



Лекция 2

Применение линейного программирования в математических моделях

Преподаватель:

к.э.н., доцент Репина О.М.



Литература

- ▶ *Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — глава 2.*
- ▶ *Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.*
- ▶ *Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.*
- ▶ *Светлов Н.М., Светлова Г.Н. Построение и решение оптимизационных моделей средствами программ MS Excel и XA: Методические указания для студентов экономического факультета / РГАУ – МСХА имени К. А. Тимирязева. М., 2005.*
http://svetlov.timacad.ru/umk1/xa_1.doc



Принцип оптимальности в планировании и управлении

- ▶ Принцип оптимальности предполагает следующее:
 - ▶ наличие определённых ресурсов
 - ▶ наличие определённых технологических возможностей
 - ▶ цель хозяйственной деятельности
 - ▶ извлечение прибыли
 - ▶ удовлетворение потребностей
 - ▶ предотвращение угрозы
 - ▶ накопление знаний
 - ▶ и т.д.
- ▶ Суть принципа:
 - ▶ планировать хозяйственную деятельность таким образом, чтобы при имеющихся ресурсах и технологиях *не существовало* способа достичь цели в большей степени, чем это предусматривает план
- ▶ В полной мере этот принцип может быть реализован только с помощью экономико-математических моделей



Задача линейного программирования

$$\max (\min) c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_2,$$

\dots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, =, \geq \} b_m,$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n$$

- ▶ Это развёрнутая форма записи

Линейная
целевая
функция

Линейные
ограни-
чения

Условия
неотрицательности
переменных

Задача линейного программирования

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1 \text{K } m$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \text{K } n; b_i \geq 0, i = 1 \text{K } m$$

Условия
неотрицательности
переменных

- ▶ Это каноническая форма записи

Линейная целевая
функция

Линейные
ограни-
чения

Любую ЗЛП можно записать в каноническом виде (ограничения – равенства, свободные члены неотрицательны, решается на максимум)



Задача линейного программирования

$$\max \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Условия
неотрицательности
переменных

- ▶ Это матричная форма записи
 - ▶ Она тождественна канонической форме

Линейная целевая
функция

Линейные
ограни-
чения

- 
- ▶ Любой вектор x , удовлетворяющий ограничениям и условиям неотрицательности (безотносительно к целевой функции), называется допустимым решением
 - ▶ Если допустимых решений не существует, говорят, что система ограничений несовместна
 - ▶ Областью допустимых решений (ОДР) называется множество, включающее *все допустимые решения* данной ЗЛП
 - ▶ Допустимое решение x^* , доставляющее наибольшее значение целевой функции среди всех допустимых решений данной ЗЛП, называется оптимальным решением
 - ▶ часто его называют просто решением ЗЛП



3.2.

▶ ЗЛП может:

- ▶ не иметь ни одного оптимального решения
 - ▶ допустимой области не существует - система ограничений не совместна

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid x_1 + 5x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

Компактная запись

- ▶ допустимая область существует, но не ограничивает целевую функцию

$$z = \max(2x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.1x_2 \geq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

- ▶ иметь одно оптимальное решение

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

$$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50$$

- ▶ иметь бесконечно много оптимальных решений

$$z = \max(x_1 + x_2 \mid 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$$

$$x_1 = 50, x_2 = 0; z = 50 \dots x_1 = 0, x_2 = 50; z = 50$$



Симплексный метод

- ▶ Исходные условия применения симплексного метода
 1. ЗЛП записана в канонической форме
 2. Её ограничения линейно независимы
 3. Известно *опорное решение*, в котором:
 - ▶ имеется не более m ненулевых переменных
 - ▶ задача содержит n переменных и m ограничений
 - ▶ все ограничения выполняются
 4. m переменных, называемых базисными (среди которых все ненулевые) выражены через:
 - ▶ $n-m$ переменных, называемых свободными (каждая равна нулю)
 - ▶ свободный член ограничения
 5. Результат этой процедуры записан в начальную (первую, исходную) симплексную таблицу



Метод потенциалов

Используется для решения логистических и транспортных задач.

Сущность транспортной задачи линейного программирования:

В различных местах отправки имеется однородный груз, который требуется доставить в несколько пунктов назначения. Известно, сколько груза отправляется из каждого пункта и сколько груза должно поступить в пункт назначения. Причём безразлично, какой именно отправитель будет доставлять груз тому или иному получателю. Требуется так организовать перевозки, чтобы обеспечить минимальный общий пробег груза, т. е. минимизировать затраты на транспортировку. Экономико-математическая модель транспортной задачи представляется обычно в виде транспортной таблицы или матрицы



Спасибо за внимание!