Целые уравнения и способы их решения

Работу выполнила:
Данилова С. Д.- учитель математики МОУ лицея №86

Цель работы:

- **Познакомиться с целыми уравнениями и способами их решения.**

Целое уравнение

- **Уравнение вида** $P(x)=0$ **, где** $P(x)$ **- многочлен стандартного вида, называют целым алгебраическим уравнением.**
- **Теорема 1.Если число** a **является корнем многочлена** $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ **, то этот многочлен можно представить в виде** $P(x)=(x-a)P_1(x)$ **, где** $P_1(x)$ **-многочлен степень которого на единицу меньше степени многочлена** $P(x)$**.**

Теорема Безу

- **Теорема Безу. Для того чтобы многочлен делился без остатка на двучлен $x-a$,необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем многочлена.**
- **Теорема 2.Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ имеет целые коэффициенты, причем свободный член отличен от нуля, то целыми корнями такого уравнения могут быть только делители свободного члена.**

Пример 1

Решить уравнение $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$

Делители свободного члена- числа -1, 1, -2, 2. Подставим эти числа в уравнение, находим что $x_1 = 1, x_2 = -2$

Представим левую часть уравнение в виде $(x-1)(x+2)(x^2+px+q)$ **или** $(x^2+x-2)(x^2+px+q)$ **,где** p **и** q**- неизвестные нам числа.**

Методом неопределенных коэффициентов находим, что $-2q=2$ **и** $p+1=-1$**. Отсюда** $q=-1$ **,** $p=-2$**.**

Приравняв нулю трехчлен x^2-2x-1 **, найдем остальные корни уравнения:**

$$x^2-2x-1=0\,,$$

$$x_4=1+\sqrt{2}\,,\quad x_3=1-\sqrt{2}\,.$$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_4=1+\sqrt{2},\ x_3=1-\sqrt{2}.$

Метод введения новой переменной.

Этот метод заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную (подстановку) $y=q(x)$ и выражают $f(x)$ через y, получая новое уравнение $s(y)=0$. Решая затем уравнение $s(y)=0$ находят его корни $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$.

После этого получают совокупность уравнений $q(x)=y_1, q(x)=y_2, \ldots, q(x)=y_n$, из которых и находят корни исходного уравнения.

Пример 2

Решить уравнение

$$(3x+2)^4 - 13(3x+2)^2 + 36 = 0$$

Полагая $y = (3x+2)^2$, получим уравнение $y^2 - 13y + 36 = 0$. Находим его корни $y_1 = 4, y_2 = 9$ и решаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}(3x+2)^2 = 4,\\ (3x+2)^2 = 9\end{array}\right.$$

Первое уравнение $(3x+2)^2 = 4$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x+2=2, \\ 3x+2=-2 \end{array}\right.$$ находим корни $$\left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-\frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Второе уравнение $(3x+2)^2 = 9$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x+2=3, \\ 3x+2=-3. \end{array}\right.$$ находим корни $$\left[\begin{array}{l} x_3=\frac{1}{3}, \\ x_4=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=0; x_2=-\frac{4}{3}; x_3=\frac{1}{3}; x_4=-\frac{5}{3}$

Возвратные уравнения

Уравнение четвёртой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

называют возвратным, если оно имеет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$

где k - не равное нулю число.

При $k = 1$ возвратное уравнение примет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Такое уравнение называется симметрическим.

Возвратные уравнения можно упрощать введением новой переменной

$$y = x + \frac{k}{x}$$

Пример 3

Решить уравнение

$$3x^4 - 5x^3 - 30x^2 - 10x + 12 = 0$$

Это уравнение возвратное, так как оно имеет вид

$$3x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 2(-5)x + 2^2 \cdot 3 = 0, k = 2$$

Разделим обе части уравнения на x^2**. Равносильность уравнения не нарушится, так как** $x = 0$ **не является корнем уравнения. Получим:**

$$3x^2 - 5x - 30 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

Сгруппируем члены уравнения

$$3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{2}{x}\right) - 30 = 0.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{2}{x}$ **.**

Тогда $y^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$

Отсюда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$ **.**

Получим уравнение $3\left(y^2 - 4\right) - 5y - 30 = 0$

или $3y^2 - 5y - 42 = 0$ **.**

Найдём его корни: $y_1 = -3, y_2 = \frac{14}{3}$ **.**

Получим совокупность уравнений $x + \frac{2}{x} = -3$ **или** $x + \frac{2}{x} = \frac{14}{3}$**.**

Приведя их к целому виду, получим:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 = 0, \\ 3x^2 - 14x + 6 = 0. \end{array}\right.$$

Найдем корни

$$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{7 - \sqrt{31}}{3}, x_4 = \frac{7 + \sqrt{31}}{3}$$