



МЕТОДЫ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

ТПР

Лекция № 2-10



Содержание:

- 1. Задачи с булевыми переменными
 - 1.1. Фронтальный спуск по дереву ветвлений
 - 1.2. Поиск с возвратом (алгоритм Балаша)
- 2. Многокритериальные задачи
 - 2.1. Поиск величин эталонов методами типа ветвей и границ.
 - 2.2. Формальная постановка задачи.
 - 2.3. Решение многокритериальной задачи методом типа ветвей и границ.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МЕТОДОВ ТИПА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

- 1. Метод вычисления оценки таков, что по мере спуска по дереву ветвлений оценка не улучшается.
- 2. Спуск по дереву ветвлений прекращается, если выбранная вершина обладает следующими свойствами:
 - ❖ оценка этой вершины является наилучшей;
 - ❖ существует возможность определить значения всех переменных, причем оценка остается неизменной.

Часть 1

- Решение задач с булевыми переменными



- 1.1. Фронтальный спуск по дереву ветвлений

Содержательное описание алгоритма

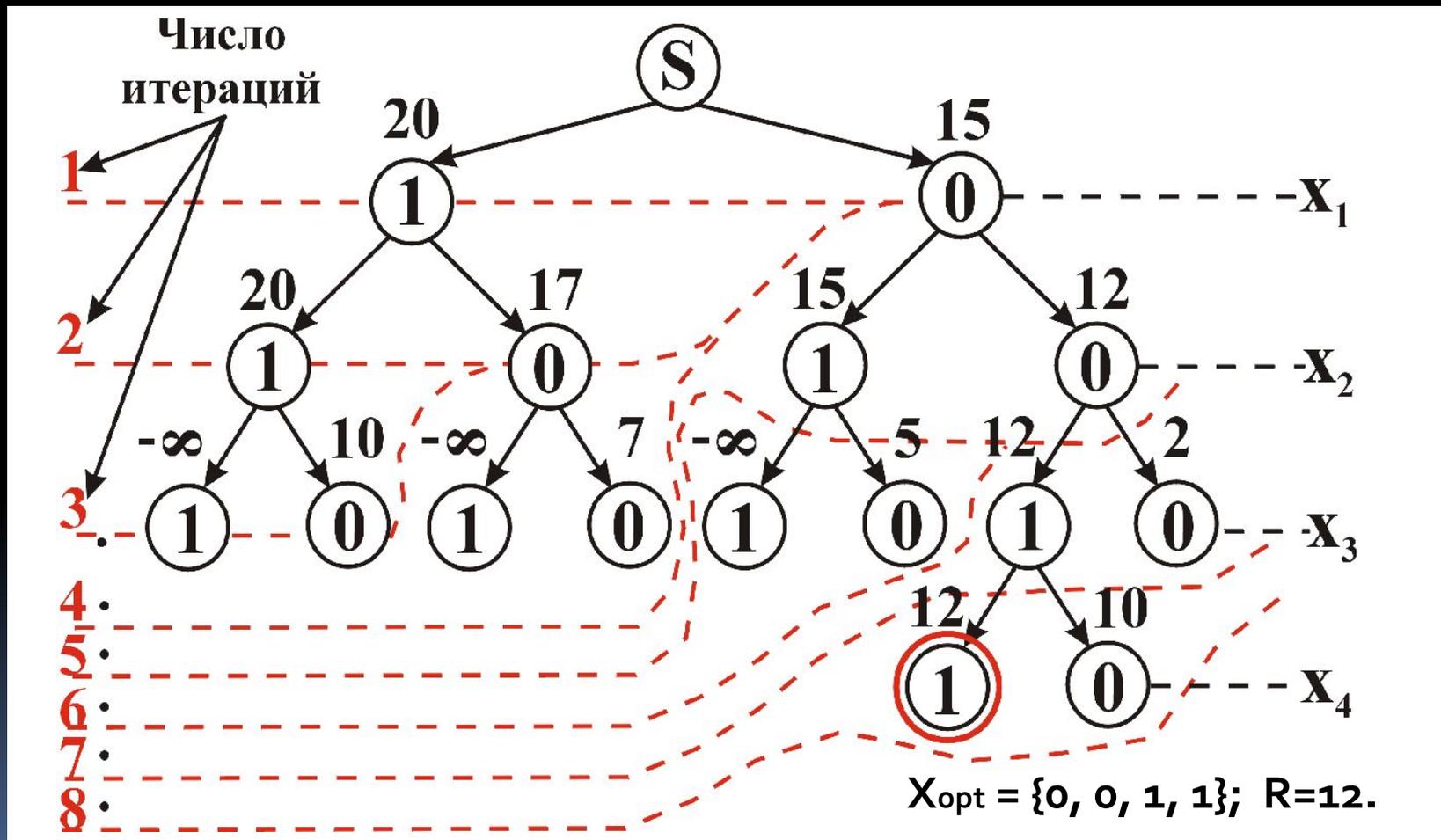
- **Шаг 1.** На построенной части дерева ветвлений выбирается вершина с наилучшей оценкой, принадлежащая i -у ярусу.
- **Шаг 2.** Если $i=n$, где n – число переменных, то перейти к шагу 4, в противном случае – к шагу 3.
- **Шаг 3.** В базис частичного плана, соответствующего выбранной вершине, вводится $(i+1)$ -я переменная и вычисляются соответствующие оценки. Перейти к шагу 1.
- **Шаг 4.** Конец алгоритма. Оценка выбранной на предыдущем шаге вершины является оптимальным значением целевой функции.

ПРИМЕР 1

- Пусть задана задача о ранце вида:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_i = 1,0; i = 1,2,\dots,4 \end{cases}$$

ДЕРЕВО ВЕТВЛЕНИЙ



Достоинства и недостатки фронтального спуска по дереву ветвлений:

- **Достоинства:** шанс на неполный перебор, первый же полный допустимый план является глобально оптимальным.
- **Недостатки:** по мере спуска по дереву ветвлений растет число оценок, хранимых в памяти и затраты времени на их сравнение при выборе направления спуска.

-

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь фронтальным спуском решить задачу вида:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 10; \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 8; \\ x_i = 1,0; \quad i = 1,2,\dots,4. \end{cases}$$



1.2. Поиск с возвратом

Содержательное описание

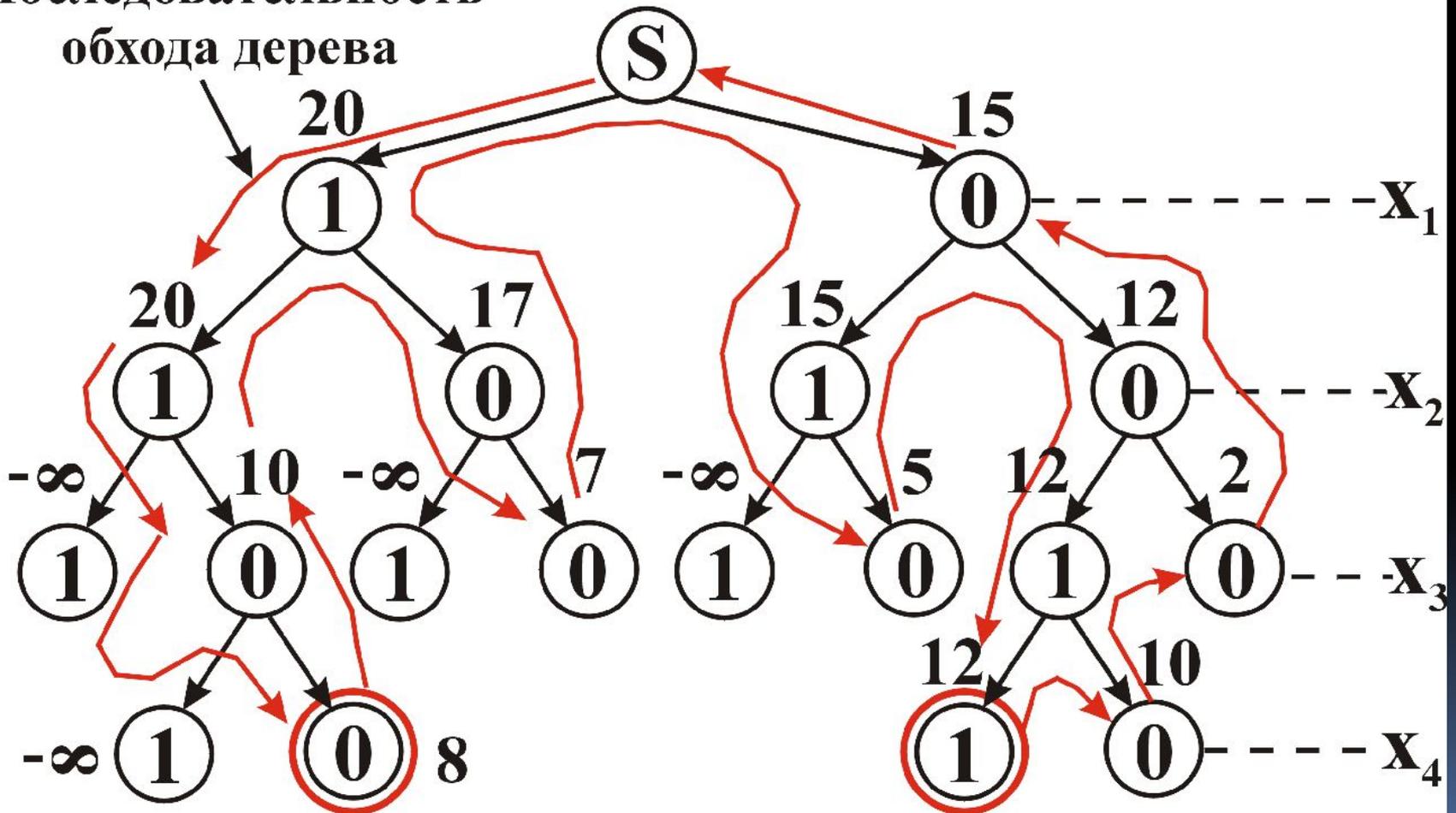
- **Шаг 1.** $R = \text{плохое значение}$ **алгоритма**
- **Шаг 2.** $i = 1$
- **Шаг 3.** $x_i = 1$
- **Шаг 4.** Вычисляется оценка рекорда F
- **Шаг 5.** Если $F < R$, то перейти к шагу 6, нет – к шагу 9
- **Шаг 6.** Если все ограничения удовлетворяют, то перейти к шагу 7, нет к шагу 9
- **Шаг 7.** Если $i = n$, то перейти к шагу 8, нет – к шагу 13
- **Шаг 8.** $R = F$, печать R и вектора
- **Шаг 9.** Если $x_i = 1$, то перейти к шагу 10, нет – к шагу 13
- **Шаг 10.** $x_i = 0$, перейти к шагу 4
- **Шаг 11.** Если $i = 1$, то перейти к шагу 14, нет к шагу 12.
- **Шаг 12.** $i = i - 1$, перейти к шагу 9.
- **Шаг 13.** $i = i + 1$, перейти к шагу 3.
- **Шаг 14.** Конец алгоритма. Последние выданные на печать значения R и x , оптимальны.

ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 10; \\ x_i = 1,0; \quad i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Построение дерева ветвлений

Последовательность
обхода дерева



САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь методом типа ветвей и границ, реализующим поиск с возвратом, решить задачу вида:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2x_4 \rightarrow \max; \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 10; \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 8; \\ x_i = 1,0; \quad i = 1,2,\dots,4. \end{cases}$$



- ЧАСТЬ 2

- Решение многокритериальных задач методами типа ветвей и границ

Основные положения

1. Свертка критериев с помощью эталонов позволяет получить новую целевую функцию вида:

$$\varphi = \sqrt{\sum_i \left(z_i - \frac{F_i - F_{i \min}}{F_{i \max} - F_{i \min}} \right)^2},$$

где F_i - i -я целевая функция, $z_i = 1$, если $F_i \rightarrow \mathit{max}$,
и $z_i = 0$, если $F_i \rightarrow \mathit{min}$.

ПРИМЕР 2

- Пользуясь описанным выше методом свертки, решить многокритериальную задачу с булевыми переменными вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i: x_i = 1, 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Условия свертки

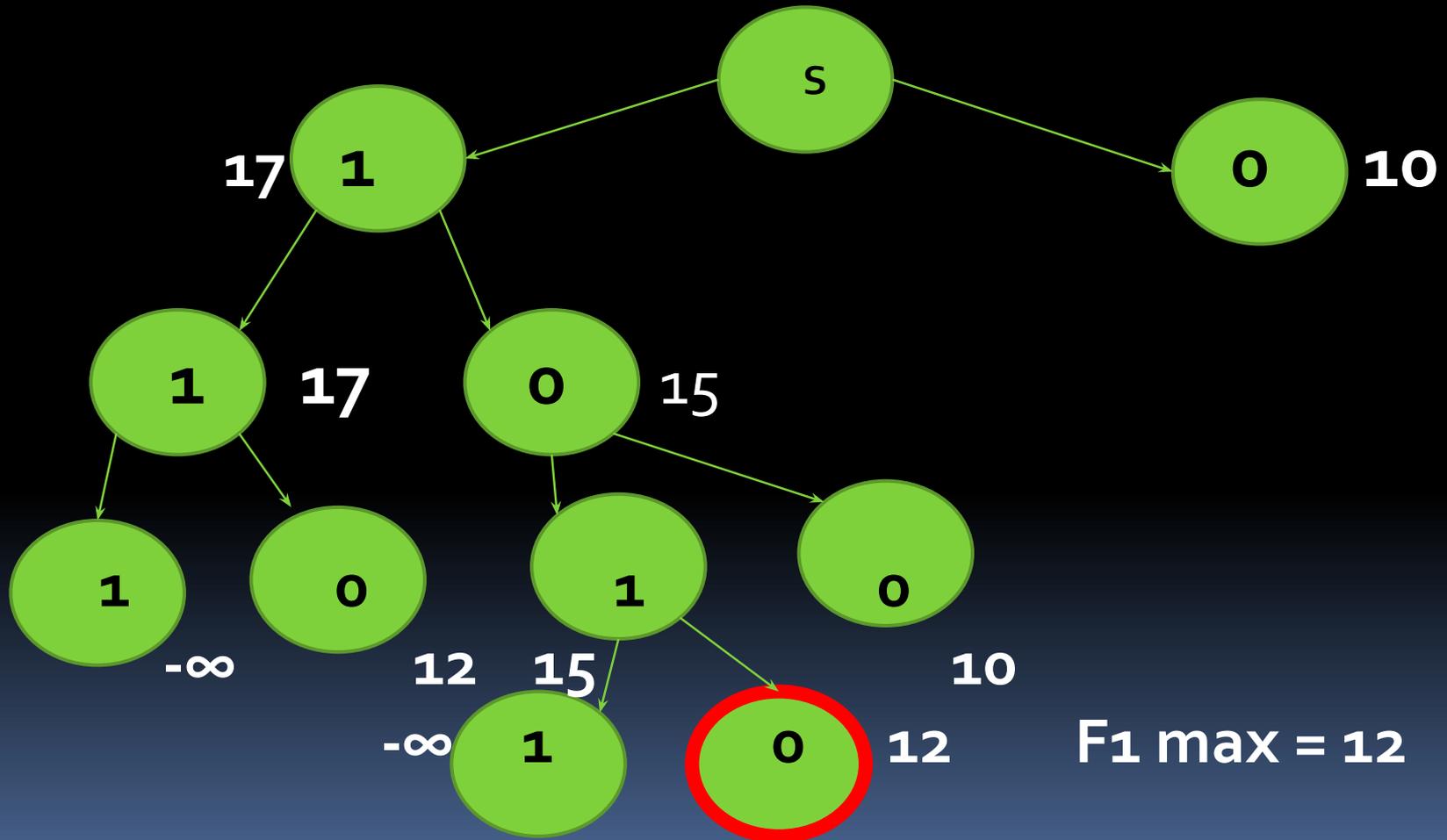
- Для того, чтобы преобразовать (1) в однокритериальную задачу, следует определить максимальные и минимальные значения F_1 и F_2 .

Поиск максимальной величины

F_1

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (2)$$

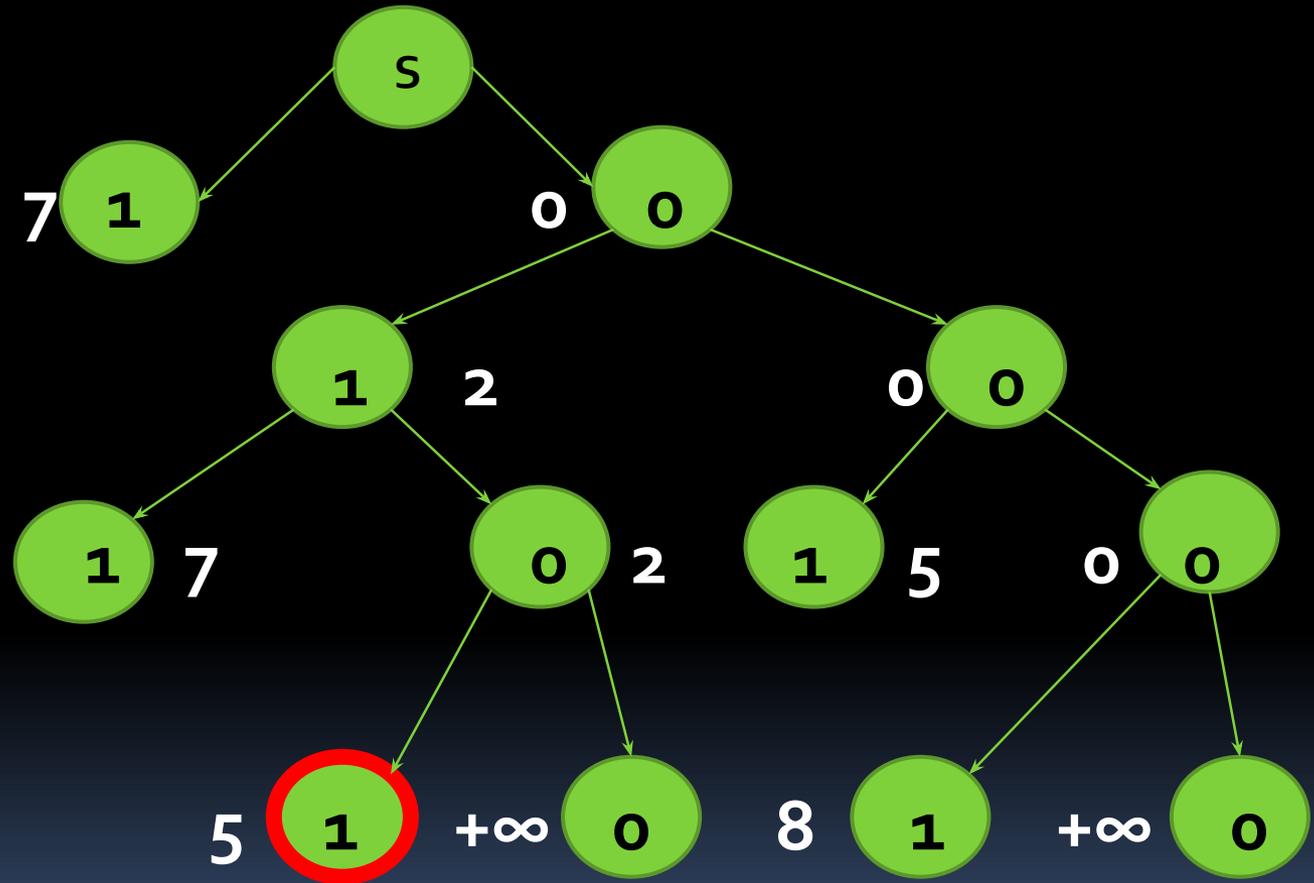
Решение задачи (2) методом типа ветвей и границ



Поиск минимальной величины F_1 сводится к решению задачи (3):

$$\begin{cases} F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи (3) методом типа ветвей и границ



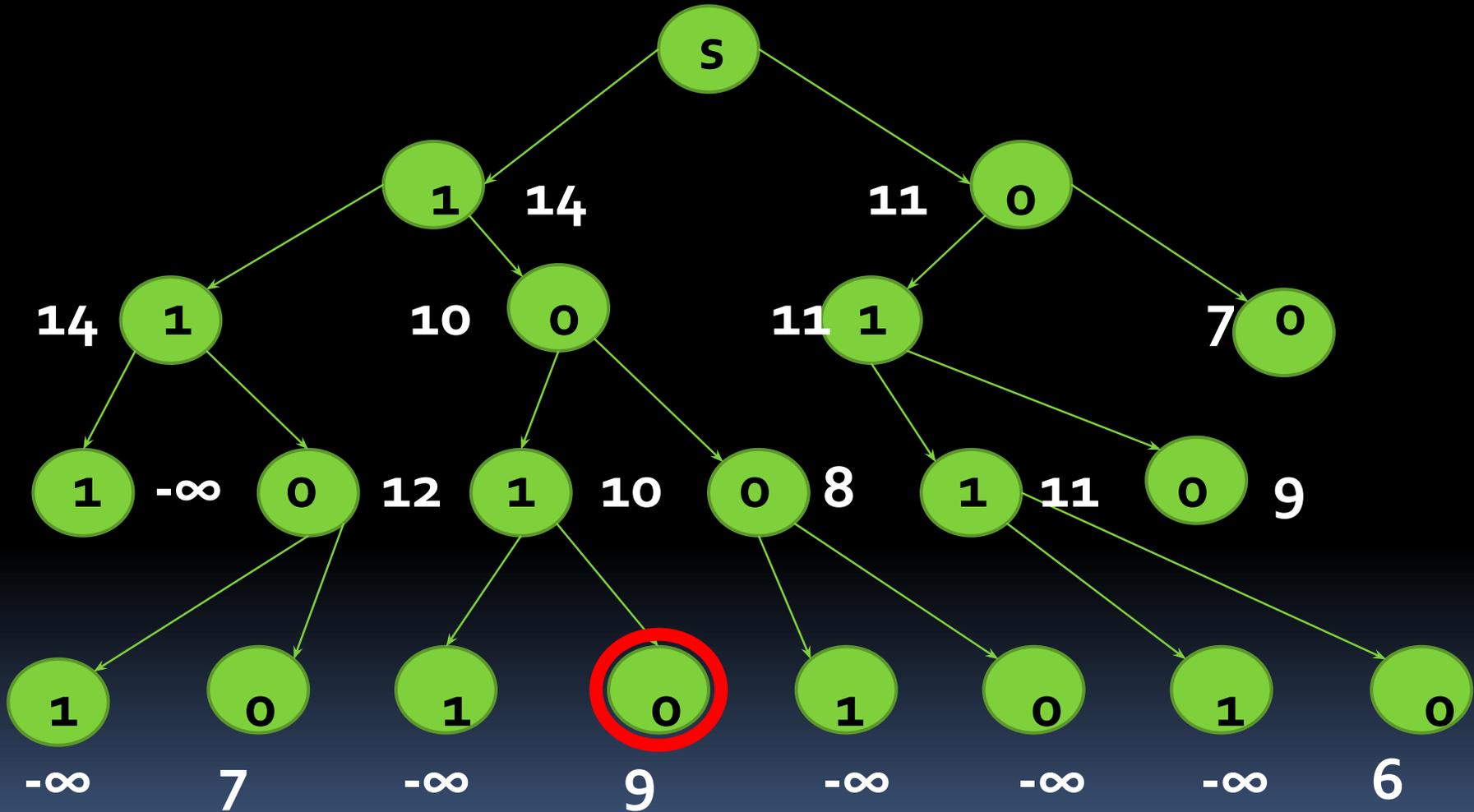
$F_1 \min = 5.$

Поиск максимальной величины

F_2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i: x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Решение задачи (4) методом типа ветвей и границ

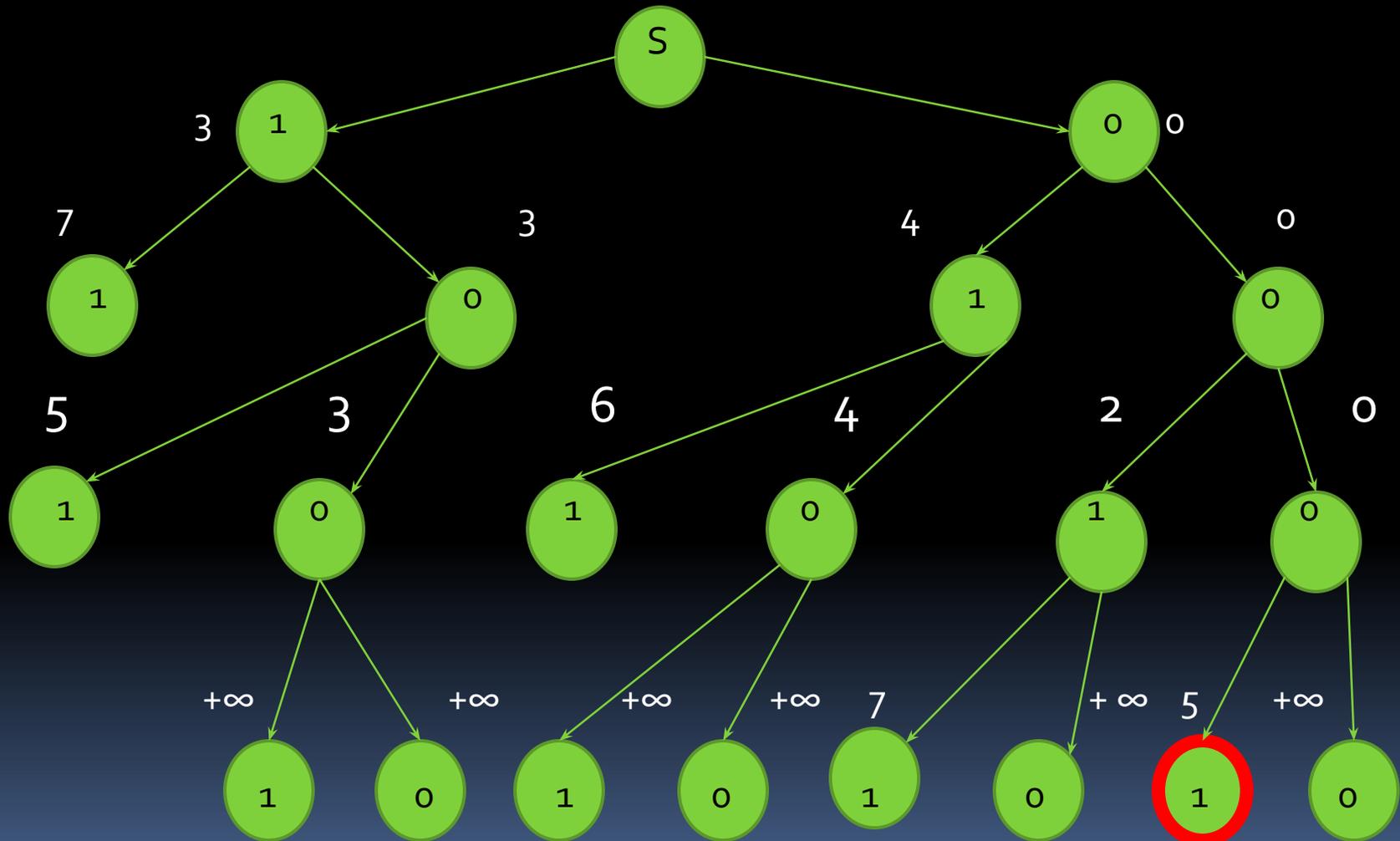


F2 max = 9

Поиск минимальной величины F_2

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Решение задачи (5) методом типа ветвей и границ



F2 min = 5

Использование эталонов для преобразования(1)
в однокритериальную задачу

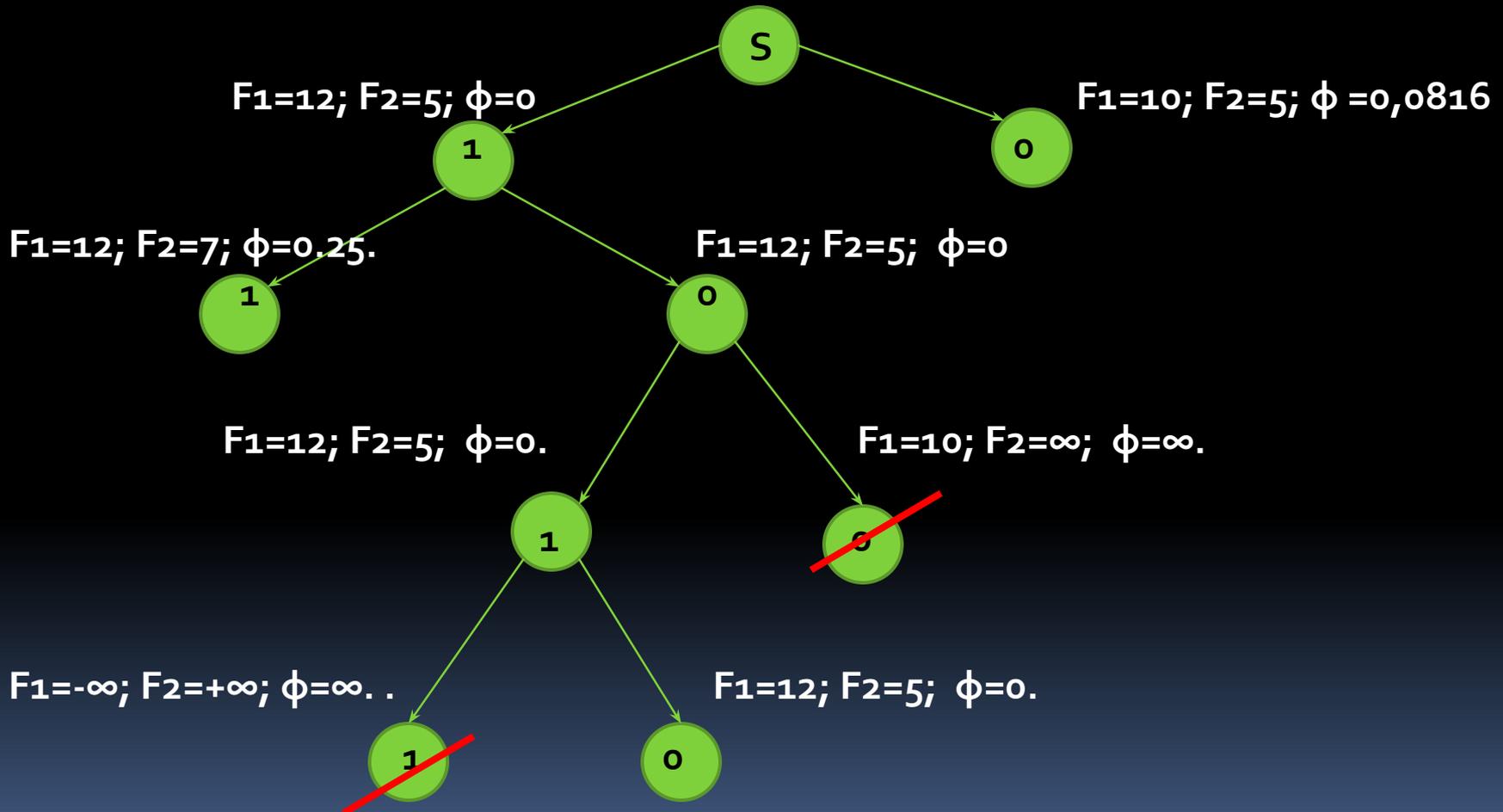
$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \left(1 - \frac{F_1 - 5}{12 - 5}\right)^2 + \left(0 - \frac{F_2 - 5}{9 - 5}\right)^2 \rightarrow \min; \\ F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1, 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вид системы (6) после

преобразований

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \left(\frac{12 - F_1}{7} \right)^2 + \left(\frac{F_2 - 5}{4} \right)^2 \rightarrow \min; \\ F_1 = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4; \\ F_2 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 8x_4 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Решение задачи (7) методом ветвей и границ



$$X_{opt} = \{1, 0, 1, 0\}; F_1 = 12; F_2 = 5.$$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Решить, пользуясь рассмотренной выше технологией, систему вида:

$$\begin{cases} F_1 = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \rightarrow \max; \\ F_2 = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 8; \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 8; \\ \forall i : x_i = 1,0. \end{cases} \quad (8)$$