емкость накопителя системы
- (которую обозначим через *K)* или число источников нагрузки (которое обозначим через M); в этом случае будет использоваться пятибуквенное обозначение: *A / B / m / K / M.* В случае отсутствия одного из последних индексов предполагается, что его значения сколь угодно велико.
- Запись вида *D/M/2/20* означает систему с двумя обслуживающими приборами, постоянным (детерминированным) временем между двумя последовательно поступающими заявками, показательным распределением длительности обслуживания и накопителем емкостью 20 заявок.
- Различают два вида СМО: *одноканальные и многоканальные.* Также различают *системы с отказами,* в которых заявка получает отказ, если все каналы заняты, и *системы без отказов* (с *ожиданием* или *очередью),* которые делятся на упорядоченные и неупорядоченные.
- *Упорядоченные системы* отличаются тем, что освободившиеся каналы принимают заявки в порядке очереди. *Неупорядоченные системы* характеризуются тем, что при освобождении канала заявка выбирается случайным образом. Например, поступившее требование может занять место в самой короткой очереди; в этой очереди оно может расположиться последним (такая очередь будет упорядоченной), а может пойти на обслуживание вне очереди.
- Кроме того, системы с ожиданием разделяются на системы с *ограниченным* и *неограниченным временем ожидания.*
- *Смешанной системой* обслуживания называется система, в которой требование, заставшее все приборы занятыми, становится в очередь лишь в том случае, когда число требований, находящихся в системе, не превосходит определенного уровня (в противном случае происходит потеря требования).

Показатели эффективности и основные характеристики СМО

- Показатели эффективности СМО зависят от вида систем.
- Для систем с отказами это абсолютная и относительная пропускная способность систем.
- *Абсолютная пропускная способность* - среднее число выполненных заявок в единицу времени.
- *Относительная пропускная способность* - средняя доля поступивших заявок, определяемая отношением среднего числа выполненных заявок к общему числу поступивших заявок в единицу времени.
- Кроме того, можно определить среднее число занятых каналов или среднее относительное время простоя одного канала или всей системы в целом.
- Для систем без отказов (с ожиданием) выбираются другие показатели эффективности. Если система с неограниченным ожиданием, то за показатели эффективности принимают:
- *среднее число заявок в очереди,*
- *среднее число заявок в системе,*
- *время ожидания в очереди,*
- *время выполнения заявок.*

- Для систем с ограниченным временем ожидания применимы обе группы показателей: абсолютная и относительная пропускная способность и характеристики ожидания. При этом нужно знать следующие параметры:
- n -число каналов; λ — интенсивность потока заявок; $\mu = 1/t_{обсл}$ - производительность (интенсивность обслуживания) каждого канала (среднее число заявок).
- Основные характеристики простейших СМО следующие:
- *Коэффициент загрузки устройства или канала* — $\rho = \lambda / \mu < 1$. При этом коэффициент загрузки является вероятностью обслуживания заявки в канале.
- Пусть СМО работает достаточно длительное время T, тогда число заявок в системе будет определяться как λT и среднее время обслуживания заявок будет определяться как $\lambda T t_{обсл}$. В этом случае
- $\lim \lambda T t_{обсл} / T = \lambda t_{обсл} = \rho$
- $T \to \infty$
- Коэффициент загрузки ρ имеет смысл только лишь для установившихся режимов.
- *Коэффициент простоя канала* $\eta = 1 - \rho$.
- *Время пребывания заявки в системе* $T_c = T_{ож} + M(T_{обсл})$ где $T_{ож}$ - время ожидания заявки на обслуживание; $M(T_{обсл})$ - среднее время обслуживания.
- *Время ожидания в СМО,* которое в общем случае может состоять тоже из двух компонент:
- $T_{ож} = T^н + T^П$, где $T^н$ - время ожидания обслуживания или время начала обслуживания; $T^П$ - время ожидания в прерванном состоянии.
- *Длина очереди,* которая определяется как $l = \lambda T^н$
- *Среднее число заявок в системе* $n = \lambda(T^н + M(T_{обсл}))$ (формула Литтла).

Структура системы массового обслуживания

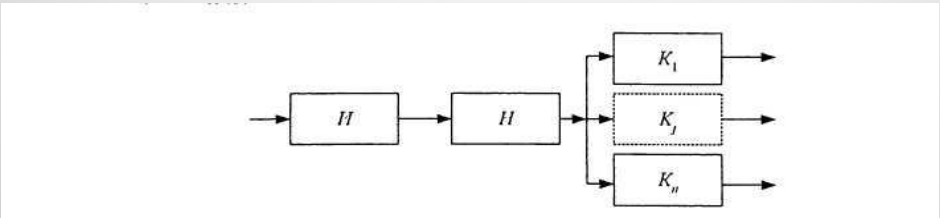
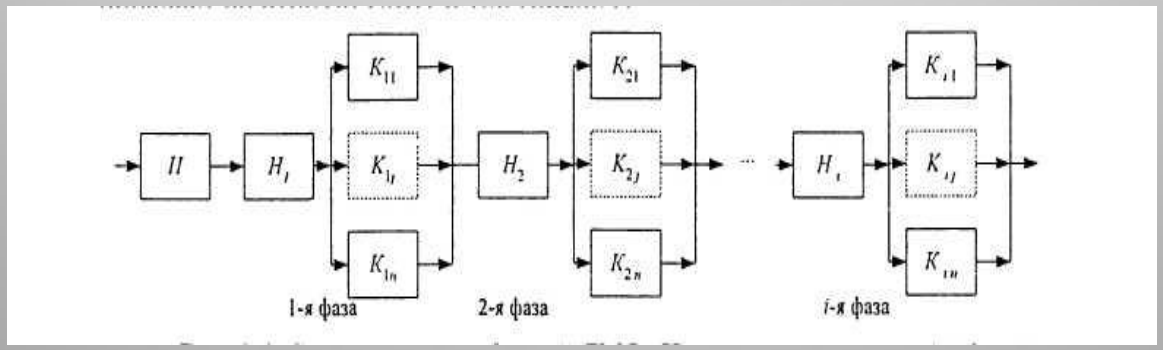


Рис. 3. Структура простейшей СМО: *И*- источник заявок (при моделировании — генератор случайных событий - ГСС); *Н* - накопитель; *Kj*- канал обслуживания.



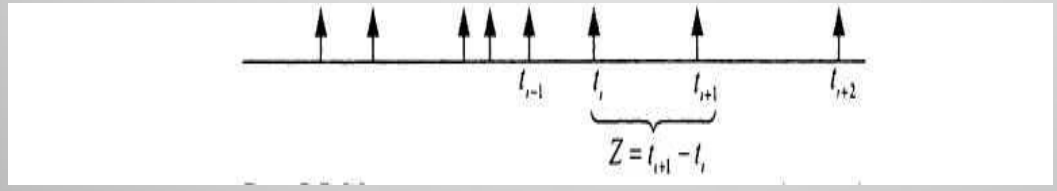
Для более сложных, многофазных систем выделяются фазы обслуживания, когда заявка, получив обслуживание в первой СМО, сразу попадает во вторую СМО и т.д. (рис.4).

- Система массового обслуживания считается заданной, если определены следующие характеристики:
- *Входящий поток требовании* или, иначе говоря, моменты поступления требований в систему. (В дальнейшем будем считать, что источник располагает неограниченным числом требований и что требования однородны, т.е. различаются только моментами появления в системе.)
- *Структура системы обслуживания,* состоящая из накопителя и узла обслуживания, представляющего собой одно или несколько обслуживающих устройств, которые в дальнейшем будем называть *каналами.* Может оказаться, что требованиям придется ожидать, пока каналы освободятся. В этом случае требования находятся в накопителе, образуя одну или несколько очередей.
- *Время обслуживания* каждым каналом.
- *Дисциплина ожидания,* т.е. совокупность правил, регламентирующих хранение требований, находящихся в один и тот же момент времени в системе.
- *Дисциплина очереди,* т.е. совокупность правил, в соответствии с которыми требование отдает предпочтение той или иной очереди (если их несколько) и располагается в выбранной очереди.
- *Дисциплина обслуживания,* т.е. совокупность правил, в соответствии с которыми требование выбирает прибор, которым оно будет обслужено.

На практике обычно моменты поступления требований в систему случайны. Часто бывает, что поток требований тоже случайный, тогда случайна и длительность обслуживания.

По аналогии с вышеизложенным модели элементарных СМО, как правило, включают: модель обслуживания вызовов (заявок) группой устройств (пучком линий) при дисциплине обслуживания с потерями; модель обслуживания вызовов (заявок) устройством при дисциплине обслуживания с ожиданием.

Модель процесса поступления вызовов (заявок) показана на рис. 5.



Вероятность того, что промежуток времени Z между вызовами меньше некоторой величины *z,* называется функцией распределения вероятностей промежутков времени между вызовами $P(Z < z) = F(z)$. Каждый вызов характеризуется временем его обслуживания (временем занятия). Предположим, что продолжительность обслуживания вызовов потока является случайной величиной с экспоненциальным законом распределения, тогда

$$F(t)=1-e^{-\mu t} \; ; \quad \omega(t)= \mu e^{-\mu t} \; ; \; M(T)= 1/\mu \qquad (1)$$

где μ - интенсивность обслуживания; *M(T)* - средняя продолжительность обслуживания.

Задача моделирования потока заявок и времени обслуживания заключается в получении последовательности случайных чисел с заданными законами распределения вероятностей. Модель процесса обслуживания вызовов показана на рис. 6.

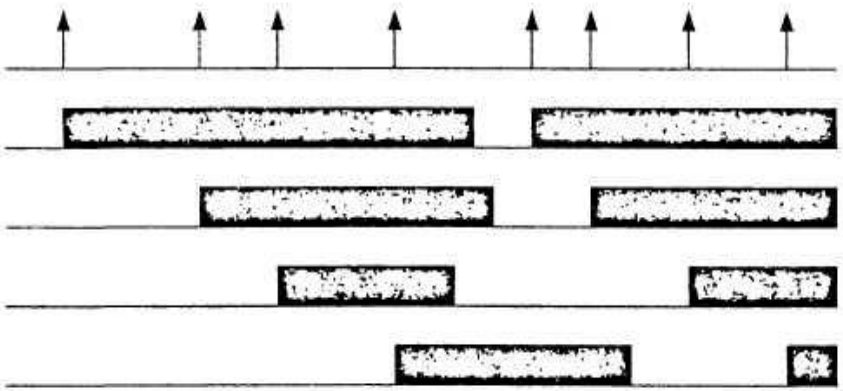


Рис. 8.6. Модель процесса обслуживания вызовов

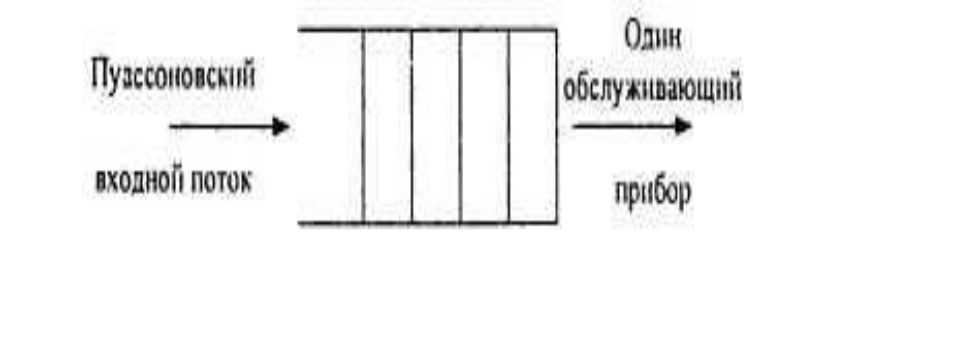
Системы массового обслуживания с ожиданием

- **Система обслуживания *M/M/1***
- В качестве модели процесса поступления сообщений в такой СМО будем предполагать пуассоновский поток поступлений. В таком случае интервалы времени г между последовательными поступлениями сообщений являются непрерывными случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону:
- $\omega(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (2)
- Как было показано выше, среднее время между поступлениями сообщений в этом случае определяется из выражения
- $M(\tau) = \int_0^\infty \tau\omega(\tau)d\tau$ =1 /λ

- Параметр λ, введенный как коэффициент пропорциональности при определении пуассоновского процесса, определяет интенсивность входного потока. Будем также полагать, что длина сообщения *r* распределена по экспоненциальному закону со средним значением $1/\mu$ (в теории очередей говорят об экспоненциальном распределении времени обслуживания), так что плотность распределения длины сообщения *r* определяется из выражений (1).
- Подобное предположение о распределении данных, как правило, не соответствует действительности. На практике длина сообщения является дискретной величиной (длина кратна используемой единице данных), в то время как величина *r* непрерывна. Вместе с тем, предположение об экспоненциальном распределении длины сообщения позволяет быстро получить искомый результат и облегчает изучение более сложных моделей обслуживания, поэтому в литературе его часто используют.
- Статистический анализ существующих сетей передачи данных показывает, что предположение об экспоненциальном распределении длины сообщения приводит к относительно хорошим результатам.

- Если пропускная способность выходного канала C единиц данных/сек, то очевидно, что на передачу или обслуживание сообщения ДЛИНОЙ r единиц потребуется *r/C* сек. Плотность распределения времени обслуживания можно записать в виде (8.1), т.е.
- $$\omega(t) = (C/L)\, e^{-(C/L)t}$$
- В этом случае $M(T) = L/C$ -среднее время передачи сообщения.
- Заметим, что величина *C/L* используется для обозначения интенсивности обслуживания сообщений, а распределение времени обслуживания, как и распределение времени между последовательными поступлениями сообщений, является экспоненциальным.

- Рассмотрим модель системы обслуживания *M/M/1,* представленную на рис. 7. Процесс поступления сообщений - пуассоновский, объем буферной памяти не ограничен, распределение времени обслуживания - экспоненциальное. Сообщения обслуживаются по принципу FIFO («первым пришел - первым обслужен»). Такая модель обслуживания является одной из простейших в теории очередей.



Предположение о бесконечности числа мест для ожидания означает на практике выделение для хранения запросов, входной и выходной информации таких объемов памяти буферов и базы данных, которые при правильной эксплуатации гарантируют отсутствие информационных потерь в системе вследствие их возможного переполнения. В последние годы прослеживается устойчивая тенденция к существенному увеличению объемов оперативной и внешней памяти и их удешевлению в современных средствах электронно-вычислительной техники. Поэтому проблемы с недостатком памяти возникают все реже и в ближайшем будущем, по-видимому, перестанут вызывать практические затруднения. С учетом изложенного введенное предположение о бесконечности числа мест для ожидания в системе представляется вполне обоснованным.

- Для модели обслуживания *M/M/1* определим $p_n(t)$ - вероятность того, что в буферной памяти в момент времени *t* находится *n* сообщений. Эта вероятность позволяет определить различные статистические характеристики рассматриваемой СМО (среднее число сообщений в буферной памяти, вероятность превышения заданного уровня заполнения буферной памяти и т. д.).
- Общее выражение для p_n имеет вид $p_n = \rho_n p_0$.

- Очевидно, что должно выполняться соотношение $\rho = \lambda L/C = \lambda/\mu < 1$, чтобы вероятности состояний уменьшались с ростом *n.*
- Справедливость этого соотношения согласуется с нашим интуитивным представлением о том, что среднее число сообщений, поступающих за единицу времени (λ), должно быть меньше пропускной способности системы. Напомним, что объем буферной памяти предполагается неограниченным.

- В модели, учитывающей ограниченность объема буферной памяти при ее переполнении, дальнейшее поступление сообщении блокируется. Следовательно,
- $$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 (1-\rho) \quad (3)$$
- а также
- $p_o = 1-\rho.$ (4)
- Физическая интерпретация из уравнения (4): $\rho = (1 - p_0)$ - вероятность того, что буферная память не пуста.
- Выражение для вероятностей различных состояний системы обслуживания *M/M/1* можно использовать для определения всех интересующих статистических характеристик системы. Например, средняя длина очереди
- $$M(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \rho/(1-\rho) \quad (5)$$

- Средняя длина очереди превышает любые ограничения при ρ -> 1.
- График ее зависимости от ρ в *M/M/1* изображен на рис. 8. При ρ < 0,5 среднее число сообщений в очереди меньше 1. При ρ > 0,5 это число резко возрастет.
- Так, при *M(n)* = 3 коэффициент загрузки ρ = 0,75; при *M(n)* = 4 значение ρ = 0,8;
- при *M(n)* = 9 значение ρ = 0,9 и т. д.

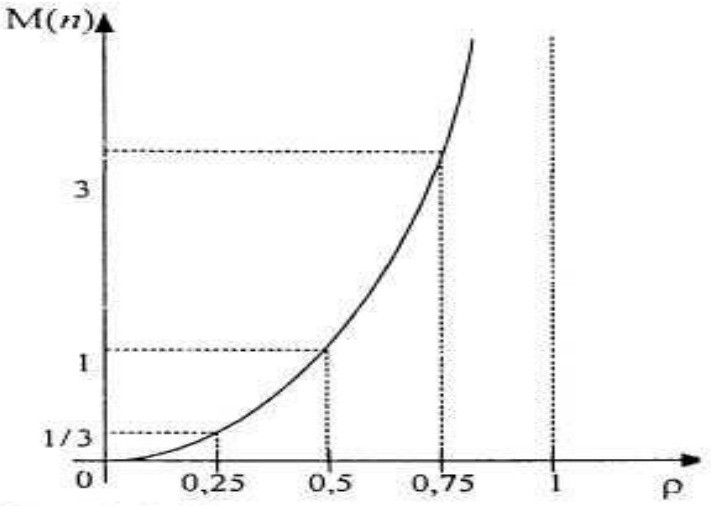


Рис. 8.8. Средняя длина очереди в системе *M*/*M*/1

- Пусть в момент поступления очередного сообщения в буферной памяти уже находятся *n* сообщений. Тогда среднее время пребывания сообщения в концентраторе можно описать соотношением $M(T) = T_{обсл} + T_{ож} = L/C + nL/C.$
- Записанное выражение отражает зависимость между временем задержки и длиной очереди. Используя выражение (5), определяющее среднюю длину очереди, найдем среднее время задержки:

- $M(T) = L/C + L\, M(n)/C = L/(C\,(1-\rho)) = 1/(\mu-\lambda)$ (6)

- Основное предположение, которое было сделано ранее, заключалось в том, что каждый узел сети может моделироваться как система обслуживания *Ml Ml1,* причем каждая система обслуживания статистически не зависит от других. Последнее предположение означает, что длины сообщений выбираются независимо из экспоненциального распределения в каждой узловой точке или точке концентрации. Очевидно, на практике это не так.
- Изучение реальных сетей показывает, что результаты, полученные при этом предположении, хорошо согласуются с практическими результатами.

- Другой, более общей формулой по сравнению с (6) является формула Литтла, соответствующая следующей теореме.
- ***Теорема.*** *Средняя длина очереди в системе равна среднему времени задержки, умноженному на интенсивность входного потока:*

- $M(T)\lambda = M(n)$ (7)

- Эта формула справедлива как для сети очередей, так и для отдельных систем обслуживания. Подставляя (5) в (7), получим формулу (6).