Ekonomicko-matematické metody I
3/12

Modely lineárního programování.
Simplexový algoritmus.

Vzdělávací cíle

- Připravit model LP pro výpočet simplexovým algoritmem
- Sestavit výchozí simplexovou tabulku
- Nalézt optimální řešení pomocí simplexové metody

Model lineárního programování

- **Cíl: nalézt vázaný extrém lineární funkce více proměnných, který vyhovuje daným lineárním omezujícím podmínkám**
- **Komponenty modelu**
  - proměnné;
  - omezující podmínky;
  - účelová (kriteriální) funkce;
  - podmínky nezápornosti.

Použité symboly a značení

- **Proměnné**
  - x … strukturní proměnné;
  - d … doplňkové proměnné;
  - p … pomocné proměnné.
- **Omezující podmínky … $Ax \leq b$**
  - $A = (a_{ij})$ … matice soustavy;
  - b … vektor pravých stran.
- **Účelová funkce … $z = c.x$**
  - c … cenové koeficienty proměnných (jednotkové ceny)

Příklad

- **Farma se rozhoduje o vyhrazení části své půdy pro pěstování pšenice, ječmene a žita.**
  - tyto plodiny mají obsadit celkem právě 140 hektarů;
  - potřeba chlévského hnoje je 40; 15 a 20 t/ha, k dispozici je maximálně 3000 t hnoje;
  - odhadované zisky v tis. Kč/ha jsou pro jednotlivé plodiny 1; 1 a 2 (bráno po řadě), je požadováno dosáhnout alespoň 200 tis. Kč zisku.
- **Farma chce minimalizovat dopady na životní prostředí, které vyjadřuje v „jednotkách zátěže“ (JZ/ha) a které jsou pro jednotlivé plodiny 7; 2 a 4. Na jaké ploše by měly být vysety jednotlivé plodiny?**

Sestavit model

Simplexový algoritmus

- Splnění podmínek simplexového algoritmu
- Výchozí bázické řešení
- Test optima (vstupu)
- Test přípustnosti báze (výstupu)
- Přechod na nové řešení Jordanovou eliminační metodou

Podmínky simplexového algoritmu

- **Nezápornost složek vektoru pravých stran**
  - stačí zkontrolovat;
  - pokud není splněna, lze příslušné omezující podmínky vynásobit hodnotou (-1).
- **Matice soustavy v kanonickém tvaru**
  - krok 1: rovnicový tvar modelu;
  - krok 2: kanonický tvar modelu.

Rovnicový tvar

- **Nerovnice vyrovnáme na rovnice**
- **Doplňkové proměnné**
  - značíme **d**, indexujeme číslem omezující podmínky;
  - přebírají jednotky omezující podmínky;
  - v účelové funkci ohodnocujeme nulovou sazbou;
  - požadujeme jejich nezápornost.
- **Přidáváme do omezujících podmínek**
  - kapacitních s kladným znaménkem (rezerva);
  - požadavkových se záporným znaménkem (překročení požadavku).

Kanonický tvar

- **Nerovnice vyrovnáme na rovnice (doplňkové proměnné)**
- **Zajistíme úplnou jednotkovou submatici**
- **Pomocné proměnné**
  - značíme **p**, indexujeme číslem omezující podmínky;
  - přebírají jednotky omezující podmínky;
  - v účelové funkci ohodnocujeme nevýhodnou (prohibitivní) sazbou;
  - požadujeme jejich nezápornost.

Pomocné proměnné

- **Přidáváme do omezujících podmínek**
  - požadavkových;
  - typu určení;
  - vždy s kladným znaménkem.
- **Interpretace**
  - kolik jednotek zbývá do splnění omezení;
  - řešení s kladnou hodnotou pomocné proměnné je proto automaticky nepřípustné.

Výchozí bázické řešení

- Sestavení výchozí simplexové tabulky
- Identifikace bázických a nebázických proměnných
- Určení hodnot proměnných ve výchozím bázickém řešení
- Určení hodnoty účelové funkce

Test optimality

- **Existuje bázické řešení s lepší hodnotou ÚF?**
- **Záměna proměnných v bázi**
- **Koeficient $z_j - c_j$**
  - záporný: hodnota ÚF se zvyšuje;
  - kladný: hodnota ÚF se snižuje;
  - nulový: proměnná nemá vliv na hodnotu ÚF.

Ukázat obecněji na malé tabulce

- **Řešení je optimální**
  - minimalizace: $z_j - c_j \leq 0$ pro všechna j;
  - maximalizace: $z_j - c_j \geq 0$ pro všechna j.
- **Klíčový sloupec: maximální hodnota $|z_j - c_j|$ z těch, které porušují podmínku optimality**

Test přípustnosti

- I nové řešení musí splňovat podmínky SA
- Nezáporné složky vektoru b
- Známe klíčový sloupec (z testu optima)
- Určíme klíčový řádek podle podílů

$\Omega_i = \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$, kde k je index klíčového sloupce

Ukázat obecněji
na malé tabulce

- Pouze pro $\alpha_{ij} > 0$
- Minimum z těchto podílů určuje klíčový řádek

Nové řešení

- Jeden krok Jordanovy eliminační metody
- Přesun jednotkového vektoru pod proměnnou, která vstupuje do báze
- Průsečík klíčového řádku a klíčového sloupce = klíčový prvek
- Klíčový řádek vydělíme klíčovým prvkem
- Od ostatních řádků odečteme vhodný násobek NOVÉHO klíčového řádku

Interpretace výsledku

- Rozdělení proměnných na bázické a nebázické
- Hodnoty všech proměnných
- Hodnota účelové funkce
- Relativní nevýhodnost nebázických proměnných – duální (stínové) ceny

Shrnutí

- Pojem lineární optimalizační model
- Konstrukce simplexové tabulky
- Čtení v simplexové tabulce
- Optimalizace v simplexové tabulce
- Základní interpretace výsledků

Literatura

- **Šubrt a kol.: Ekonomicko-matematické metody, vydavatel Aleš Čeněk, Plzeň, 2011**
- **Houška, M., Beránková, M.: Lineární programování - cvičebnice, ČZU Praha, 2008**
- **Získal, J., Beránková, M., Houška, M.: Lineární programování I., ČZU Praha, 2005**