Теория принятия решений

Лекция 5: Принятие решений голосованием

Содержание

- Текущий контроль
- Часть 1. Основные определения, допущения, обозначения
- Часть 2. Способы подведения итогов голосования
- Часть 3. Технологии снятия с голосования

Обработать экспертные оценки

- Определить лучший и худший из 4-х объектов на основании противоречивых экспертных оценок, заданных матрицей M:
- M(p,q) – вес эксперта, сравнившего объекты p,q.
- M =

0	*|2-i|*	*|9-i|*	*|4-i|*
|7-i|	*0*	*|1-i|*	*|12-i|*
|3-i|	*|6-i|*	*0*	*|15-i|*
|11-i|	*|8-i|*	*|10-i|*	*0*

- Здесь i– порядковый номер студента.

Часть 1

Основные определения, допущения, обозначения

Базовые допущения

1. **Поведение выборщиков разумно, т.е. соответствует их приоритетам и возможностям.**
2. **Информация о количестве голосов, подаваемом за каждого выборщика либо коалицию выборщиков, является достоверной.**
3. **Число голосов, подаваемых за каждого выборщика инвариантно относительно коалиций, в которые он вступает.**

Терминология

- Члены органа управления – **выборщики** должны выбрать один из альтернативных вариантов (выборы президента, победителя конкурса, выбор проекта и т.п.).
- Выборщики могут объединяться в **коалиции**, причем сами выборщики могут иметь **различные возможности** (например председатель может иметь несколько голосов).
- Возможны **различные способы подведения итогов** голосования.

Определения 1

- Множество всех выборщиков Q называется **универсальным.**
- Коалиция выборщиков называется **выигрывающей**, если члены коалиции могут обеспечить победу необходимого им решения независимо от мнения всех остальных выборщиков.
- Если выборщики, не входящие в рассматриваемую коалицию, могут провести свое решение вопреки желанию членов коалиции, то она (коалиция) называется **проигрывающей.**
- Если члены коалиции не могут провести свое решение и, одновременно, остальные выборщики не могут провести другое решение, то **коалиция называется блокирующей**.

Пример 1

- Пусть A – **выигрывающая коалиция.** Тогда ее дополнение Q\A – **проигрывающая коалиция.** Если ни коалиция B, ни Q\B не являются выигрывающими коалициями, то B – **блокирующая коалиция.**
- $|Q| = 8$, каждый выборщик имеет один голос. Тогда коалиция A, такая, что $|A| \geq 5$, является **выигрывающей;**
- $\forall$ T: $|T| \leq 3$, - **проигрывающие** коалиции;
- $\forall$ B: $|B| = 4$, - **блокирующие** коалиции.

Пример 2

- Если же один из выборщиков (председатель) обладает правом **решающего голоса** в случае равного числа голосов в двух группах, то любая коалиция из 4-х выборщиков, в которой участвует **председатель**, является **выигрывающей**, а аналогичная коалиция без председателя – **проигрывающей**.
- **Самостоятельно доказать**, что в этом случае отсутствует **блокирующая коалиция**.

Определения 2

- Если <u>A</u> – **выигрывающая** коалиция, то <u>D</u> такое, что A$\subset$ D, тоже **выигрывающая** коалиция.
- **Минимальная выигрывающая** коалиция **A** такова, что любая коалиция **C$\subset$ A не является выигрывающей.**
- Если выборщик может провести свое решение независимо от мнения остальных, то он называется **диктатором.**
- Если выборщик не входит ни в одну минимальную выигрывающую коалицию, то он называется **бесправным.**
- Если выборщик не может провести свое решение, но может блокировать любое другое, то он называется **обладающим правом вето.**

Самостоятельно

В парламенте, состоящем из 100 избранников, определить численность:

- минимальной выигрывающей коалиции;
- проигрывающей коалиции;
- блокирующей коалиции.

Часть 2

Способы подведения итогов голосования

Поведение выборщиков

Каждый i-й выборщик вводит свое отношение порядка на множестве альтернатив. Так, для трех альтернатив a, b, c выражение:

$$a \succ_i b \succ_i c$$

означает, что i-й выборщик считает, что "a" лучше, чем "b", а "b" лучше, чем "c".

Пример 3. Формы представления исходных данных

Универсальное множество Q таково, что |Q| =13, причем все выборщики имеют по одному голосу. **Формы** представления исходныхданных:

Списком:

$$2\,выборщика: \quad a \succ b \succ c; \quad 1-я\ коалиция;$$
$$3\,выборщика: \quad c \succ b \succ a; \quad 2-я\ коалиция;$$
$$4\,выборщика: \quad a \succ c \succ b; \quad 3-я\ коалиция;$$
$$4\,выборщика: \quad b \succ c \succ a; \quad 4-я\ коалиция;$$

Таблицей:

Количество голосов			
2	**3**	**4**	**4**
a	**c**	**a**	**b**
b	**b**	**c**	**c**
c	**a**	**b**	**a**

Правило относительного большинства

- Побеждает решение, получившее наибольшее число голосов. Тогда (таблица внизу): "a" – 6 голосов против "b" – 4 голоса и "c" – 3 голоса. Побеждает " a ".

Количество голосов			
2	**3**	**4**	**4**
a	**c**	**a**	**b**
b	**b**	**c**	**c**
c	**a**	**b**	**a**

Самостоятельно

- **Определить победителя:**

Количество голосов			
4	5	3	6
a	c	a	b
b	b	c	c
c	a	b	a

Правило абсолютного большинства

Побеждает решение, набравшее больше половины голосов. Если такого нет, то проводится 2й тур, в котором голосование проводится по двум решениям, набравшим наибольшее число голосов в предыдущем туре.

Т.к. в первом туре не победило ни одно решение, то для второго тура выбираются "a" и "b". Вычеркивая "c", получим таблицу второго тура:

Первый тур

Количество голосов			
2	3	4	4
a	c	a	b
b	b	c	c
c	a	b	a

Второй тур

Количество голосов			
2	*3*	*4*	*4*
a	*b*	*a*	*b*
b	*a*	*b*	*a*

Во втором туре побеждает " b "

Самостоятельно

- **Определить победителя:**

Количество голосов			
4	5	3	6
a	c	a	b
b	b	c	c
c	a	b	a

Правило минимальной суммы мест

- **Каждый выборщик дает j очков решению, поставленному на j-ое место. Побеждает решение, набравшее минимальную сумму:**

Количество голосов			
2	3	4	4
a	c	a	b
b	b	c	c
c	a	b	a

Из таблицы следует:

$n_a = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 27;$

$n_b = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 26;$

$n_c = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 25;$

- **Побеждает " c ", на втором месте "b", на третьем – "a".**

Самостоятельно

Определить победителя правилом минимальной суммы мест:

Число голосов	***2***	***a***	***b***	***c***	***d***
	3	***c***	***a***	***d***	***b***
	4	***d***	***b***	***c***	***a***

Правило с подсчетом очков

- Выборщик присваивает число $\lambda_{j,i}^{q} = i$ решению, поставленному на i-ое место, где k – число альтернатив. Побеждает решение, набравшее **наибольшую** сумму очков. Величина λ_q равна:

$$\begin{cases} \forall 1 \le q \le k : \lambda_q = k\sum_j n_j - \sum_j n_j \sum_i \lambda_{j,i}^{q}; \\ \forall q, \forall j, \forall i : \lambda_{j,i}^{q} = i. \end{cases}$$

Количество голосов			
2	**3**	**4**	**4**
a	**c**	**a**	**b**
b	**b**	**c**	**c**
c	**a**	**b**	**a**

a	39-6·1-7·3=12
b	39-1·4-5·2-4·3=13
c	39-3·1-2·8-2·3=14

Побеждает «с».

Самостоятельно

Определить победителя правилом с подсчетом очков:

Число голосов	***2***	***a***	***b***	***c***	***d***
	3	***c***	***a***	***d***	***b***
	4	***d***	***b***	***c***	***a***

Часть 3

Технологии снятия с голосования

Парадоксы снятия с голосования

Первый тур	Второй тур

2	3	4	4
a	c	a	b
b	b	c	c
c	a	b	a

2	3	4	4
b	c	c	b
c	b	b	c

Если после 1-го тура выборщики снимают с голосования решение "а", как не имеющее шансов на выигрыш, то во втором туре побеждает “с”.

Аксиомы Эрроу*

- **Аксиома 1.** (Аксиома полноты).
  Для двух любых альтернатив "a" и "b" коллективный порядок устанавливает одно из трех отношений: a ▯ b либо a = b либо a ▯ b
  Аксиома 2. (Аксиома транзитивности). Если a ▯ b и b ▯ c, то a ▯ c.
- **Аксиома 3** (Аксиома единогласия).
- Если все выборщики считают, что a b, то и в коллективном порядке a b.
- **Аксиома 4** (Аксиома независимости)
- Положение любых двух альтернатив в коллективном порядке зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных порядках выборщиков и не зависит от расположения других альтернативных решений.
- Аксиома 4 позволяет исключить манипулирование итогами за счет снятия с голосования отдельных альтернатив.
- **Аксиома 5.** Необходимо, чтобы система голосования была действенной при любых предпочтениях избирателей – аксиома универсальности.

*В 1951 году Кеннет Эрроу из Стенфордского университета выдвинул пять аксиом, которым должна удовлетворять любая демократическая система голосования

Теорема Эрроу

- **Теорема:Единственным правилом** подведением итогов голосования, не противоречащим аксиомам 1-5, является **правило диктатора**.
- **Примечание:**Следует отметить, что, если множество альтернатив состоит из 2^x элементов изначально, то все противоречия и парадоксы снимаются.

Анализ стратегии голосования с помощью дерева вариантов

- Первая строка – номера коалиций, вторая – число голосов каждой коалиции:

1	2	3
5	4	3
A	B	C
B	C	B
C	A	A

- При принятии решений методом относительного большинства побеждает «А»

Условия анализа стратегий голосования с помощью дерева вариантов

Пусть выполняются следующие правила голосования:

1) Голосование является открытым.

2) На каждой итерации может сниматься с голосования:

a) тот претендент, кто набрал наименьшее число голосов;

b) тот претендент, которого убирает "своя" коалиция.

3) Реализуется всегда один из вариантов: a) либо b).

Дерево вариантов

1	2	3
5	4	3
A	B	C
B	C	B
C	A	A

Снят с голосования: «C» «B» «A»

1	2	3
5	4	3
A	B	B
B	A	A

1	2	3
5	4	3
A	C	C
B	A	A

1	2	3
5	4	3
B	B	C
C	C	B

Побеждает: «B» «C»
«B»