ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ НА БИХРОМАТИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Лекция 2.7

СОДЕРЖАНИЕ

- **Часть 1. Общие положения, обозначения и определения**
- **Часть 2. Задача 1 о назначениях – минимизация затрат**
- **Часть 3. Поиск стратегии, минимизирующей стоимость выполнения плана при ограничении на время его выполнения**
- **Часть 4. Поиск стратегии, обеспечивающей минимизацию времени выполнения плана при ограничении на фонд заработной платы**
- **Часть 5. Многокритериальная задача о назначениях.**

Часть 1

Общие положения, определения и обозначения

Обозначения и определения

- X – множество вершин неориентированного графа G(X,***U***);
- $X' \subset X$ - «левое» подмножество вершин;
- $X'' \subset X$ - «правое» подмножество вершин (X’+X”=X);
- ***U*** – множество ребер графа G(X,***U***);
- r(i,j) – вес ребра $(i, j) \in U$.
- **Содержательная постановка задачи о максимальном паросочетании:** На множестве ребер ***U*** графа G(X,***U***) выделить подмножество $U' \subset U$, такое, что:

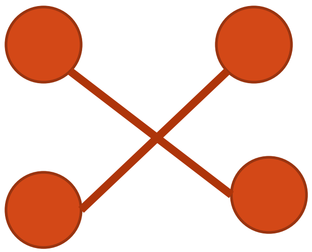
- существует не более одного ребра, принадлежащего ***U’*** и инцидентного каждой вершине подмножества X’;

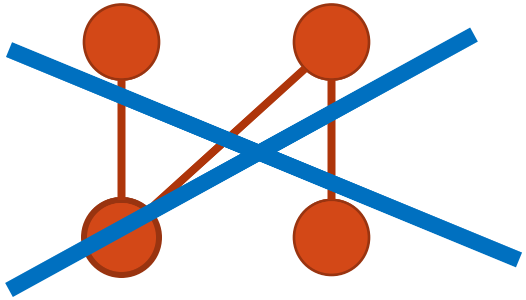
- существует не более одного ребра принадлежащего ***U’*** и , инцидентного каждой вершине подмножества X”;

- мощность множества ***U’*** максимальна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

- Подмножество U' ребер называется ***паросочетанием***, если любые два ребра из него не имеют общей вершины.

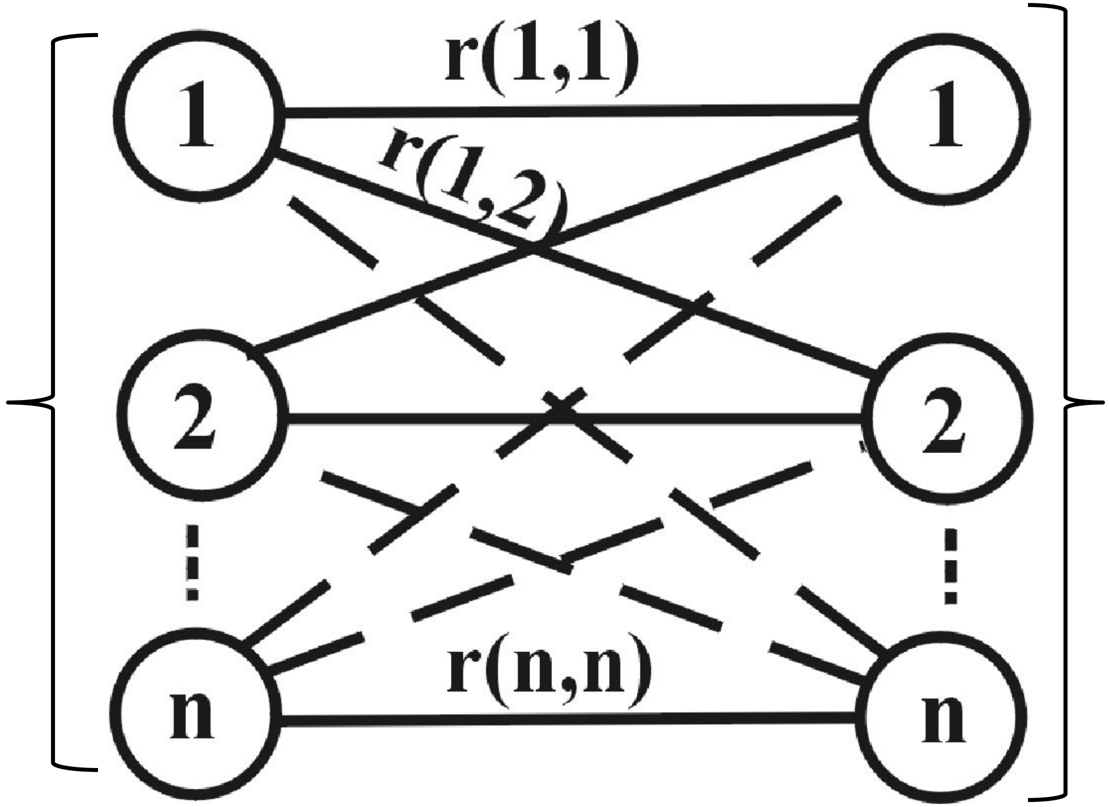




ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ

X’

X”



Формальная постановка задачи поиска максимального паросочетания

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) \to \max; \quad \text{- целевая функция ;} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) \le 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) \le 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n\,, \end{cases}$$

$$\text{где:} \quad \begin{cases} y(i,j) = 1 \Rightarrow (i,j) \in U'; \\ y(i,j) = 0 \Rightarrow (i,j) \notin U'. \end{cases}$$

Часть 2

Задача 1 о назначениях – минимизация затрат

Задача о назначениях –минимизация затрат

Заданы n работ и n рабочих, причем известна стоимость r(i, j) выполнения i-м рабочим j-й работы. Требуется распределить работы между рабочими т.о., чтобы:

1. Все работы были выполнены;

2. Все рабочие были заняты;

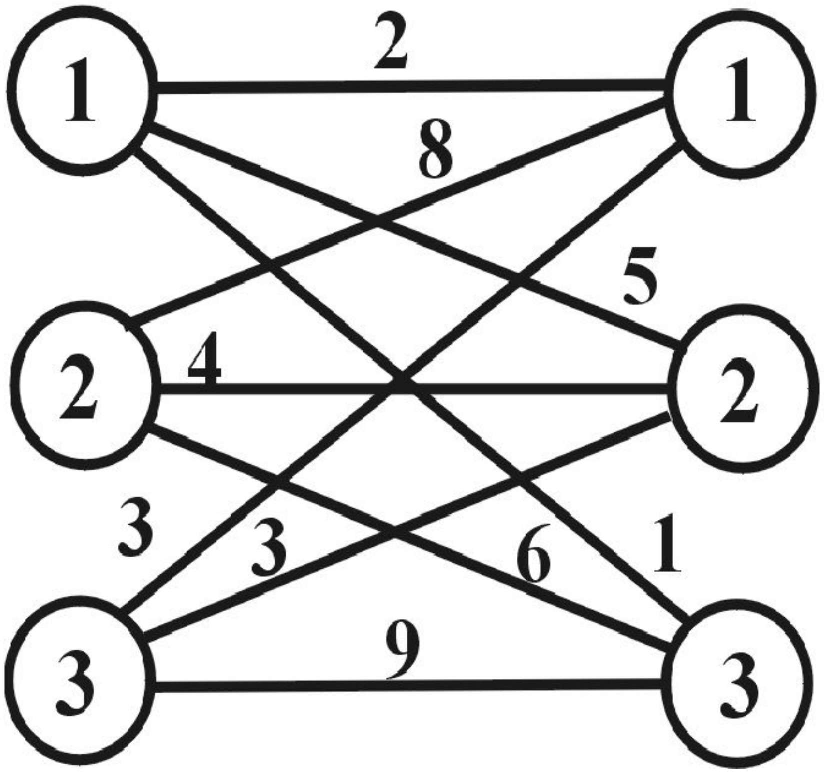
3. Суммарные задачи на выполнение всего цикла работ были минимальны.

Формальная постановка задачи минимизации затрат

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r(i,j)\, y(i,j) \to \min; & \text{- целевая функция - минимизация затрат;} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n; & \text{- условие выполнения всех работ;} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n; & \text{- условие загруженности всех рабочих;} \\ y(i,j) = 1,0; \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,n & \text{– дискретность переменных} \end{cases}$$

Примечание: если i-й рабочий не может делать j-ю работу, то ***r(i,j)***$=\infty$

Форма представления исходных данных (пример для случая n=3)



	1	2	3
1	2	5	1
2	8	4	6
3	3	3	9

Алгоритм 1

- **Шаг 1.** $i = 1$
- **Шаг 2.** В i – ой строке матрицы М выбирается элемент, вес которого равен $Q = \min M(i,j)$ и уменьшаем вес каждого элемента этой строки на Q.
- **Шаг 3.** $i = i + 1$
- **Шаг 4.** Если $i>n$, то перейти к **Шагу 5**, нет к **Шагу 2.**
- **Шаг 5.** $j = 1$
- **Шаг 6.** В j –ом столбце матрицы М выбирается элемент, вес которого равен $D = \min M(i,j)$.
- **Шаг 7.** Вес каждого элемента j –го столбца уменьшается на величину D.

Алгоритм 1 (продолжение)

- **Шаг 8.** $j=j+1$.
- **Шаг 9.** Если $j>n$, то перейти к **Шагу 10**, нет - к **Шагу 6.**
- **Шаг 10.** Нули матрицы вычеркиваются **минимальным** числом линий L, проводимых по строкам и столбцам матрицы.
- **Шаг 11.** Если $L = n$, то перейти к **Шагу 14,** в противном случае – к **Шагу 12.**
- **Шаг 12.** На множестве **неперечеркнутых** элементов матрицы М выбирается тот, вес которого **минимален** и равен W.
- **Шаг 13.** Вес **неперечеркнутых** элементов матрицы **уменьшаем** на W, а **перечеркнутых дважды – увеличиваем** на W. Перейти к **Шагу 8.**
- **Шаг 14.** Конец алгоритма. На множестве нулей полученной матрицы есть оптимальное назначение.

Пример 1 (n=5)

	1	2	3	4	5
1	1	4	6	9	5
2	2	5	7	6	9
3	3	10	13	7	8
4	4	11	9	11	12
5	7	8	10	8	9

Рис. 1

1	4	6	9	5
2	5	7	6	9
3	10	13	7	8
4	11	9	11	12
7	8	10	8	9

Рис. 2

$Q_1 = 1$
$Q_2 = 2$
$Q_3 = 3$
$Q_4 = 4$
$Q_5 = 7$

0	3	5	8	4
0	3	5	4	7
0	7	10	4	5
0	7	5	7	8
0	1	3	1	2
0	1	3	1	2

Рис. 3

0	2	2	7	2
0	2	2	3	5
0	6	7	3	3
0	6	2	6	6
0	0	0	0	0

Рис. 4

L = 2
W = 2

0	0	0	5	0
0	0	0	1	3
0	4	5	1	1
0	4	0	4	4
0	0	0	0	0

Рис. 5

L = 5

1	4	6	9	5
2	5	7	6	9
3	10	13	7	8
4	11	9	11	12
7	8	10	8	9

Рис. 6

R = 5 + 5 + 3 + 9 + 8 = 30

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

3	7	5	9	3	7	12
8	2	12	31	7	8	9
9	14	1	3	2	4	6
6	∞	15	8	6	7	16
11	3	9	7	8	10	11
4	14	∞	6	∞	9	5
5	6	7	10	9	4	∞

Часть 3

Поиск стратегии, минимизирующей стоимость выполнения плана при ограничении на время его выполнения

Задача 2: минимизация стоимости выполнения работ при ограничении на время их выполнения

Задача отличается от ранее рассмотренной тем, что кроме стоимости известно время выполнения каждым рабочим каждой работы. Если i-й рабочий не может выполнять j-ю работу, то:

- где: $$r_1(i, j) = r_2(i, j) = \infty,$$
- $r_1(i,j)$ – стоимость выполнения i-ым рабочим j-ой работы.
- $r_2(i,j)$ – время выполнения i-ым рабочим j-ой работы
- T – плановый период.

Формальная постановка задачи 2

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_1(i,j)\, y(i,j) \to \min; & \text{- целевая функция - минимизация затрат} \\ \max_i \max_j r_2(i,j)\, y(i,j) \le T; & \text{- ограничение на время выполненя плана T} \\ \sum_{i=1}^{n} y(i,j) = 1;\; j = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждая работа должна быть выполнена} \\ \sum_{j=1}^{n} j(i,j) = 1;\; i = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждый рабочий должен иметь работу} \\ y(i,j) = 1,0;\; i = 1,2,\ldots,n.\;\; j = 1,2,\ldots,n; & \text{- булевы переменные} \end{cases}$$

Решение задачи 2

- Решение задачи 1 сводится к решению задачи 1 - «классической» задачи о назначениях, если исходную матрицу М преобразовать в М' следующим образом:

$$\forall (i, j) \in U : r_2(i, j) > T \Rightarrow r_1(i, j) = \infty.$$

- Иными словами считаем, что если время выполнения i-м рабочим j-й работы больше Т, то
 i-й рабочий не может делать j-ю работу.

- После этого матрица М', содержащая лишь $r_1(i,j)$, используется для решения «классической» задачи о назначениях.

ПРИМЕР 2

Решить задачу с вектором критериев на бихроматическом графе, заданном (n x n) матрицей М, если n = 4, в верхней части каждой ячейки *(i,j)* матрицы М приведены величины $r_1(i,j)$, а в нижней – $r_2(i,j)$. Верхняя граница времени выполнения всех работ Т = 12.

ПРИМЕР 2 (продолжение)

$$
M = \begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\multirow{2}{*}{1} & 5 & 12 & 6 & 7 \\
 & 8 & 5 & 14 & 9 \\
\hline
\multirow{2}{*}{2} & 12 & 3 & 4 & 11 \\
 & 4 & 19 & 16 & 9 \\
\hline
\multirow{2}{*}{3} & 8 & 10 & 5 & 6 \\
 & 8 & 9 & 12 & 10 \\
\hline
\multirow{2}{*}{4} & 3 & 9 & 8 & 12 \\
 & 20 & 12 & 15 & 7 \\
\hline
\end{array}
\;\longrightarrow\;
M' = \begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 5 & 12 & \infty & 7 \\
2 & 12 & \infty & \infty & 11 \\
3 & 8 & 10 & 5 & 6 \\
4 & \infty & 9 & \infty & 12 \\
\hline
\end{array}
$$

$r_1\,(1,4)$

$r_2\,(1,4)$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
5 & 12 & \infty & 7 \\
\hline
12 & \infty & \infty & 11 \\
\hline
8 & 10 & 5 & 6 \\
\hline
\infty & 9 & \infty & 12 \\
\hline
\end{array}
$$

- оптимальное решение.

$R = 5 + 11 + 5 + 9 = 30$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

24 12	30 6	14 22	10 26
18 18	20 16	15 21	28 18
11 24	17 19	16 19	27 10
9 20	12 24	5 30	28 8

$$\begin{cases} T \le 20; \\ C \to \min. \end{cases}$$

Часть 4

Поиск стратегии, обеспечивающей минимизацию времени выполнения плана при ограничениях на фонд заработной платы

ЗАДАЧА 3: Минимизация времени выполнения плана при ограничениях на затраты

Пусть «С» – верхняя граница затрат на выполнение плана. Остальные обозначения совпадают с принятыми для задачи 2. Требуется таким образом распределить работу между исполнителями, чтобы:

- **а) суммарные затраты не превысили величины С;**
- **б) все исполнители были заняты;**
- **в) все работы были выполнены;**
- **г) время выполнения работ должно быть минимально.**

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 3

$$\begin{cases} \max\limits_{i} \max\limits_{j} \; r_2(i,j)\, y(i,j) \to \min; & \text{- целевая функция} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_1(i,j)\, y(i,j) \le C; & \text{- ограничение на суммарные затраты} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1; \;\; j = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждая работа должна быть выполнена} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1; \;\; i = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждый рабочий должен быть занят} \\ y(i,j) = 1,0; \;\; i = 1,2,\ldots,n; \;\; j = 1,2,\ldots,n. & \end{cases}$$

АЛГОРИТМ 3 (начало)

Решение задачи 3 сводится к многократному решению задачи 1 - «классической» задачи о назначениях, для чего можно воспользоваться следующим алгоритмом:

Шаг 1. Из исходного графа удаляются все ребра.

Шаг 2. Ищется такое упорядочение ребер $\pi = \{(i,j)_1, (i,j)_2, ..., (i,j)_q\}$, для которого справедливо:

$$r_2(i,j)_k \leq r_2(i,j)_{k+1},$$ где $k = 1,2,3,...,q-1$; q – число ребер графа.

Шаг 3. t = 1.

Шаг 4. В граф возвращаются первые t ребер упорядочения π.

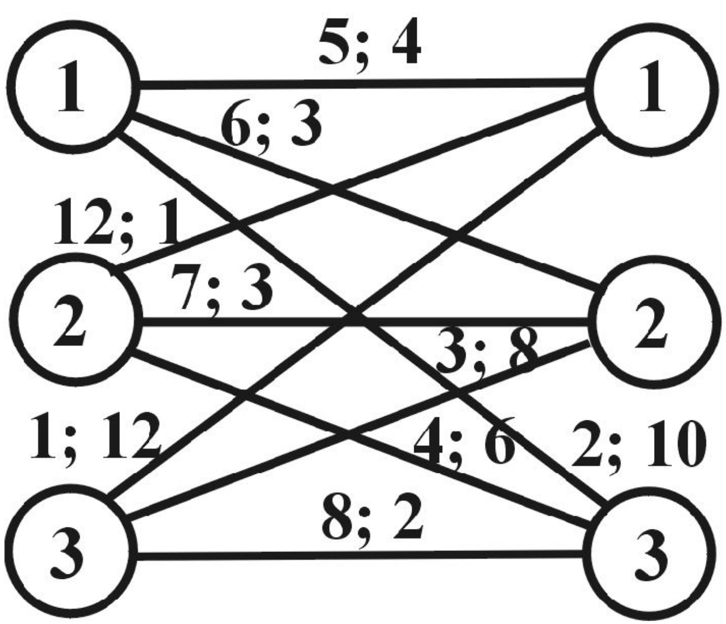
Шаг 5. На полученном графе ищется решение «классической» задачи о назначениях.

АЛГОРИТМ 3 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

- Шаг 6. Если значение целевой функции больше, чем С, то перейти к Шагу 7, нет – к Шагу 10.
- Шаг 7. $t = t + 1$.
- Шаг 8. Если $t<q+1$, то перейти к Шагу 4, если же $t > q$, - то к Шагу 9.
- Шаг 9. Печать «Нет решения», перейти к Шагу 11.
- Шаг 10. Время выполнения плана равно $r_2(i,j)_t$.
- Шаг 11. Конец алгоритма.

ПРИМЕР 3 (исходные данные)

Решить задачу 3 для графа G(X, U) при C = 26. Исходные данные представлены на рисунке и в таблице ниже.



	1	2	3
1	5 4	6 3	2 10
2	12 1	7 3	4 6
3	1 12	3 8	8 2

ПРИМЕР 3 (решение)

- Перестановка π, полученная на шаге 2, имеет вид: π= {(2,1); (3,3); (1,2); (2,2); (1,1); (2,3); (3,2); (1,3); (3,1)}.

$t = 1$

∞	∞	∞
12	∞	∞
∞	∞	∞

$R = \infty > C$

$t = 2$

∞	∞	∞
12	∞	∞
∞	∞	8

$R = \infty > C$

$t = 3$

∞	6	∞
12	∞	∞
∞	∞	8

$R = 26 > C$

$t = 4$

∞	6	∞
12	7	∞
∞	∞	8

$R = 26 > C$

$t = 5$

5		∞
6 12	7	∞
∞	∞	8

$R = 20 = C$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

24 12	30 6	14 22	10 26
18 18	20 16	15 21	28 18
11 24	17 19	16 19	27 10
9 20	12 24	5 30	28 8

$$\begin{cases} T \to \min; \\ C \le 76. \end{cases}$$

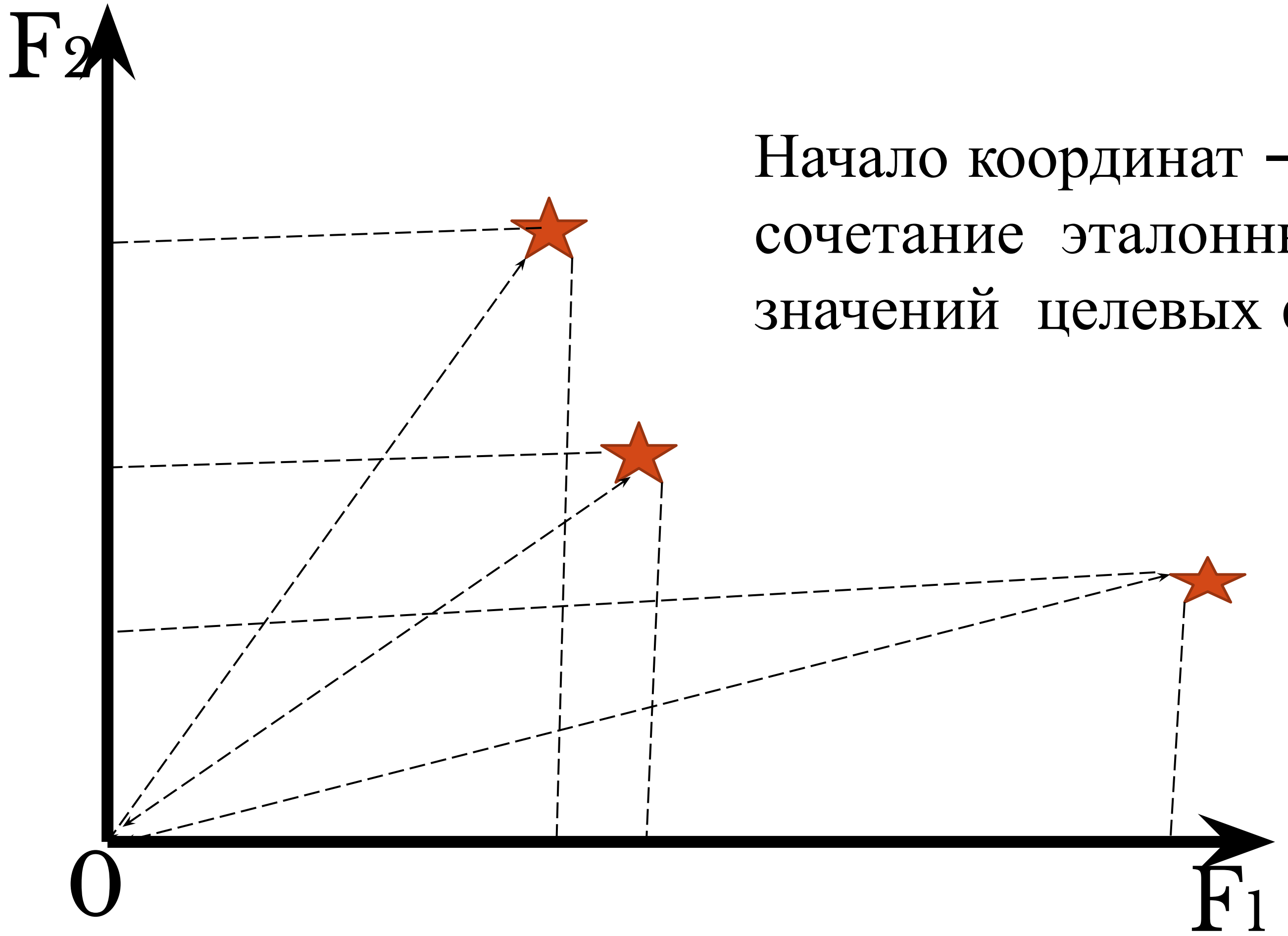
ЧАСТЬ 5

Многокритериальная задача о назначениях

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ И ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПЛАНА

$$\begin{cases} F_1 = \max\limits_i \max\limits_j \; r_2(i,j)\, y(i,j) \to \min; & \text{- целевая функция № 1} \\ F_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} r_1(i,j)\, y(i,j) \to \min; & \text{- целевая функция № 2} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y(i,j) = 1; \; j = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждая работа должна быть выполнена} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y(i,j) = 1; \; i = 1,2,\ldots,n; & \text{- каждый рабочий должен быть занят} \\ y(i,j) = 1,0; \; i = 1,2,\ldots,n; \; j = 1,2,\ldots,n. & \end{cases}$$

ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ



Начало координат – сочетание эталонных значений целевых функций.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- **Предложить алгоритмы решения многокритериальной задачи о назначениях на базе:**
- **1. Взвешенной суммы критериев.**
- **2. Лексикографического упорядочения критериев.**
- **3. Метода эталонов.**