Лекция 1

Задача линейного программирования

Постановка задачи линейного программирования

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n (\le; =; \ge) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n (\le; =; \ge) b_2; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n (\le; =; \ge) b_m; \\ x_j \ge 0 \ \ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

целевая функция

система ограничений

Математическая модель задачи линейного программирования

Постановка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования может быть записана в виде:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max (\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\le ; = ; \ge) b_i ,$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Здесь коэффициенты c_j, a_{ij}, b_i заданные числа, а величины - x_j неизвестные.
Каждое из ограничений системы − одно из трех возможных: ≤, =, ≥.

Решение задачи линейного программирования

Любой набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий системе ограничений называется допустимым решением задачи линейного программирования

Множество всех допустимых решений данной задачи линейного программирования называется допустимой областью.

Допустимое решение, на котором достигается требуемый экстремум целевой функции - называется оптимальным решением данной задачи линейного программирования.

Формы записи задачи линейного программирования

1. Каноническая форма задачи линейного программирования

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Формы записи задачи линейного программирования

2. Векторно-матричная форма

$$Z = < c, x > \to \max\ (\min)$$

$$Ax = b$$

$$x \ge 0$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — матрица коэффициентов левой части системы ограничений

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — столбец коэффициентов правой части системы ограничений

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$ — строка коэффициентов целевой функции

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$ — строка неизвестных

Формы записи задачи линейного программирования

3. Стандартная (симметричная) форма задачи линейного программирования

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min).$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,(\leq; \geq)\,b_i\,,$$

$$x_j \geq 0 \;\; j = \overline{1, n}.$$

Формы записи задачи линейного программирования

Описанные выше формы записи задачи линейного программирования эквивалентны в том плане, что каждая из них может быть приведена к задаче другой формы с помощью несложных преобразований.

Графический метод решения задач линейного программирования

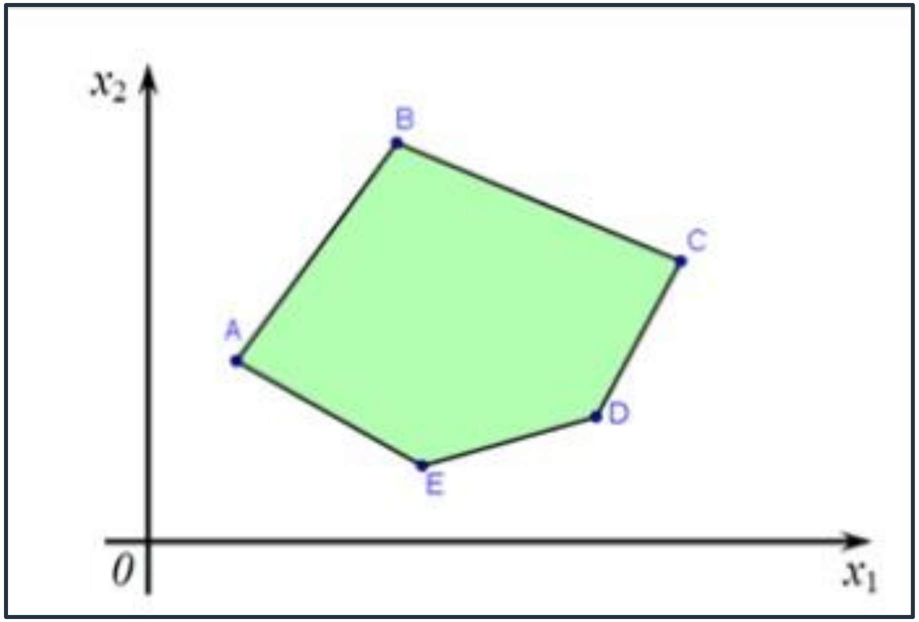
Задача линейного программирования с двумя неизвестными может быть решена графически

Пусть задача линейного программирования задана в виде:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max\ (\min).$$

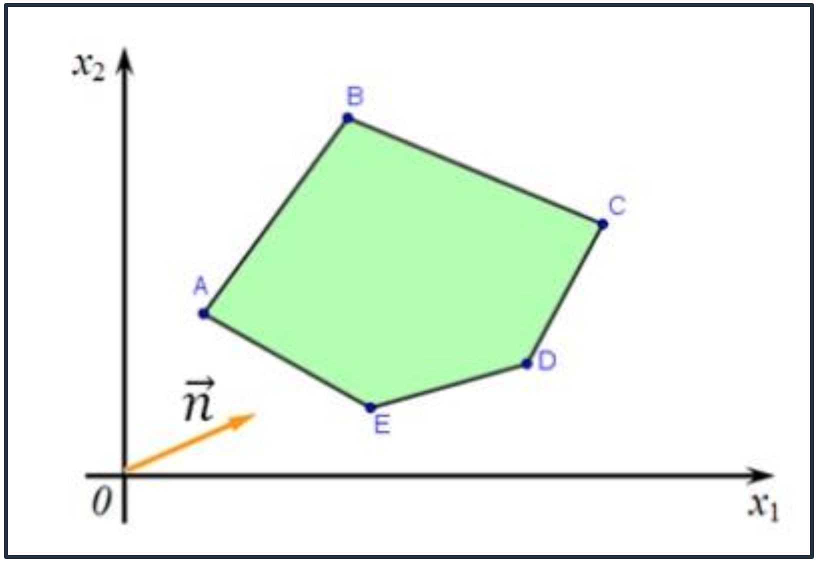
$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 (\leq; =; \geq) b_i; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Построить область допустимых решений (ОДР) в системе координат, заданную системой ограничений

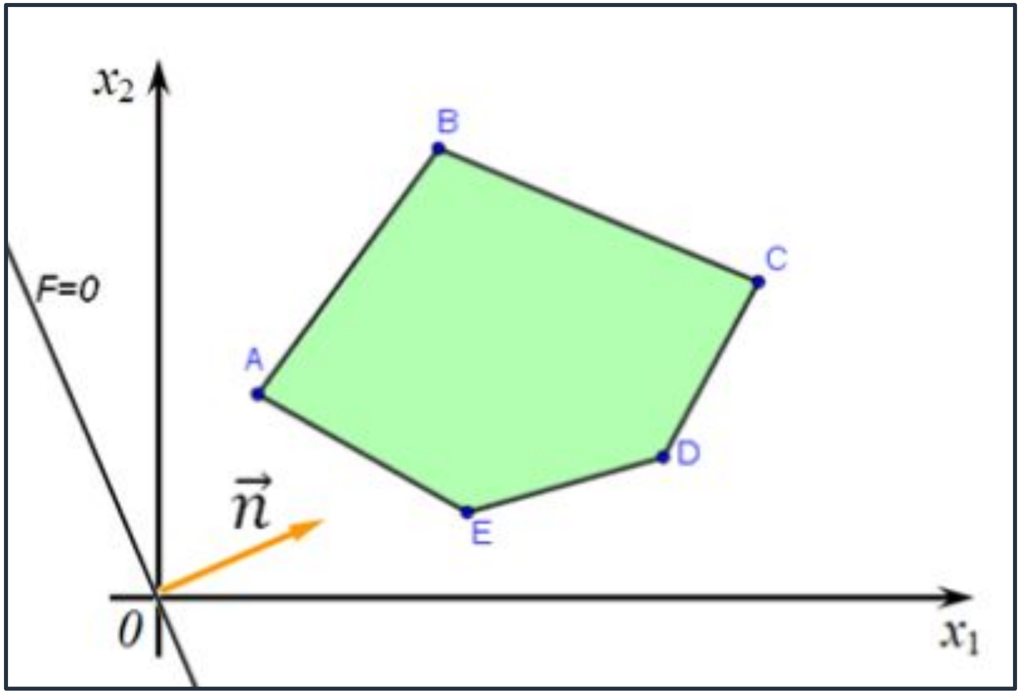


2. Построить градиент целевой функции

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right).$$

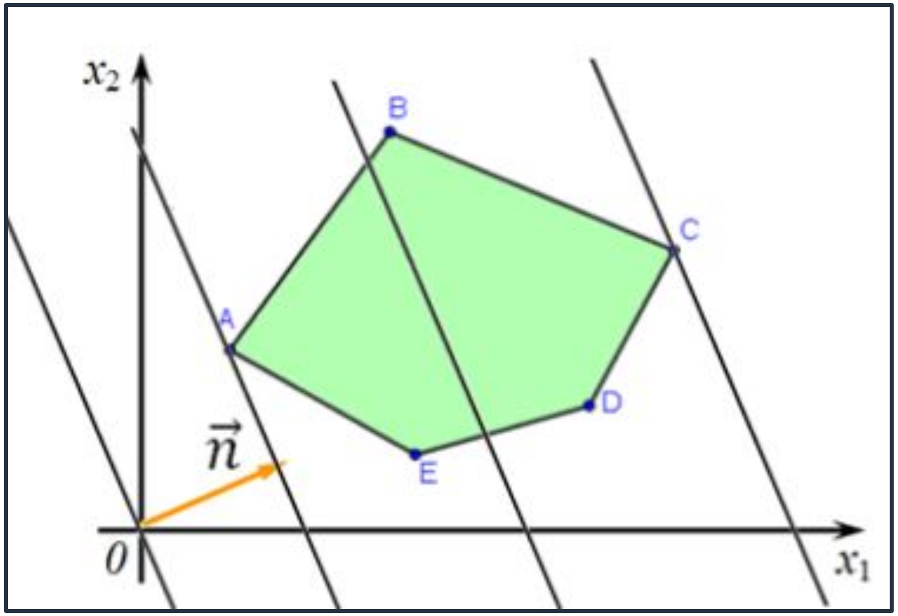


3. Построить линию уровня. Линия уровня строится перпендикулярно вектору -градиенту целевой функции

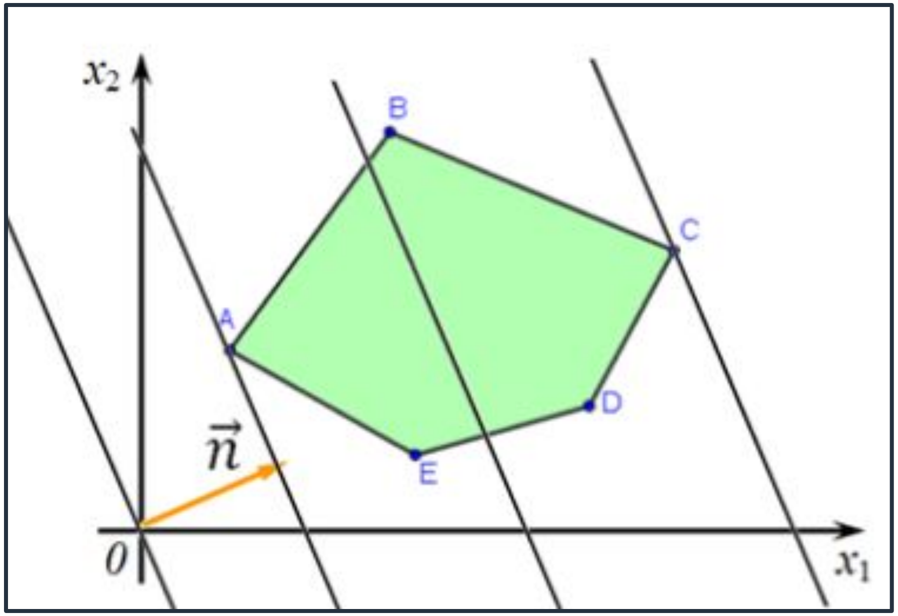


Алгоритм решения ЗЛП графическим методом

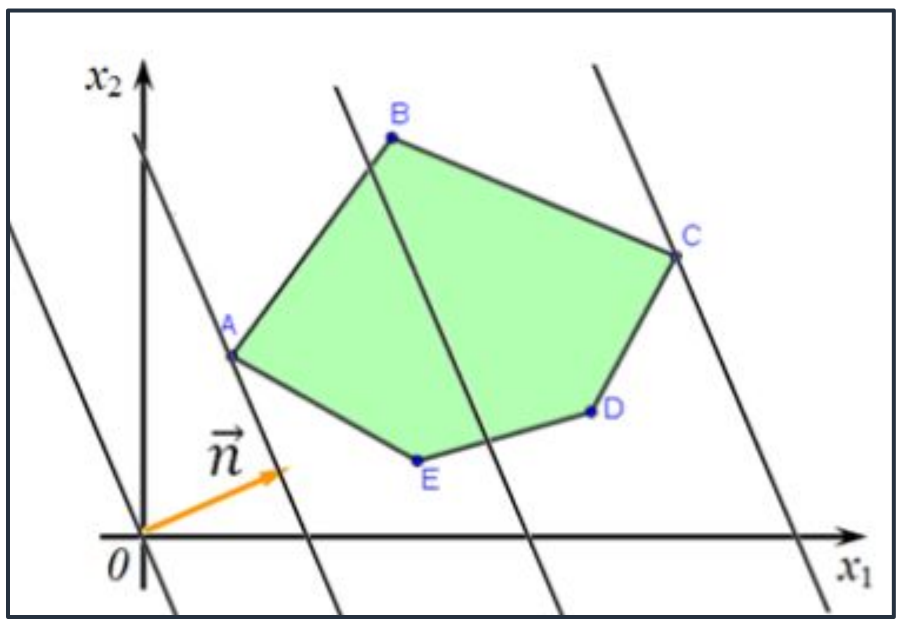
<u>4. Перемещаем линию уровня по направлению вектора - градиента целевой функции,</u> решением задачи на минимум (максимум) является первая (последняя) точка касания линии уровня с ОДР



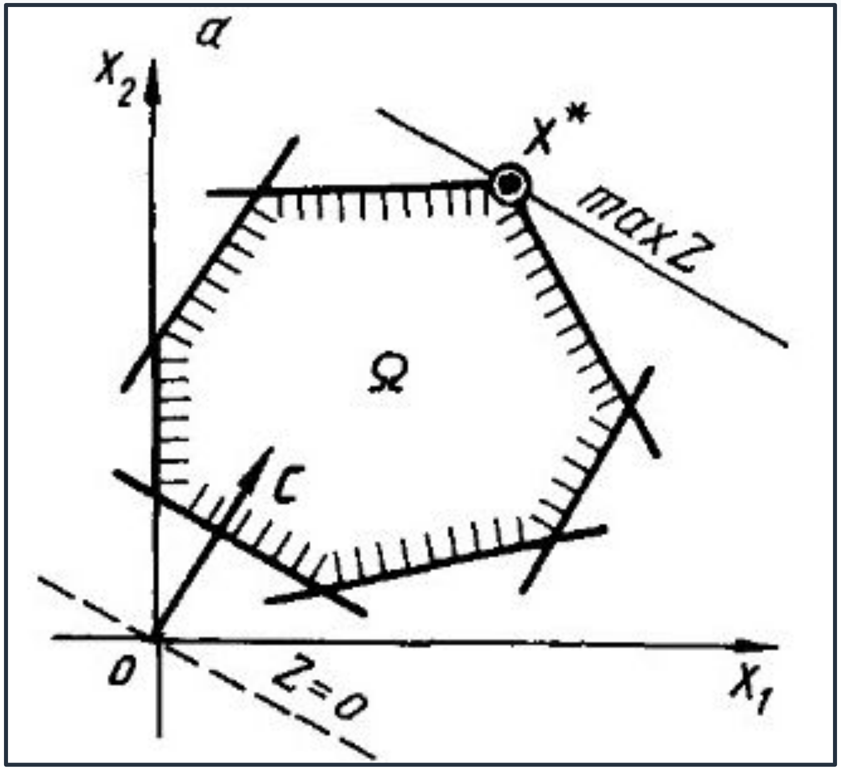
4. Перемещаем линию уровня по направлению вектора - градиента целевой функции, решением задачи на минимум (максимум) является первая (последняя) точка касания линии уровня с ОДР. Находим ее координаты и значение целевой функции в этой точке.



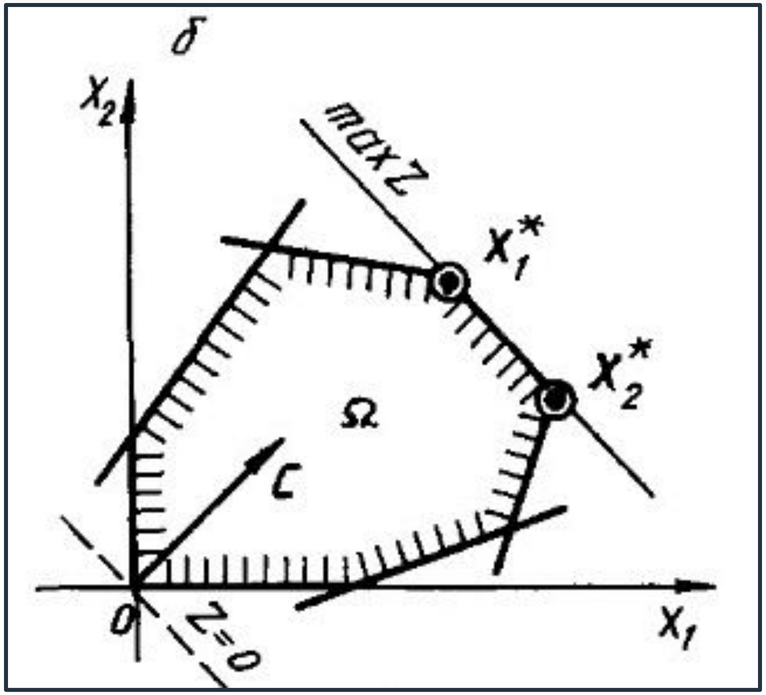
4. Перемещаем линию уровня по направлению вектора - градиента целевой функции, решением задачи на минимум (максимум) является первая (последняя) точка касания линии уровня с ОДР. Находим ее координаты и значение целевой функции в этой точке.



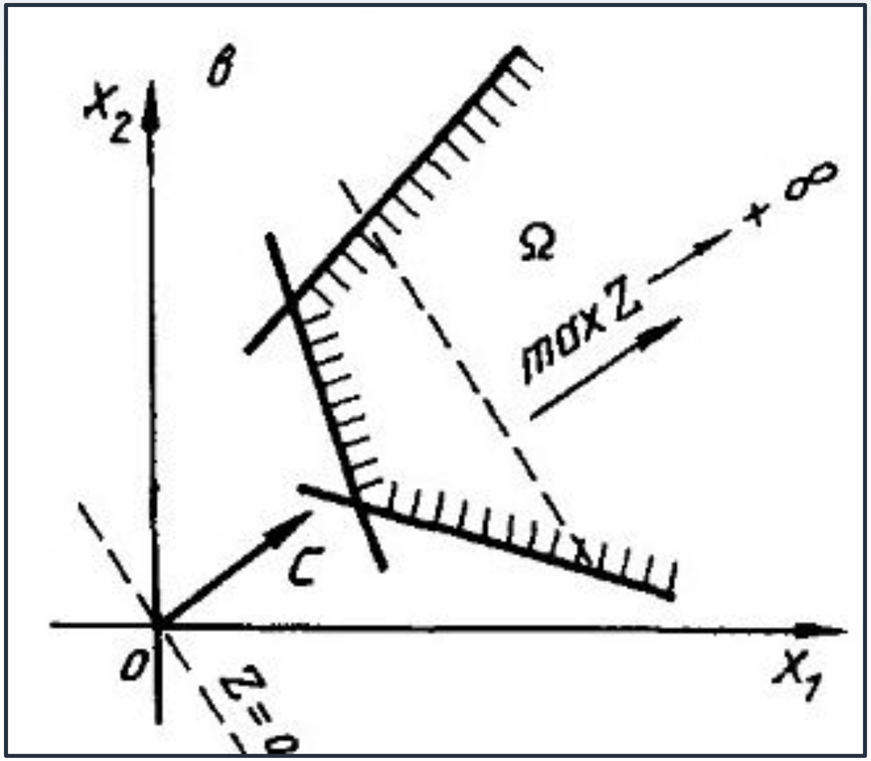
ДОР – ограниченный многоугольник, а оптимальным решением является единственная вершина ОДР.



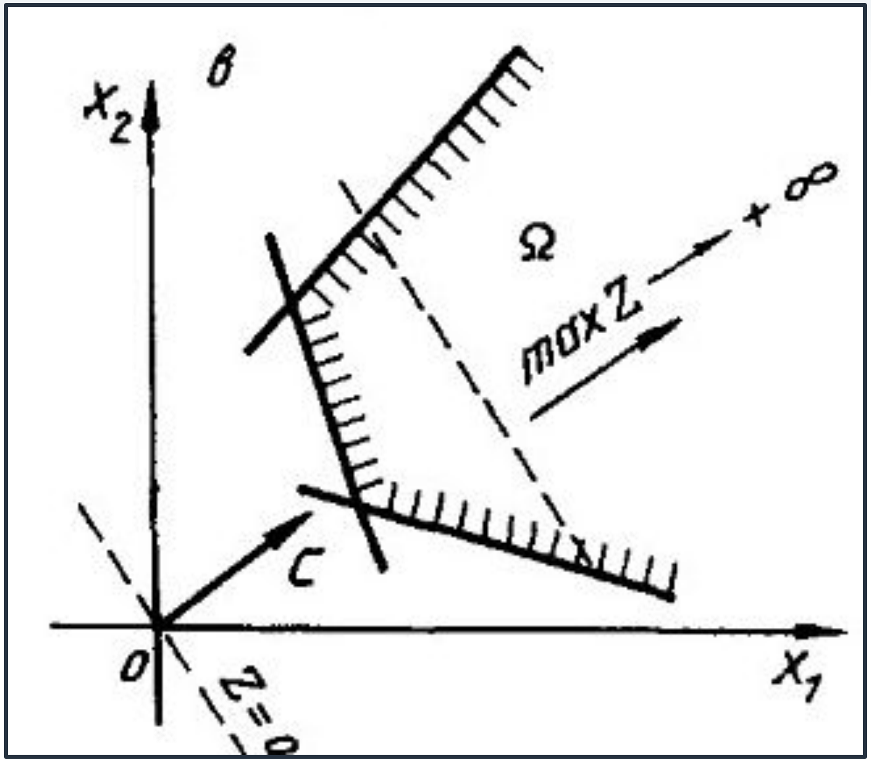
Задача может иметь множество решений – одно из граней является решением задачи.



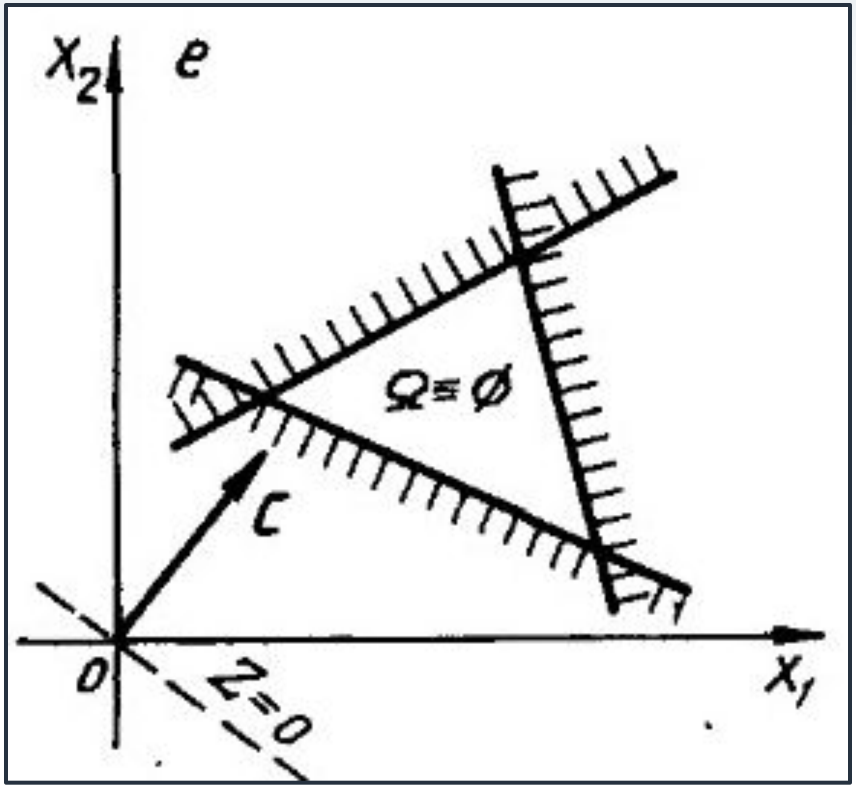
ОДР не ограничена, задача не имеет решений.



ОДР не ограничена, задача единственное решение.



ОДР пусто, задача не имеет решений.



ОДР точка, задача имеет единственное решение.