Условия достижимости, базы дуг и растущие деревья

Лекция № 10

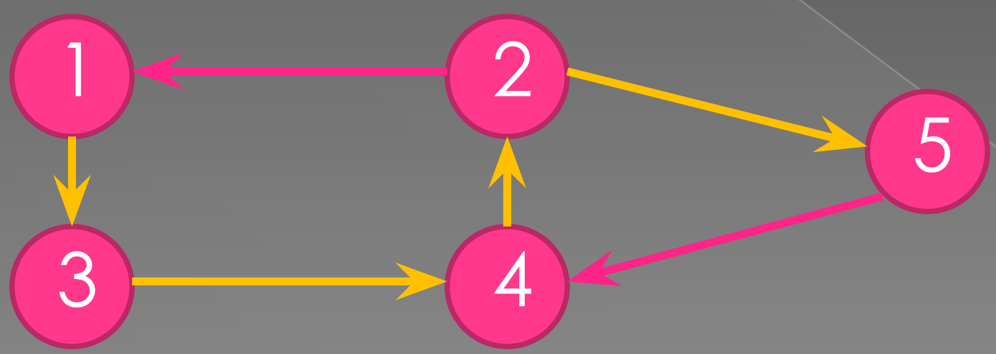
СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1

Условия достижимости

Достижимость вершин

- На ориентированном графе G(X,U) t-я вершина считается достижимой из вершины s-ой, если существует хотя бы один путь, ведущий из s-ой вершины в t-ю. Так, 5-я вершина достижима из 1-й.

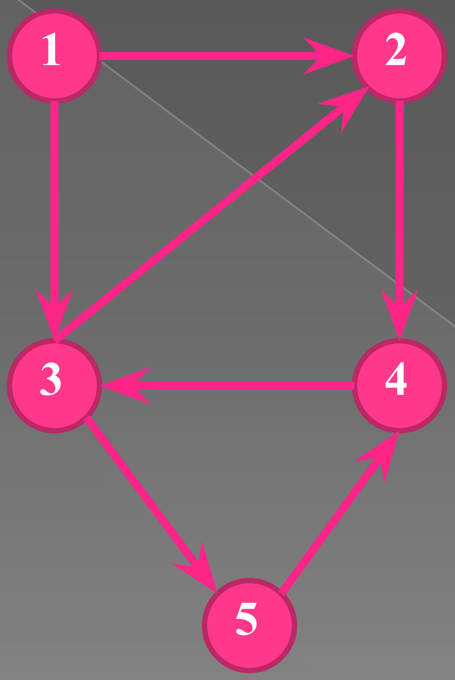


МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ ВЕРШИН

Матрица смежности вершин

0	1	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

Граф



Матрица достижимости вершин

1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1

Часть 2

Базы дуг

БАЗА ДУГ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Базой дуг ориентированного графа G(X,U) с матрицей достижимости вершин «M» называется такое подмножество дуг U’ множества U, что:

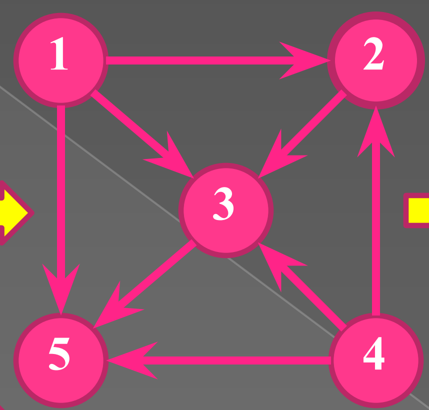
- граф G(X,U’) обладает такой же матрицей достижимости вершин M’, что и исходный граф G(X,U).
- Удаление любой дуги, принадлежащей базе U’, изменяет условия достижимости вершин .

ПРИМЕР 1

Матрица смежности вершин

0	1	1	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

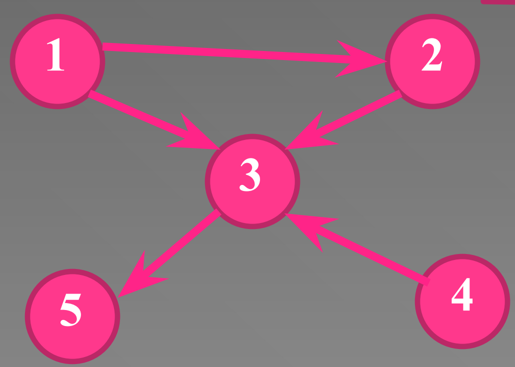
Граф G(X,U)



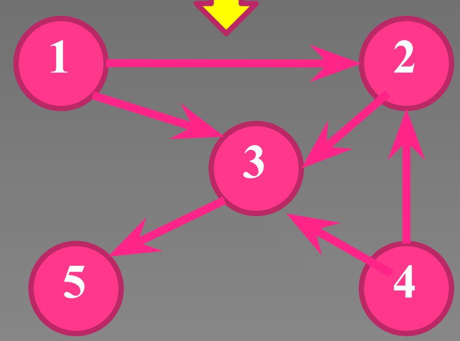
Матрица достижимости вершин

1	1	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

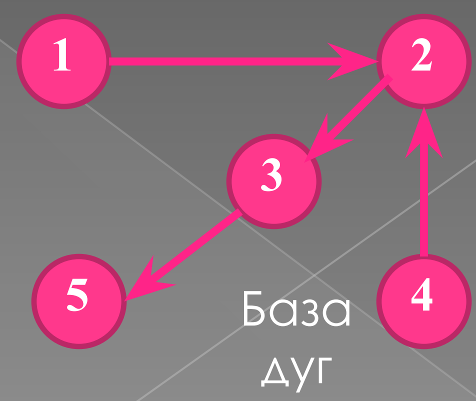
Суграф G(X,U')



Суграф G(X,U'')



Суграф G(X,U''')



МИНИМАЛЬНАЯ БАЗА ДУГ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Минимальной базой дуг взвешенного ориентированного графа G(X,U) с матрицей достижимости вершин «М» называется такое подмножество дуг U’ множества U, что:

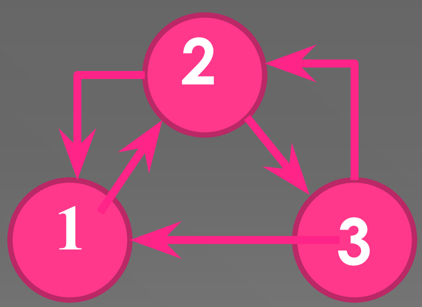
- граф G(X,U’) обладает такой же матрицей достижимости вершин М’, что и исходный граф G(X,U);
- суммарный вес дуг подмножества U’ минимален.

ПРИМЕР 2

G(X,U) и M

M =

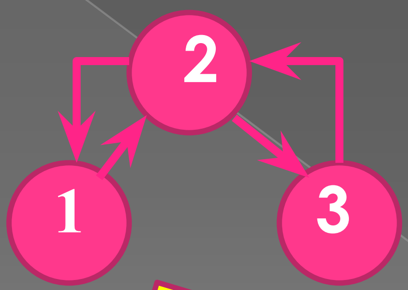
0	1	0
9	0	6
3	2	0



G(X,U') и M'

M'=

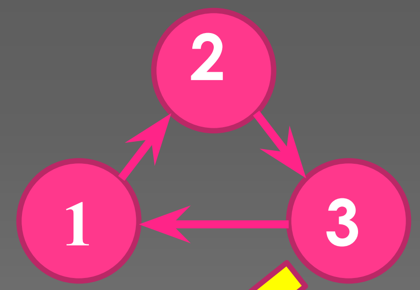
0	1	0
9	0	6
0	2	0



G(X,U'') и M''

M''=

0	1	0
0	0	6
3	0	0



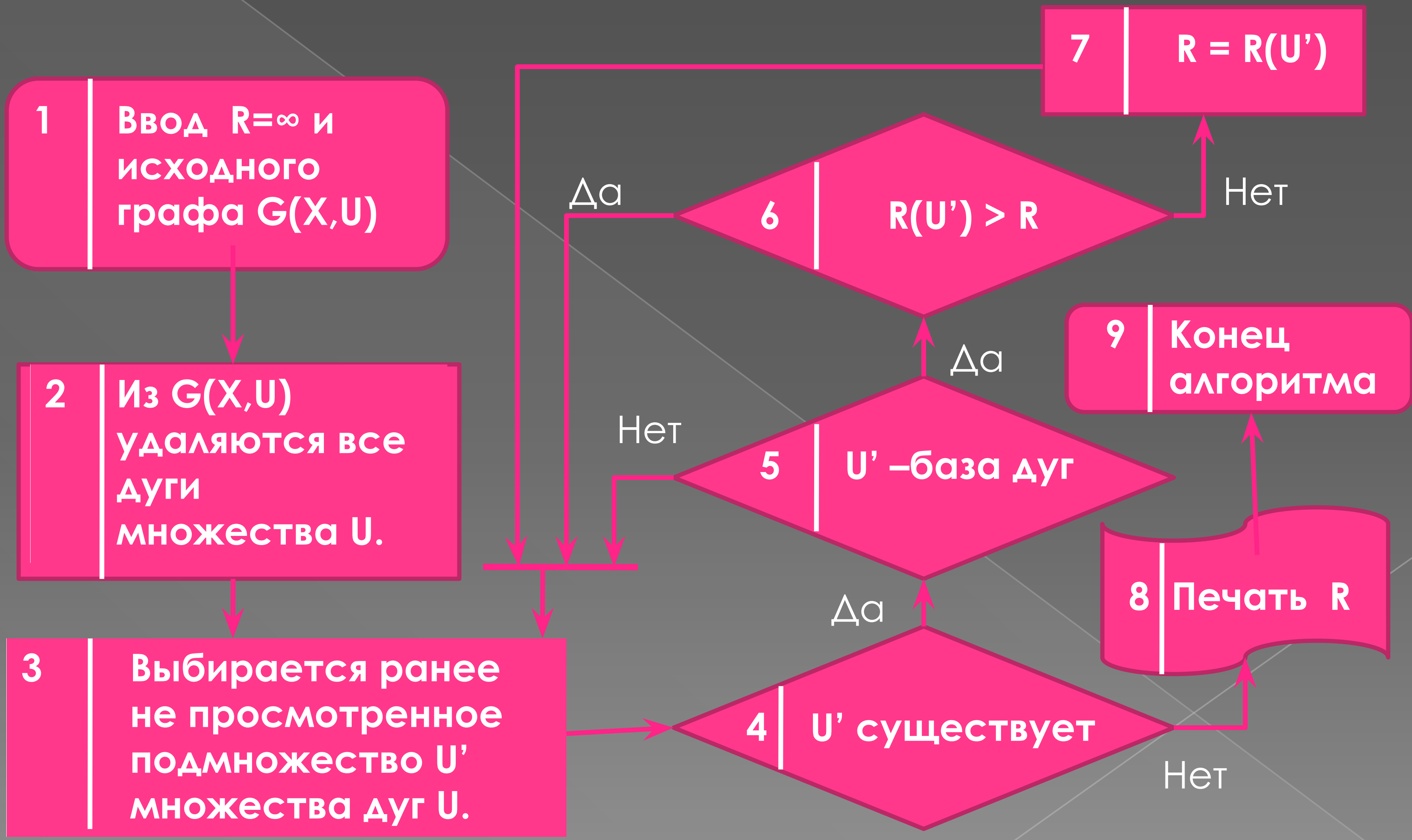
Матрица достижимости вершин

1	1	1
1	1	1
1	1	1

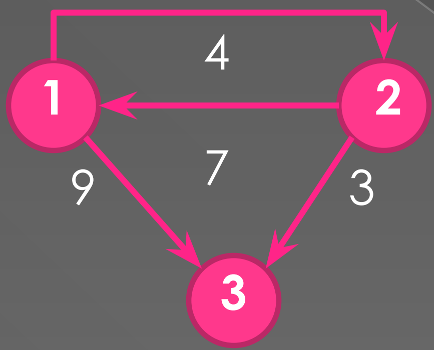
СВОЙСТВА БАЗ ДУГ

- **Теорема 1**. Каждый ориентированный граф обладает по крайней мере одной базой дуг.
- **Теорема 2** (Кёнига): Ориентированный граф без контуров обладает единственной базой дуг.
- **Теорема 3** (Гольдберга) : Число дуг любой базы дуг U' ориентированного графа G(X,U), множество контуров которого не пусто, не превышает величины $Y = 2(|X|-1)$, т.е. $|U'| \leq 2|X|-2$.

АЛГОРИТМ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОЙ БАЗЫ ДУГ

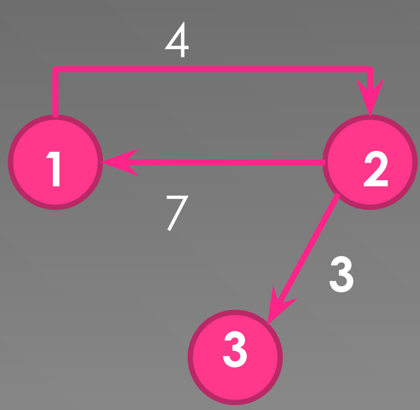


ПРИМЕР 3



Исходный граф G(X,U)

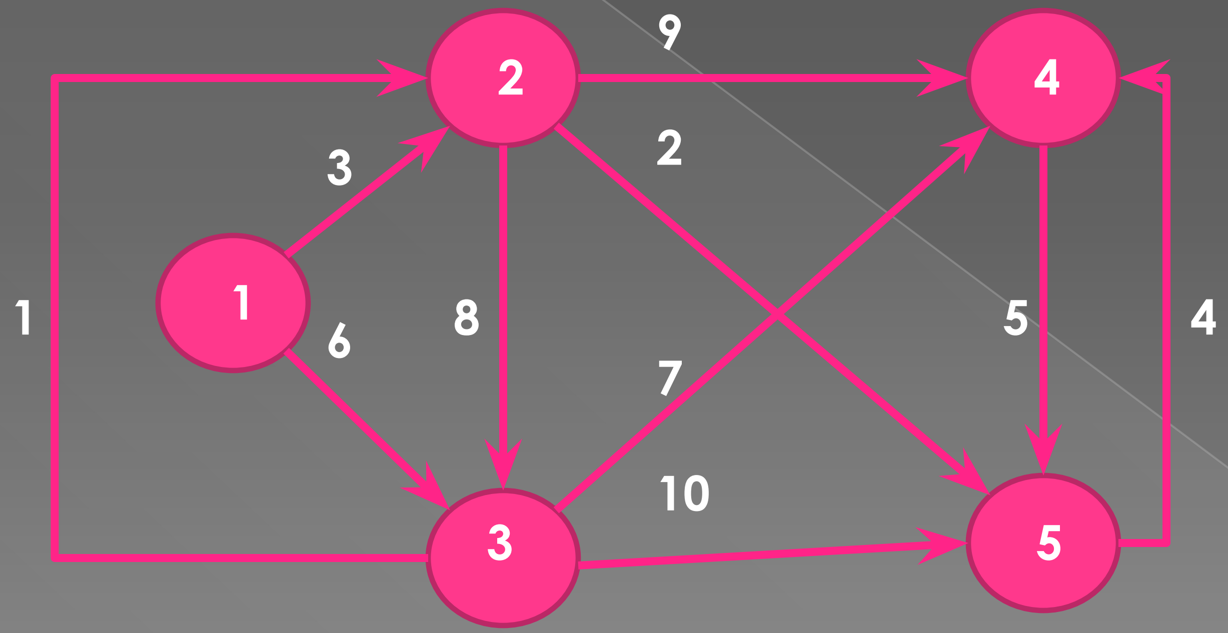
№	Z(1,3)	Z(2,3)	Z(1,2)	Z(2,1)	R
1	0	0	0	1	∞
2	0	0	1	0	∞
3	0	0	1	1	∞
4	0	1	0	0	∞
5	0	1	0	1	∞
6	0	1	1	0	∞
7	0	1	1	1	14



Суграф G(X,U') с минимальной базой дуг

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

- Определить минимальную базу дуг на графе G(X,U):



Часть 3

Растущие ориентированные деревья

МИНИМАЛЬНЫЕ РАСТУЩИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Содержательная постановка задачи: требуется на заданном взвешенном ориентированном графе G(X,U) выделить подграф - дерево G’(X’,U’) с корнем в заданной s-ой вершине такой, что:

- Все вершины, достижимые из s-й вершины на G(X,U), также достижимы из той же вершины на G’(X’,U’).
- Суммарный вес дуг множества U’ минимален.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначения	**Определения**
(i,j) -	дуга, идущая из i-й вершины в j-ю на G(X,U);
Z(i,j) -	булева переменная, отвечающая дуге (i,j);
r(i,j) -	вес дуги (i,j);
$L_d(s,t)$ –	d – й путь из s – й вершины в t – ю на G(X,U)
U’	искомое подмножество дуг множества U;
G’(X’,U’) -	искомое дерево с заданными условиями достижимости вершин из s – й вершины, причем справедливо: $X' \subseteq X; U' \subset U;$
G(X,U) -	исходный граф;
$L'_d(s,t)$ –	d – й путь из s – й вершины в t – ю на G’(X’,U’);
X’ -	Все вершины, достижимые из s – й на G(X,U).

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

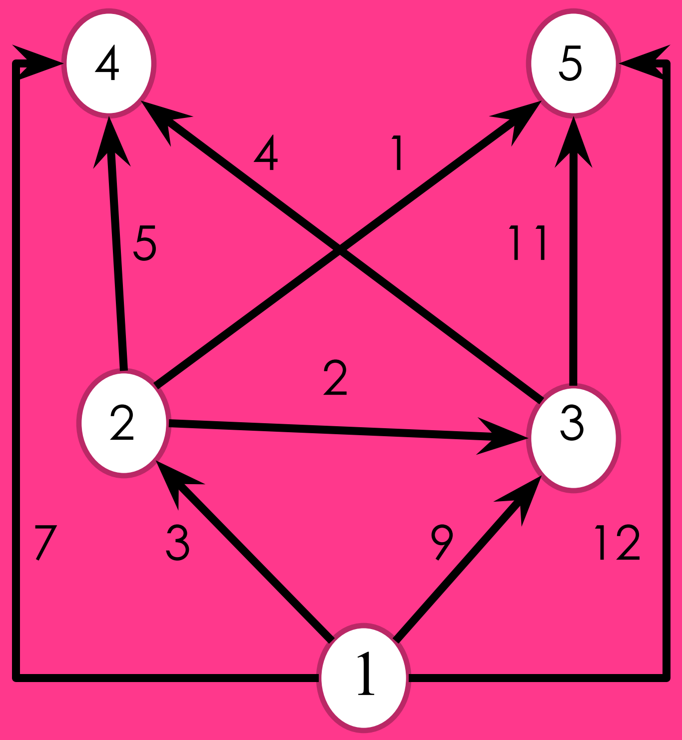
$$
\begin{cases}
\sum\limits_{(i,j)\in U'} r(i,j)z(i,j) \to \min; \\
\forall x_t \in X : signum\left\{ \sum\limits_{d} \prod\limits_{L'_d(s,t)} z(i,j) \right\} = signum\left\{ \sum\limits_{d} \prod\limits_{L_d(s,t)} z(i,j) \right\}; \\
\prod\limits_{(i,j)\in U'} z(i,j) = 1; \\
\forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0.
\end{cases}
$$

СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ РАСТУЩИХ ДЕРЕВЬЕВ

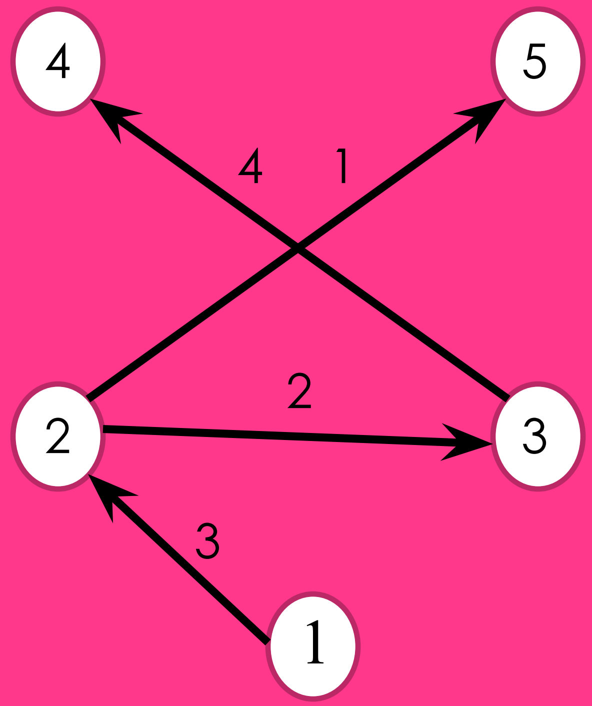
- Величина $y = \sum_{x_j \in X'} \min_i r(i, j)$ является нижней границей суммарного веса дуг минимального дерева.
- Если граф G(X,U) не содержит контуров, то

$y = \sum_{x_j \in X'} \min_i r(i, j)$ отвечает оптимальному значению целевой функции. (Сравнить с теоремой Кёнига).

ПРИМЕР 4



G(X,U)



G'(X',U')

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ДЕРЕВА НА ГРАФЕ БЕЗ КОНТУРОВ

Шаг 1. На исходном графе G(X,U) удаляются все вершины, в которые отсутствуют пути из s-й вершины, являющейся корнем дерева. Полученный граф вновь обозначаем G(X,U).

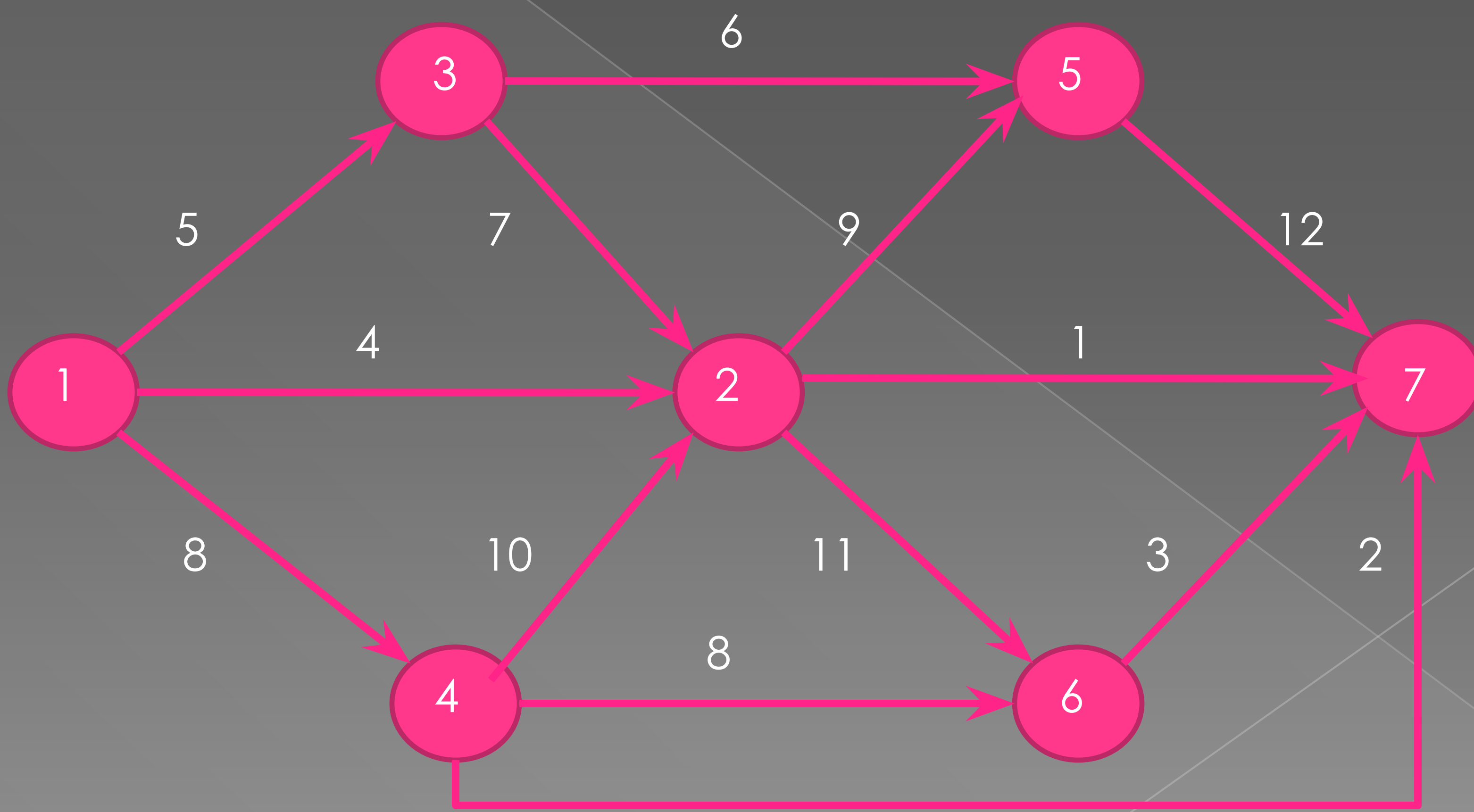
Шаг 2. $\forall j \neq s : r(p, j) = \min_i r(i, j)$.

Шаг 3. Дуги (p,j), определенные на предыдущем шаге, принадлежат множеству U'.

Шаг 4. Конец алгоритма.

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Выделить минимальное дерево с корнем в 1-й вершине на графе G(X,U):



ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

- На полученном орграфе:
- 1. Определить минимальный разрез.
- 2. Удалить дуги минимального разреза на исходном графе G(X,U).
- 3. На полученном графе G’(X’,U’) построить:
- А) матрицу смежности вершин;
- Б) минимальную базу дуг
- В) минимальное растущее дерево с корнем в вершине – источнике.

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 1 - 9

0	1	5	9
0	0	3	9
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 1

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	0	0

№ 2

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	6	0	0

№ 3

0	2	9	4
6	0	5	7
0	3	0	8
8	1	0	0

№ 4

0	0	9	4
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 5

0	2	6	3
9	0	8	4
5	1	0	0
0	7	5	0

№ 6

0	3	7	9
0	0	5	4
3	1	0	8
2	6	9	0

№ 7

0	3	7	8
5	0	2	4
0	4	0	6
2	5	1	0

№ 8

0	7	9	1
2	0	5	1
6	3	0	8
2	0	4	0

№ 9

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 10 - 18

0	1	5	9
0	9	3	0
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 10

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	0	0

№ 11

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	0	6	0

№ 12

0	2	9	4
6	0	5	7
3	0	0	8
8	1	0	0

№ 13

\

0	4	9	0
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 14

0	2	6	13
9	0	8	4
5	1	0	0
0	7	5	0

№ 15

0	3	7	9
0	0	5	4
3	1	0	8
0	6	9	0

№ 16

0	3	7	8
5	0	2	4
0	4	0	16
2	5	1	0

№ 17

0	7	9	1
2	0	5	1
6	3	0	8
0	2	4	0

№ 18

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 19 - 27

0	1	5	9
0	0	12	9
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 19

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	5	0

№ 20

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	9	3	0

№ 21

0	2	9	4
6	0	5	5
3	3	0	8
2	1	0	0

№ 22

0	10	9	4
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 23

0	2	6	3
9	0	8	4
5	1	0	9
0	7	5	0

№ 24

0	3	7	9
0	0	15	4
3	1	0	8
2	6	9	0

№ 25

0	3	7	8
5	0	2	4
9	4	0	6
2	5	1	0

26

0	7	9	10
2	0	5	1
6	3	0	8
2	12	4	0

№ 27

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 1 - 3

Шаг 1. На исходном графе G(X,U) удаляются все вершины, в которые отсутствуют пути из s-й вершины, являющейся корнем дерева. Полученный граф вновь обозначаем G(X,U).

Шаг 2. Выбирается дуга с минимальным весом, заходящая в каждую вершину подмножества

$X \setminus x_s$.

Шаг 3. Если на множестве выбранных дуг есть дуга (s,j), исходящая из s-й вершины, то перейти к шагу 4, в противном случае – к шагу 6.

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 4 - 6

Шаг 4. Вершина j-я «стягивается» в s-ю. Если при этом граф «стянулся» в одну вершину, то перейти к шагу 9, в противном случае – к шагу 5.

Шаг 5. Если образуются пары параллельных и согласно ориентированных дуг, то остаётся одна из них, вес которой меньше. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Каждой j-й вершине (j ≠ s) присваивается потенциал p(j); $\forall j \neq s : p(j) = r(i, j)^* - \min_{q \neq i} r(q, j)$, где r(i,j)* - дуга, выбранная на шаге 2 последней итерации.

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 7 - 9

Шаг 7. На множестве вершин $X \setminus x_s$ выбирается такая, потенциал которой минимален.

Шаг 8. Полагая, что выбранная на шаге 7 вершина является j-й, выполняются следующие две операции:

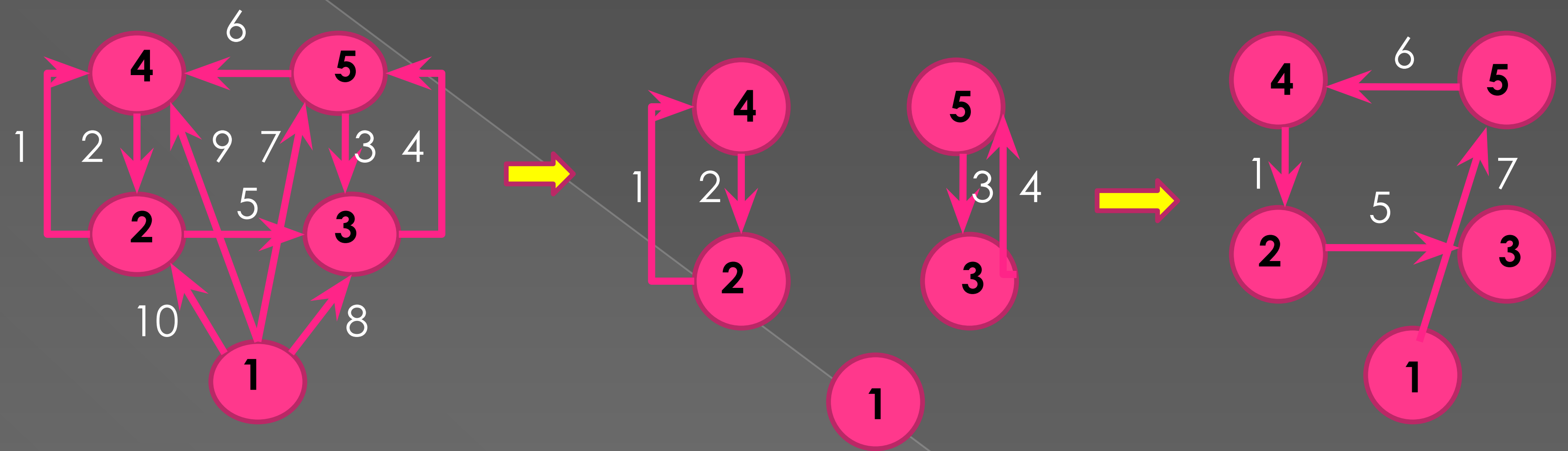
дуга (i,j), помеченная звездочкой «*», теряет эту пометку, а дуга (k,j), такая, что:

$$r(k,j) = \min_{q \neq i} r(q,j)$$

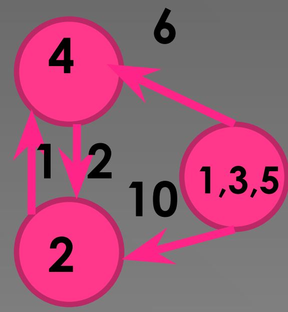
её приобретает. Перейти к шагу 3.

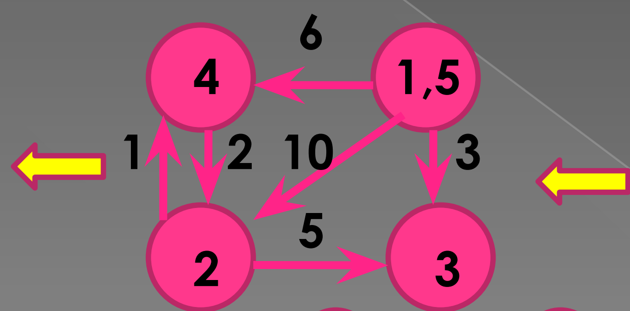
Шаг 9. Конец алгоритма. «Стянутые» дуги образуют минимальное дерево.

ПРИМЕР 5

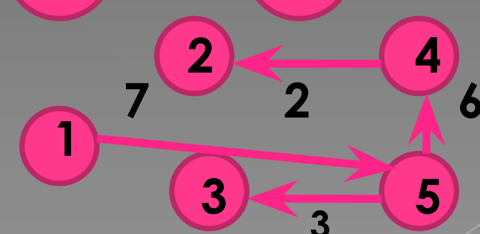


J	P(J)
2	8
4	5





J	P(J)
2	8
3	2
4	5
5	3



R = 18

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Построить минимальное дерево с корнем в 1-й, 2-й, …, 7-й вершине на графе G(X,U):