Компьютерные основы программирования
Представление данных
часть2

Лекция 3, 2 марта 2017

Лектор: Чуканова Ольга Владимировна

Кафедра информатики

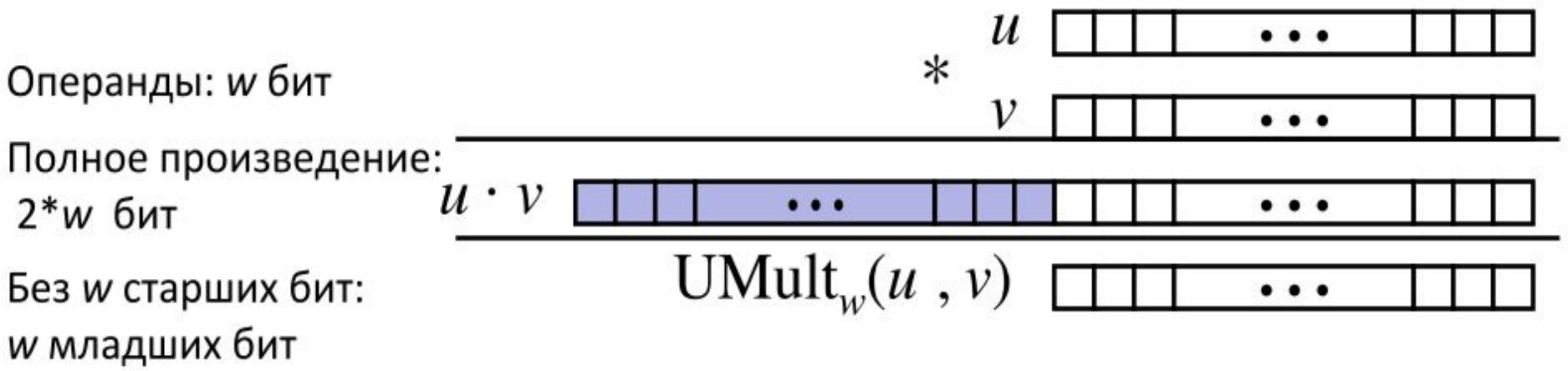
602 АК

ovcha@mail.ru

Умножение

- Вычисление полного произведения w-битовых чисел x, y
  - Или знаковых или беззнаковых
- Границы
  - Беззнаковые: $0 \le x * y \le (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$
    - До $2w$ бит
  - Минимальное в доп.коде: $x * y \ge (-2^{w-1})*(2^{w-1}-1) = -2^{2w-2} + 2^{w-1}$
    - До $2w-1$ бит
  - Максимальное в доп коде : $x * y \le (-2^{w-1})^2 = 2^{2w-2}$
    - До $2w$ бит, но только для $(TMin_w)^2$
- Обеспечение полноты результата
  - Необходимо расширение слова для каждого результата
  - Реализуется лишь в программных пакетах арифметики “произвольной точности”

Беззнаковое произведение в Си



- Стандартная функция умножения
  - Игнорирует старшие *w* бит
- Реализует умножение по модулю

  $\text{UMult}_w(u , v) = u \cdot v \bmod 2^w$

Пример небезопасного кода

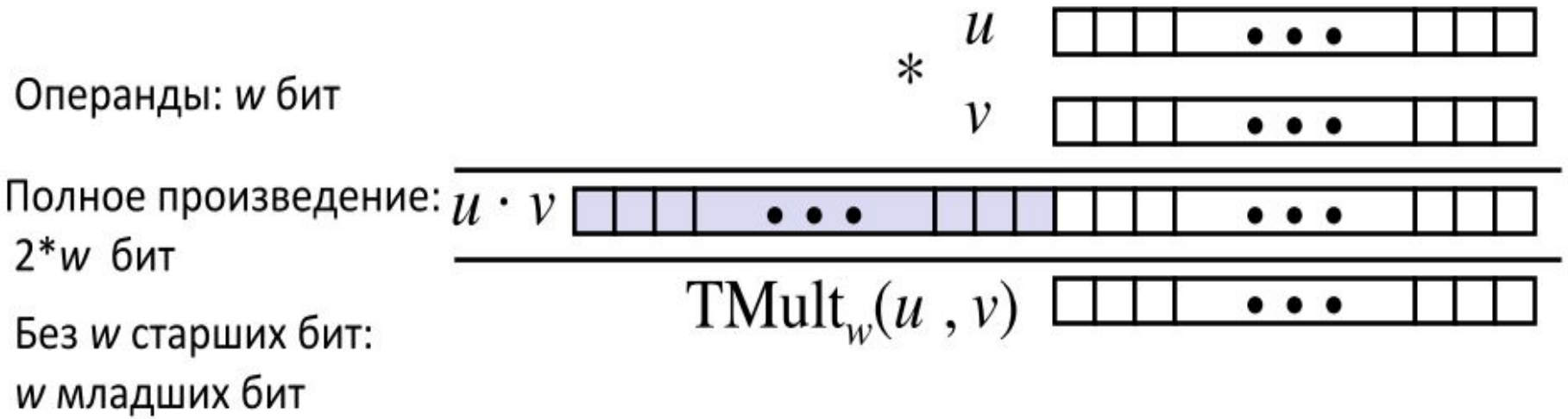
```
void* copy_elements(void *ele_src[], int ele_cnt, size_t ele_size) {
    /*
     * Занимаем буфер для ele_cnt объектов, каждый ele_size байт
     * и копируем с места указанного ele_src
     */
    void *result = malloc(ele_cnt * ele_size);
    if (result == NULL)
        /* Ошибка malloc */
        return NULL;
    void *next = result;
    int i;
    for (i = 0; i < ele_cnt; i++) {
        /* Копирование объектов по назначению */
        memcpy(next, ele_src[i], ele_size);
        /* Пемещение указателя на следующую позицию в памяти */
        next += ele_size;
    }
    return result;
}
```

malloc(ele_cnt * ele_size)

- Что если:
  - **`ele_cnt`** = $2^{20} + 1$
  - **`ele_size`** = 4096 = 2^{12}
  - Выделится = ??

- Как сделать функцию безопасной?

Знаковое умножение в Си



- Стандартная функция умножения
  - Игнорирует старшие *w* бит
  - Некоторые из них различаются для знакового и беззнакового умножений
  - Младшие биты такие-же

Таблица 2.15. *Умножение трехбитовых чисел без знака и в дополнительном коде*

Режим	x		y		$x \cdot y$		**Усеченное** $x \cdot y$	
Без знака	5	[101]	3	[011]	15	[001111]	7	[111]
В доп. коде	–3	[101]	3	[011]	–9	[110111]	–1	[111]
Без знака	4	[100]	7	[111]	28	[011100]	4	[100]
В доп. коде	–4	[100]	–1	[111]	4	[000100]	–4	[100]
Без знака	3	[011]	3	[011]	9	[001001]	1	[001]
В доп. коде	3	[011]	3	[011]	9	[001001]	1	[001]

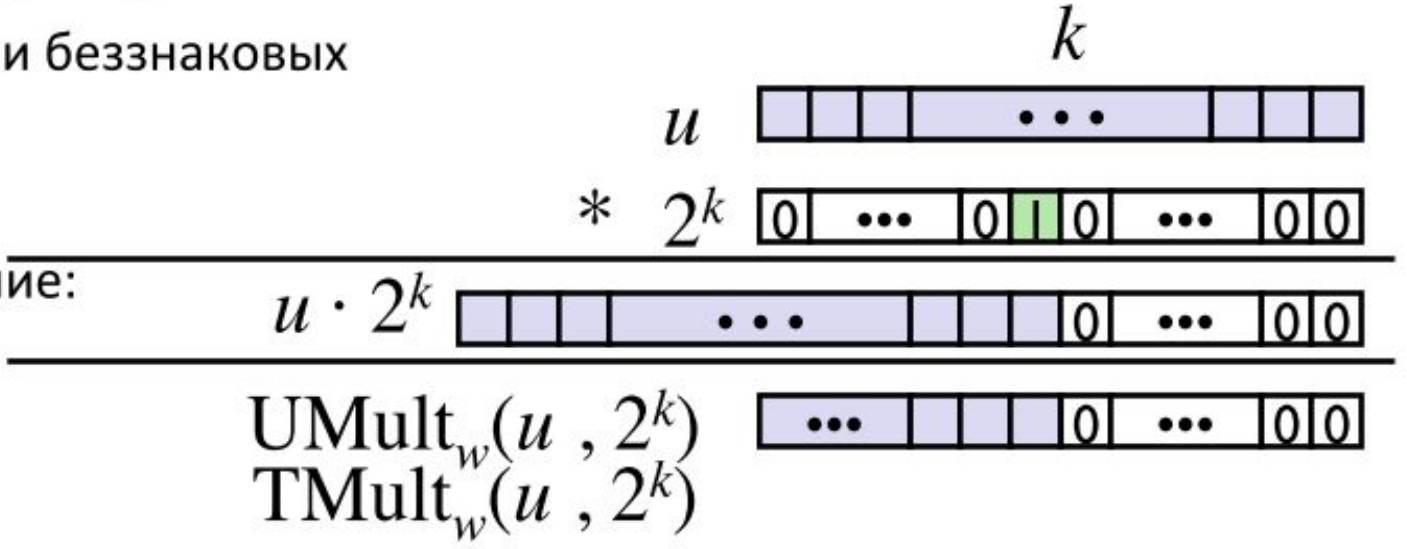
Умножение сдвигом на степень двойки

- Операция
  - `u << k` даёт `u * 2^k`
  - Для знаковых и беззнаковых

Операнд: *w* бит

Полное произведение: *w+k* бит

Без *k* старших бит: *w* младших бит



- Примеры
  - `u << 3 == u * 8`
  - `u << 5 - u << 3 == u * 24`
  - Большинство машин сдвигает и складывает быстрее умножения
    - Компилятор создаёт соответствующий код автоматически

Компилированный код умножения

Функция Си

```
int mul12(int x)
{
  return x*12;
}
```

Арифметические операции в результате компиляции

```
leal (%eax,%eax,2), %eax
sall $2, %eax
```

Пояснение

```
t <- x+x*2
return t << 2;
```

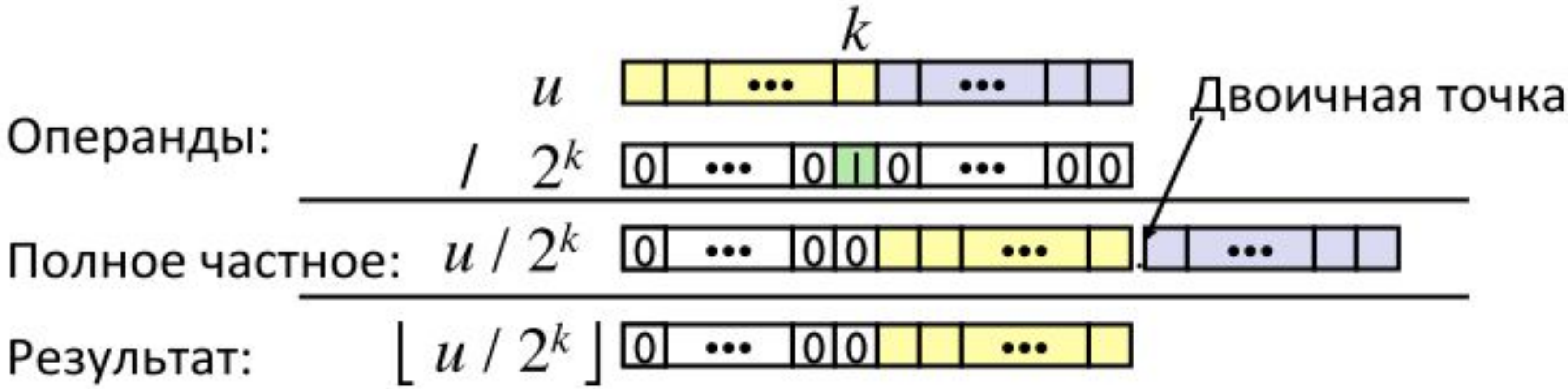
- Компилятор Си автоматически создаёт код сдвига и сложения при умножении на константу

```
leal  (%eax, %eax, 2), %eax
sall  $2,  %eax
```

```
lea  eax, [eax+eax*2]
sal  eax,2
```

Деление сдвигом беззнакового на степень двойки

- Частное от деления беззнакового на степень двойки
  - `u >> k` даёт $\lfloor$ `u / 2`$^k \rfloor$
  - Используется логический сдвиг



	Полное частное	Результат	Шестн.	Двоичный
`x`	15213	15213	`3B 6D`	`00111011 01101101`
`x >> 1`	7606.5	7606	`1D B6`	`00011101 10110110`
`x >> 4`	950.8125	950	`03 B6`	`00000011 10110110`
`x >> 8`	59.4257813	59	`00 3B`	`00000000 00111011`

Компилированный код деления беззнакового

Функция Си

```
unsigned udiv8(unsigned x)
{
  return x/8;
}
```

Арифметические операции в результате компиляции

```
shrl $3, %eax
```

Пояснение

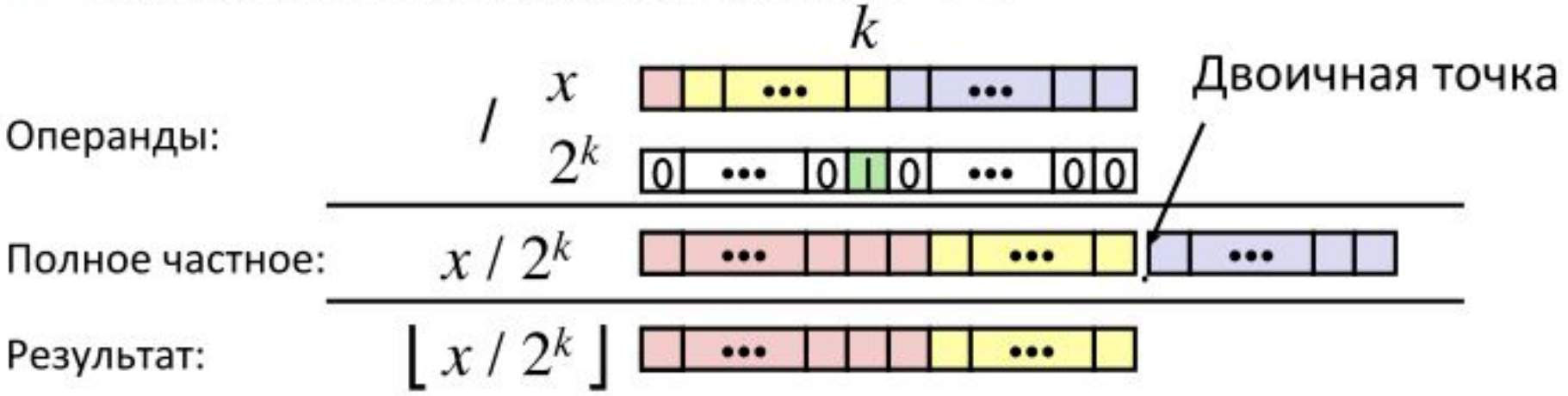
```
# Логический сдвиг
return x >> 3;
```

- Для беззнаковых используется логический сдвиг
- Для пользователей Явы
  - Логический сдвиг пишется как >>>

shrl $3, %eax shr eax, 3

Деление сдвигом знакового на степень двойки

- Частное от деления знакового на степень двойки
  - **x >> k** даёт $\lfloor x / 2^k \rfloor$
  - Использует арифметический сдвиг
  - Округляет в неверном направлении при **u < 0**

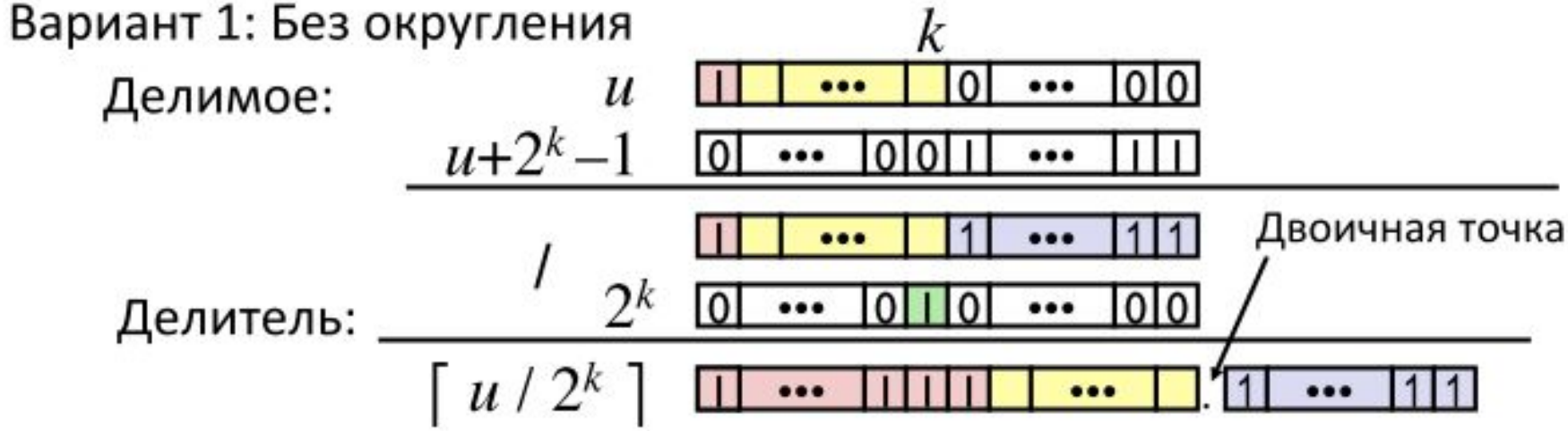


	Полное частное	Результат	Шестн.	Двоичный
y	-15213	-15213	C4 93	11000100 10010011
y >> 1	-7606.5	-7607	E2 49	11100010 01001001
y >> 4	-950.8125	-951	FC 49	11111100 01001001
y >> 8	-59.4257813	-60	FF C4	11111111 11000100

Правильное деление на степень двойки(1)

- Частное от деления знакового на степень двойки
  - Необходимо $\lceil x / 2^k \rceil$ (Округление к 0)
  - Вычисляется как $\lfloor (x+2^k-1) / 2^k \rfloor$
    - В Си: `(x + (1<<k)-1) >> k`
    - Смещение делимого к 0

Вариант 1: Без округления

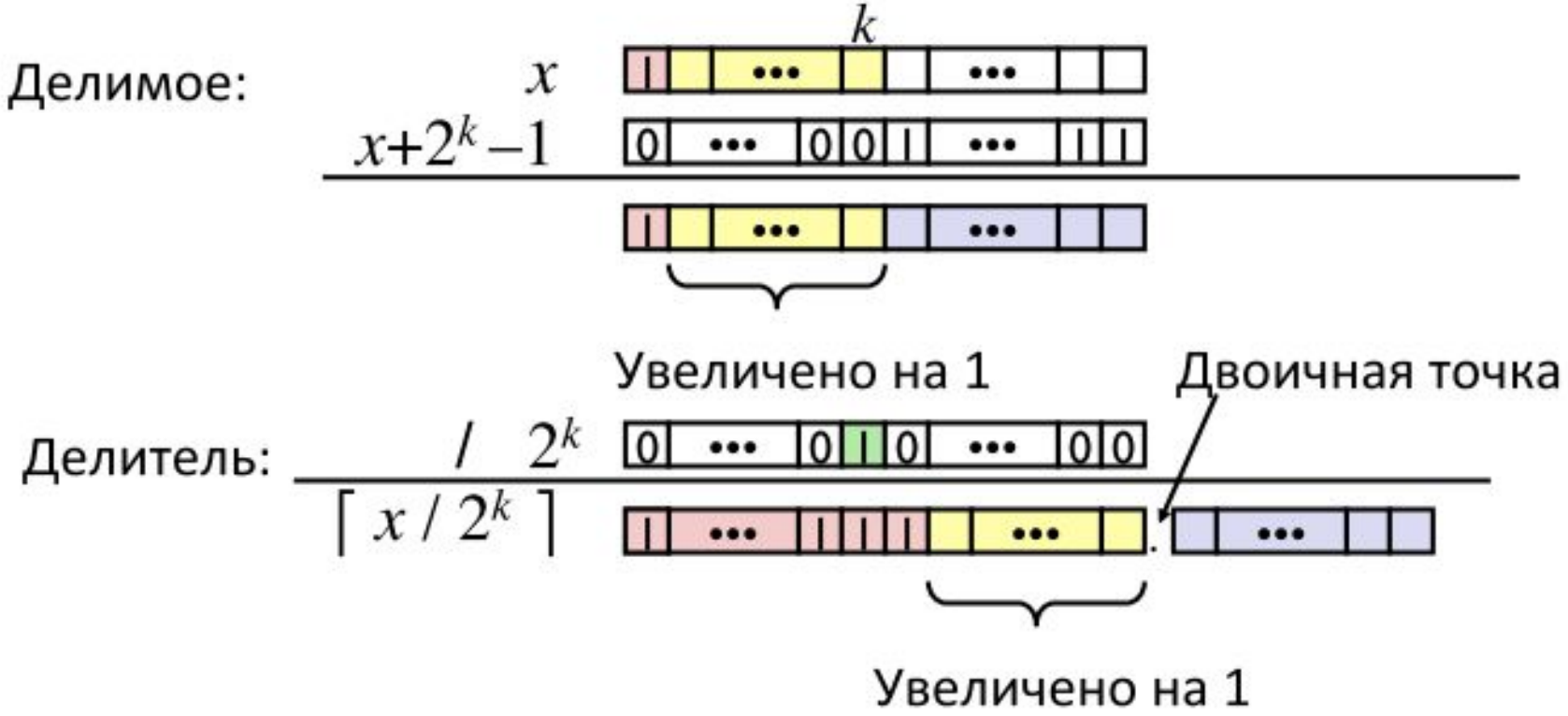


Смещение не имеет эффекта

- Пример
- -5 делим на 2 –Ю сдвиг вправо на 1
- 1011 1101 –> -3, а не -2
- Добавляем смещение 1<<2 -1 = 2 -1 =1
- 1011+1 =1100 сдвиг на 1 разряд вправо получаем 1110 -> -2

Правильное деление на степень двойки(2)

Вариант 2: округление



Смещение добавляет 1 к результату

Компилированный код деления знакового

Функция Си

```
int idiv8(int x)
{
  return x/8;
}
```

```
test   eax, eax
       js     L4
L3:    sar    eax, 3
       ret
L4:    add    eax, 7
       jmp    L3
```

Арифметические операции в результате компиляции

```
  testl %eax, %eax
  js    L4
L3:
  sarl $3, %eax
  ret
L4:
  addl $7, %eax
  jmp  L3
```

Пояснения

```
if x < 0
   x += 7;
# Арифметический сдвиг
return x >> 3;
```

- Арифметический сдвиг int
- Для пользователей Ява
  - Арифм. сдвиг пишется как >>

Арифметика: основные правила(1)

- Сложение:
  - (Без)знаковые: Нормальное сложение с отсечением, идентичные действия с битами
  - Беззнаковые: сложение по модулю 2^w
    - Математическое сложение и возможное уменьшение на 2^w
  - Знаковые: изменённое сложение по модулю 2^w (результат в допустимом диапазоне)
    - Математическое сложение и возможное добавление или уменьшение на 2^w
- Умножение:
  - (Без)знаковые: Нормальное умножение с отсечением, разные действия с битами
  - Беззнаковые: умножение по модулю 2^w
  - Знаковые: изменённое умножение по модулю 2^w (результат в допустимом диапазоне)

Арифметика: основные правила(2)

- Сдвиг влево
  - Беззнаковые: умножение на 2^k
  - Всегда логический сдвиг
- Сдвиг вправо
  - Беззнаковые: логический сдвиг, деление на 2^k с округлением к 0
  - Знаковые: арифметический сдвиг
    - Положительные: деление на 2^k с округлением к 0
    - Отрицательные: деление на 2^k с округлением от 0 используется смещение для исправления

Зачем использовать беззнаковые?

- *Не используйте только потому, что величина число неотрицательное*
  - Легко сделать ошибку

```
unsigned i;
for (i = cnt-2; i >= 0; i--)
  a[i] += a[i+1];
```

  - Может быть очень коварным

```
#define DELTA sizeof(int)
int i;
for (i = CNT; i-DELTA >= 0; i-= DELTA)
  . . .
```

- *Используйте* для представления множеств
  - Логический сдвиг вправо, без расширения знака

Целочисленные головоломки Си

- Для каждого следующего выражения Си :
  - Либо объясните почему оно верно для любых значений аргументов
  - Либо - почему неверно

Инициализация

```
int x = function1();

int y = funciton2();

unsigned ux = x;

unsigned uy = y;
```

- x < 0 ⇒ ((x*2) < 0)
- ux >= 0
- x & 7 == 7 ⇒ (x<<30) < 0
- ux > -1
- x > y ⇒ -x < -y
- x * x >= 0
- x > 0 && y > 0 ⇒ x + y > 0
- x >= 0 ⇒ -x <= 0
- x <= 0 ⇒ -x >= 0
- (x|-x)>>31 == -1
- ux >> 3 == ux/8
- x >> 3 == x/8
- x & (x-1) != 0

1. `(x >= 0) || ((2*x) < 0)`. Ложно. Пусть `x` будет равным –2147483648 ($TMin_{32}$). Тогда получим, что `2*x` будет равно 0.

2. `(x & 7) != 7 || (x<<30 < 0)`. Истинно. Если `(x & 7) != 7` стремится к нулю, тогда должен быть бит x_2, равный единице. При сдвиге влево на 30 получится знаковый разряд (бит).

3. `(x * x) >= 0`. Ложно. Когда `x` равно 65535 (`0xFFFF`), `x*x` равно –131071 (`0xFFFE0001`).

4. `x < 0 || -x <= 0`. Истинно. Если `x` — неотрицательная величина, тогда `-x` — величина не положительная.

5. `x > 0 || -x >= 0`. Ложно. Пусть `x` равно –2147483648 ($TMin_{32}$). Тогда `x` и `-x` отрицательные величины.

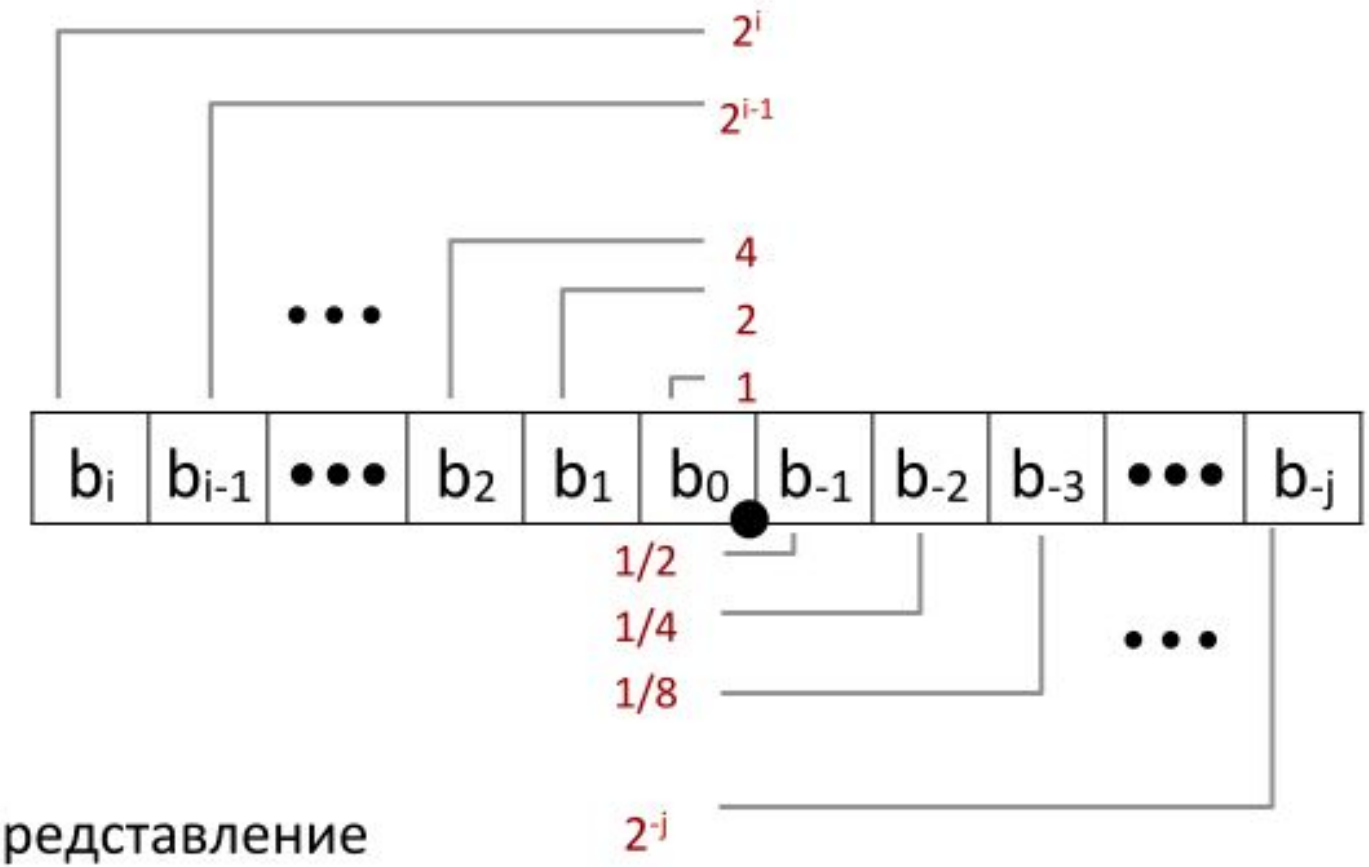
Плавающая точка

- Основы: Двоичные дроби
- Стандарт «плавающей точки» IEEE : Определение
- Примеры и свойства
- Округление, сложение, умножение
- Плавающая точка в Си
- Сводка

Двоичные дроби

- Что такое 1011.101_2?

Двоичные дроби



- Представление
  - Биты справа от «двоичной точки» представляют дробные степени 2
  - Представление рациональных чисел:

$$\sum_{k=-j}^{i} b_k \times 2^k$$

Двоичные дроби: Примеры

- Значение — Представление
  - 5 и 3/4 — 101.11_2
  - 2 и 7/8 — 10.111_2
  - 1 и 7/16 — 1.0111_2
  - 23/32 — 0.10111_2

- Важно
  - Деление на 2 сдвигом вправо
  - Умножение на 2 сдвигом влево
  - Числа вида $0.111111\ldots_2$ меньше 1.0
    - $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^i + \ldots \rightarrow 1.0$
    - Обозначим $1.0 - \varepsilon$

Представимые числа

- Ограничения
  - Двоичными дробями точно представимы только числа вида $n/2^k$
  - Другие дроби представимы бесконечными периодическими «дробями»

- Значение Представление
  - 1/3 0.01[01]…2
  - 1/5 0.0011[0011]…2
  - 1/10 0.00011 [0011]…2

Плавающая точка IEEE

- Стандарт IEEE 754
  - Принят в 1985 как единый стандарт арифметики с плавающей точкой
    - До этого множество уникальных стандартов
  - Поддерживается всеми основными CPU/FPU
- В основе - вопросы вычислений
  - Удачно стандартизованы
    - округления,
    - переполнения,
    - потеря значимости
  - Сложно сделать быстрым в аппаратуре
    - При создании стандарта численные аналитики доминировали над разработчиками аппаратуры
  - Есть реализации «с отклонениями»
- Есть версии и альтернативы

Представление с плавающей точкой

- Численная форма:

$$(-1)^s \, M \, 2^E$$

  - Знаковый бит **s** определяет положительность/отрицательность
  - Мантисса **M** - обычно дробь в интервале [1.0,2.0).
  - Порядок **E** изменяет значение на степень двойки

- Кодирование
  - Наиболее значимый бит **s** – знаковый
  - Поле **exp** кодирует **E**, но не совпадает с двоичным значением **E**
  - Поле **frac** кодирует **M**, но не совпадает с двоичным значением **M**

Представление вещественных чисел в ЭВМ на базе процессора INTEL

- $1_2 \le m < 10_2$

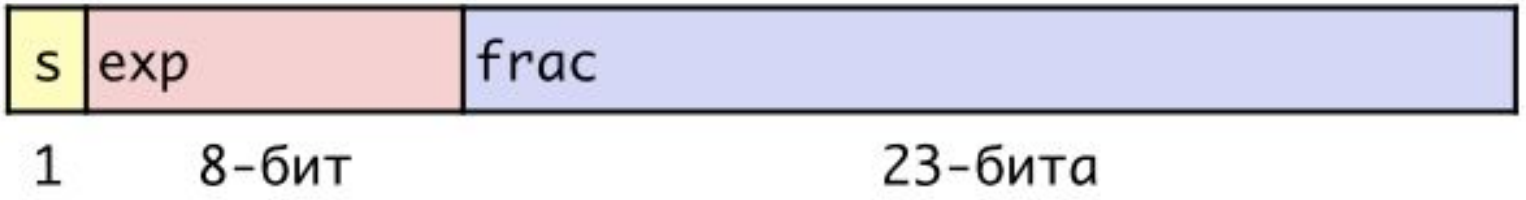
	Знак числа	Порядок	Смещение порядка	Мантисса
Короткое	31	30-23	127	22-0
Длинное	63	62-52	1023	51-0
Расширенное	79	78-64	16383	63-0

$-1.0_{10} = -1.0e0_2 = 1\ 01111111\ 000\ldots_2 = BF800000_{16}$

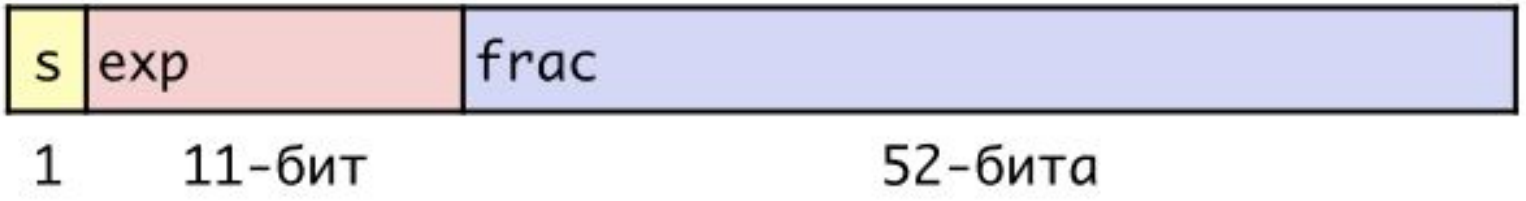
$5.25_{10} = 101.01_2 = +1.0101E+10_2 = 0\ 10000001\ 010100\ldots_2 = 40A80000_{16}$

Применяемые точности

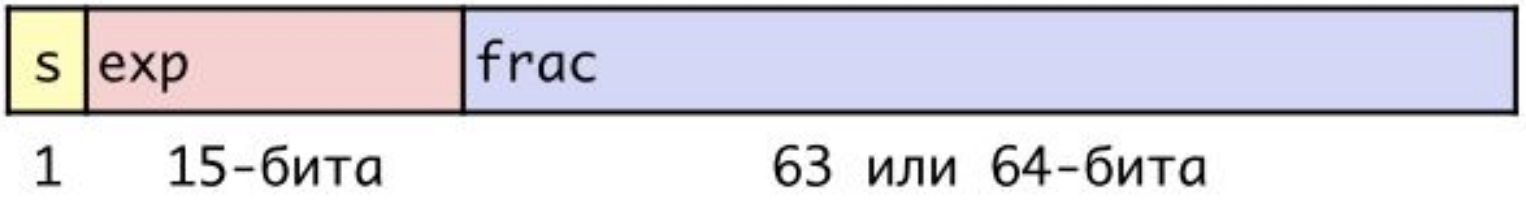
- Одинарная: 32 бита



- Двойная: 64 бита



- Расширенная: 80 бит (только для Intel)



Нормализованные значения

- Признак: exp ≠ 000…0 и exp ≠ 111…1

- Порядок кодируется со смещением : E = Exp – Bias
  - Exp: беззнаковое значение поля **exp**
  - Bias = $2^{k-1} - 1$, где k - количество бит порядка – смещение
    - Одинарная точность: 127 (Exp: 1…254, E: -126…127)
    - Двойная точность: 1023 (Exp: 1…2046, E: -1022…1023)

- Код мантиссы подразумевает старшую 1: M = $1.xxx…x_2$
  - xxx…x: биты поля **frac**
  - Минимальное значение M = 1.0 , когда **frac** = 000…0
  - Минимальное значение M = 2.0 – ε , когда **frac** = 111…1
  - Старший бит мантиссы не расходует ресурсы оборудования
  - Не подразумевается для расширенной точности 80-бит Intel !

Пример нормализованного кода

- Значение: `Float F = 15213.0;`
  - $15213_{10} = 11101101101101_2$
    $= 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$

- Мантисса

  $M = 1.\underline{1101101101101}_2$

  frac= $\underline{1101101101101}0000000000_2$

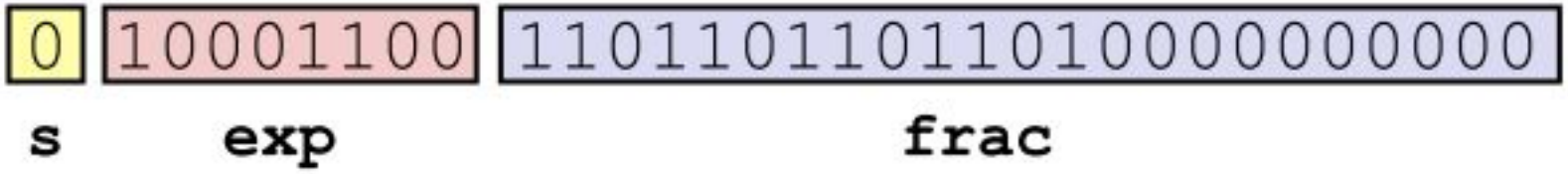
- Порядок

  $E = 13$

  $Bias = 127$

  $Exp = 140 = 10001100_2$

- Результат:

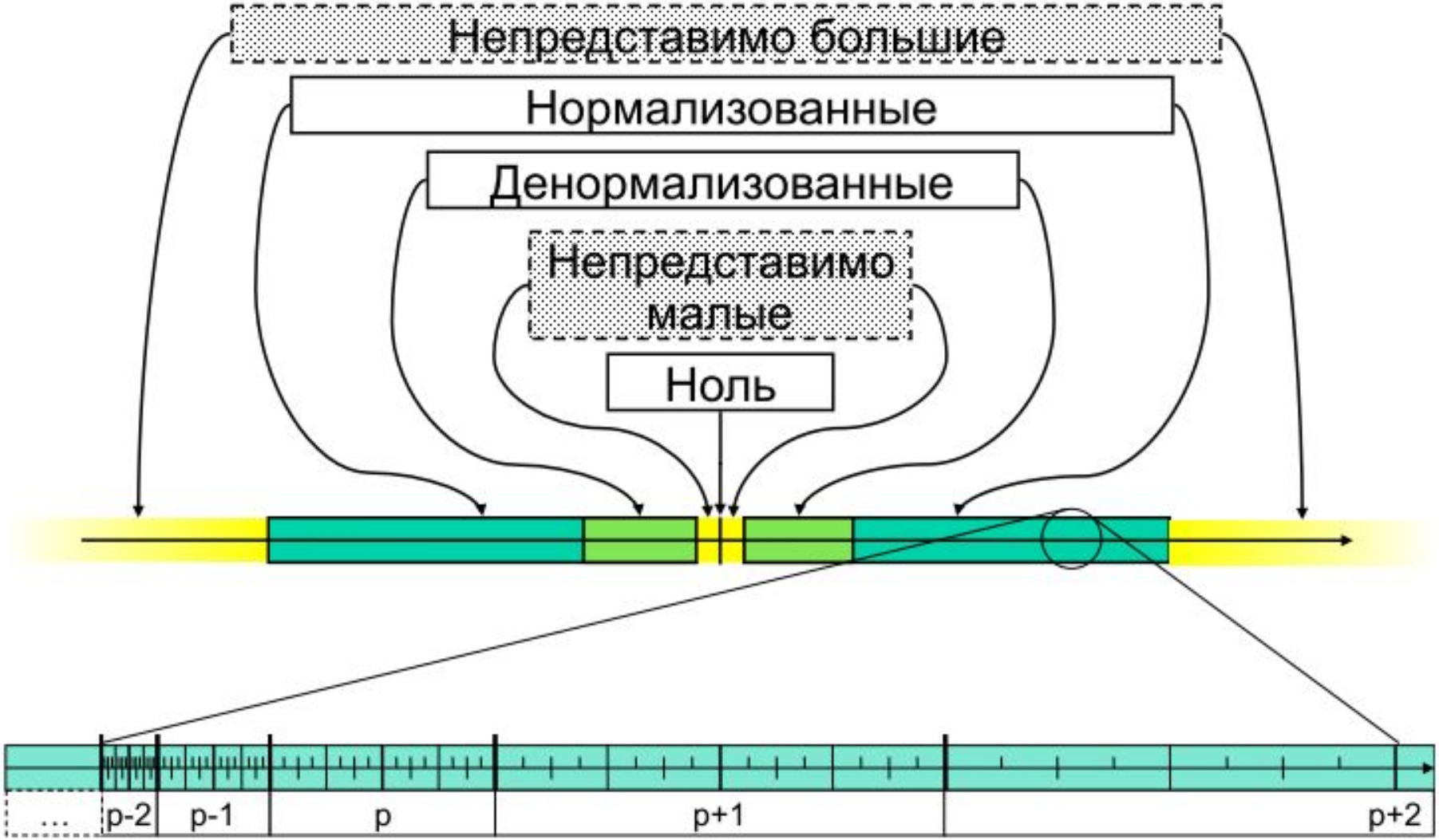


Денормализованные значения

- Признак: **exp** = 000…0

- Значение порядка: E = 1–Bias (вместо E = 0 – Bias)
- Код мантиссы подразумевает старший 0: M = 0.xxx…x_2
  - xxx…x: биты **frac**
- Варианты
  - **exp** = 000…0, **frac** = 000…0
    - Обозначает нулевое значение
    - Представление неоднозначно: +0 and –0 (почему?)
  - **exp** = 000…0, **frac** ≠ 000…0
    - числа очень близкие к 0.0
    - чем меньше, тем хуже относительная погрешность
    - равноотстоящие

Что (не)представимо ?



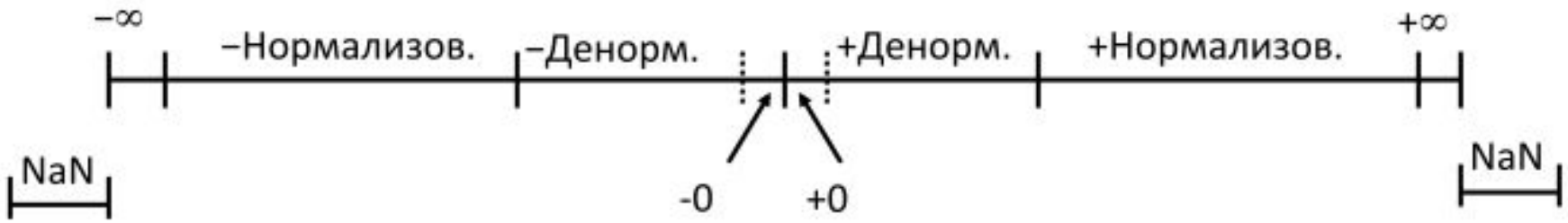
Специальные коды

- Признак: `exp` = 111…1

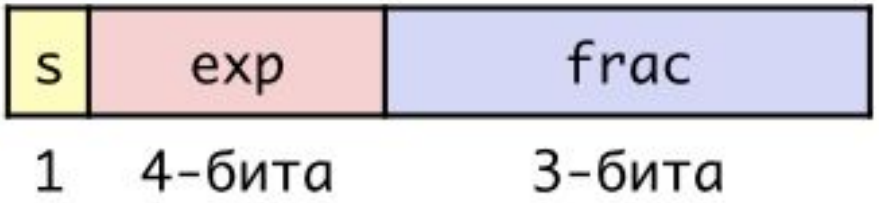
- Вариант 1: `exp` = 111…1, `frac` = 000…0
  - Обозначает значение ∞ (бесконечность)
  - Результат операции при переполнении
  - Есть оба варианта: отрицательная и положительная
  - E.g., 1.0/0.0 = −1.0/−0.0 = +∞, 1.0/−0.0 = −∞

- Вариант 2: `exp` = 111…1, `frac` ≠ 000…0
  - Не число, Not-a-Number (NaN)
  - Обозначает случаи когда невозможно определить численное значение
  - Примеры: sqrt(−1), ∞ − ∞, ∞ × 0

Коды с плавающей точкой визуально



Укороченный пример с плавающей точкой



- 8-битное представление с плавающей точкой
  - Знаковый бит – самый значимый
  - следующие четыре бита - показатель со смещением $2^{4-1}-1 = 7$
  - последние три бита - код мантиссы

- Форма таже что в стандарте IEEE
  - нормализованные и денормализованные
  - обозначаются 0, NaN, бесконечность

Динамический диапазон

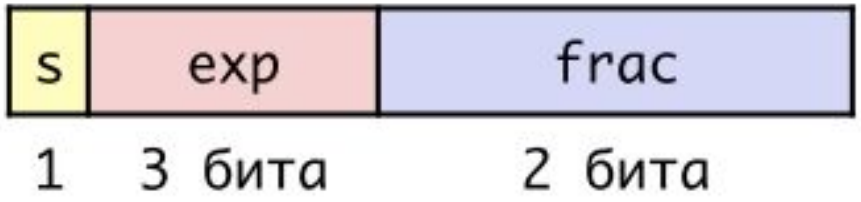
	s	exp	frac	E	Значение	
Деномализ. числа	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	Ближайшее к нулю
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	
	…					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	Наибольшее денорм.
Нормализов. числа	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	Наименьшее нормализ.
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	
	…					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	Ближайшее к 1 снизу
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	Ближайшее к 1 сверху
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	…					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	Наибольшее нормализ.
	0	1111	000	n/a	inf	

Таблица 2.17. *Пример гипотетического 8-битового формата*

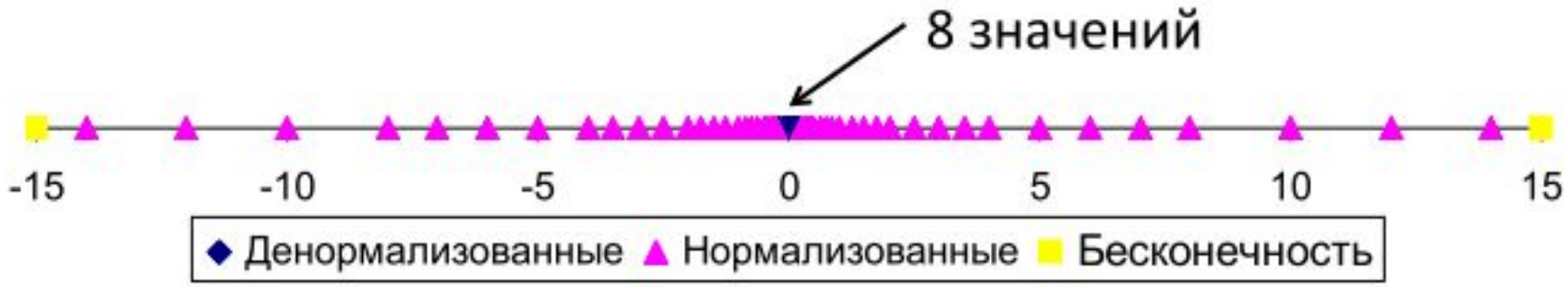
Описание	Битовое представление	e	E	f	M	V
Ноль	0 0000 000	0	–6	0	0	0
Наименьшее положительное	0 0000 001	0	–6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{512}$
	0 0000 010	0	–6	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{512}$
	0 0000 011	0	–6	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{512}$
	...					
	0 0000 110	0	–6	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{512}$
Наибольшее ненормализованное	0 0000 111	0	–6	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{512}$
Наименьшее нормализованное	0 0001 000	1	–6	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{512}$
	0 0001 001	1	–6	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{512}$
	...					
	0 0110 110	6	–1	$\frac{6}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{14}{16}$
	0 0110 111	6	–1	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{16}$
Единица	0 0111 000	7	0	0	$\frac{8}{8}$	1
	0 0111 001	7	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
	0 0111 010	7	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{9}{8}$
	...					
	0 1110 110	14	7	$\frac{6}{8}$	$\frac{14}{8}$	224
Наибольшее нормализованное	0 1110 111	14	7	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	240
Бесконечность	0 1111 000	–	–	–	–	$+\infty$

Распределение значений

- Шестибитный формат подобный IEEE
  - 3 бита порядка
  - 2 дробных бита
  - смещение: $2^{3-1}-1 = 3$



- Сгущение вокруг 0



6 битов
к=3 порядок
n=2 мантисса
смещение = 3

Описание	битовое представление	e	E	f	M	V
ноль	0 000 00	0	-2	0	0	0
наименьшее положительно	0 000 01	0	-2	1/4	1/4	1/16
	0 000 10	0	-2	2/4	2/4	2/16
	.....					
наибольшее ненормализов	0 000 11	0	-2	3/4	3/4	3/16
наименьшее нормализован	0 001 00	1	-2	0	4/4	4/16
	0 001 01	1	-2	1/4	5/4	5/16
	.....					
	0 010 10	2	-1	2/4	6/4	6/8
	0 010 11	2	-1	3/4	7/4	7/8
единица	0 011 00	3	0	0	4/4	1
	0 011 01	3	0	1/4	5/4	5/4
	.....					
	0 110 10	6	3	2/4	6/4	12
наибольшее нормализован	0 110 11	6	3	3/4	7/4	14
бесконечность	0 111 00	--	--	--	--	+--
	0 111 01	--	--	--	--	NaN
	0 111 10	--	--	--	--	NaN
	0 111 11	--	--	--	--	NaN

•Представление вещественных чисел в ЭВМ на базе процессора INTEL

- Знаковые нули
- Денормализованные конечные числа
- Нормализованные конечные числа
- Знаковые бесконечности
- NaN (нечисла)
- Неопределимые числа

Описание	exp	frac	Одинарная точность		Удвоенная точность	
			Значение	Десятичное	Значение	Десятичное
Ноль	00...00	00...00	0	0.0	0	0.0
Наименьшее ненормализованное	00...00	0...01	$2^{-23} \times 2^{-126}$	1.4×10^{-45}	$2^{-52} \times 2^{-1022}$	4.9×10^{-324}
Наибольшее ненормализованное	00...00	1...11	$(1-\epsilon) \times 2^{-126}$	1.2×10^{-38}	$(1-\epsilon) \times 2^{-1022}$	2.2×10^{-308}
Наименьшее нормализованное	00...01	0...00	1×2^{-126}	1.2×10^{-38}	1×2^{-1022}	2.2×10^{-308}
Единица	01...11	0...00	1×2^{0}	1.0	1×2^{0}	1.0
Наибольшее нормализованное	11...10	1...11	$(2-\epsilon) \times 2^{127}$	3.4×10^{38}	$(2-\epsilon) \times 2^{1023}$	1.8×10^{308}

Интересные числа

{одинарные, двойные}

Описание	*exp*	*frac*	*Численное значение*
■ Ноль	00…00	00…00	0.0
■ Наименьшее денормализ.	00…00	00…01	$2^{-\{23,52\}} \times 2^{-\{126,1022\}}$
▪ Одинарное ≈ 1.4×10^{-45}			
▪ Двойное ≈ 4.9×10^{-324}			
■ Наибольшее денормализ.	00…00	11…11	$(1.0 - \varepsilon) \times 2^{-\{126,1022\}}$
▪ Одинарное ≈ 1.18×10^{-38}			
▪ Двойное ≈ 2.2×10^{-308}			
■ Наименьшее нормализ.	00…01	00…00	$1.0 \times 2^{-\{126,1022\}}$
▪ Ближайшее большее наибольшего денормализованного			
■ Единица	01…11	00…00	1.0
■ Наибольшее нормализ.	11…10	11…11	$(2.0 - \varepsilon) \times 2^{\{127,1023\}}$
▪ Одинарное ≈ 3.4×10^{38}			
▪ Двойное ≈ 1.8×10^{308}			

Сравнение целых чисел и чисел с плавающей точкой

- 12345 и 12,345
- 0x3039 00000000000000003039*1100000011001*
- 1.1000000111001x2^{13} 13+127=140 10001100
- 0x4640E400
- 01000110*10000001110010*0000000000

Операции с плав. точкой: Основная идея

- $x +_f y = \text{Round}(x + y)$
- $x \times_f y = \text{Round}(x \times y)$
- Основная идея
  - Сначала вычислить полный результат
  - Затем втиснуть его в желаемую точность
    - Возможно с переполнением, если порядок слишком велик
    - Возможно с округлением, чтобы уместиться во **`frac`**

Округление

Режим округления	1.40	1.60	1.50	2.50	–1.50
К нулю	1	1	1	2	–1
Вниз (−∞)	1	1	1	2	–2
Вверх (+∞)	2	2	2	3	–1
К чётному (по умолч.)	1	2	2	2	–2

- В чём преимущества режимов?

Подробнее об округлении к чётному

- Режим округления по умолчанию
  - Любой другой режим требует обращения к ассемблеру
  - Все остальные режимы дают статистический сдвиг
    - Сумма округлённых устойчиво меньше или устойчиво больше округлённой суммы

- Применяя к десятичным разрядам
  - Если точно посередине между двумя возможными значениями
    - Округляется так, что младшая цифра чётная
  - Например, округление к ближайшей сотой

1.2349999	1.23	(Меньше половины - вниз)
1.2350001	1.24	(Больше половины - вверх)
1.2350000	1.24	(Половина - вверх)
1.2450000	1.24	(Половина - вниз)

Округление двоичных чисел

- Двоичные дроби
  - “Чётные” когда наименьший бит = 0
  - “Половина” когда биты справа от позиции округления = $100\ldots_2$

- Примеры
  - Округление к 1/4 (2 бита справа от двоичной точки)

Значение	Двоичное	Двоичное Округление	Действие	Округлённое Значение
2 3/32	10.00011_2	10.00_2	(<1/2—вниз)	2
2 3/16	10.00110_2	10.01_2	(>1/2—вверх)	2 1/4
2 7/8	10.11100_2	11.00_2	(1/2—вверх)	3
2 5/8	10.10100_2	10.10_2	(1/2—вниз)	2 1/2

Умножение с плавающей точкой

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ x\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
- Полный результат: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Знак s: s1 ^ s2
  - Мантисса M: M1 x M2
  - Порядок E: E1 + E2

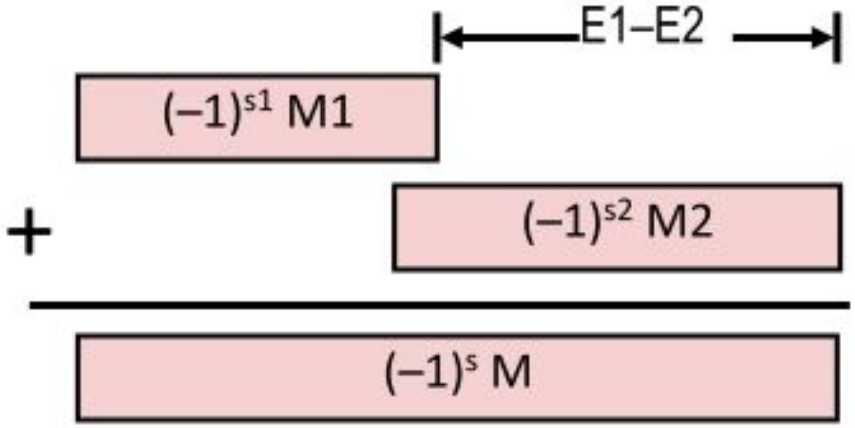
- Нормализация
  - Если M ≥ 2, сдвинуть M вправо, увеличив E
  - Если E за рамками, то переполнение
  - Округлить M чтобы уложиться в точность **`frac`**

- Реализация
  - Трудоёмкая часть - перемножение мантисс

Сложение с плавающей точкой

- $(-1)^{s1}$ M1 2^{E1} + $(-1)^{s2}$ M2 2^{E2}
  - Предположим E1 > E2

- Полный результат: $(-1)^{s}$ M 2^{E}
  - Знак s, мантисса M:
    - Результат знакового выравнивания и сложения
  - Порядок E: E1



- Нормализация
  - Если M ≥ 2, сдвинуть M вправо, увеличив E
  - Если M < 1, сдвинуть M влево на k разрядов, уменьшив E на k
  - Если E за рамками, то переполнение
  - Округлить M чтобы уложиться в точность **`frac`**

```
x = a + b + c;
y = b + c + d;
```

```
t = b + c;
x = a + t;
y = t + d;
```

Математические свойства сложения с ПТ

- Сравним со свойствами абелевой группы
  - Замкнута относительно сложения ? Да
    - Может выдавать бесконечность или нечисло
  - Коммутативно ? Да
  - Ассоциативно ? Нет
    - Переполнение и округление!
  - Ноль – нейтральный элемент ? Да
  - Каждый элемент имеет обратный ? Почти
    - Кроме бесконечности и NaN
- Монотонность
  - $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$? Почти
    - Кроме бесконечности и NaN

Математические свойства умножения с ПТ

- Сравним со свойствами коммутативного кольца
  - Замкнут относительно умножения ? Да
    - Может выдавать бесконечность или нечисло
  - Умножение коммутативно ? Да
  - Умножение ассоциативно ? Нет
    - Переполнение и округление!
  - Единица нейтральный элемент умножения ? Да
  - Умножение дистрибутивно относительно сложения ? Нет
    - Переполнение и округление!

- Монотонность
  - $a \geq b \ \& \ c \geq 0 \Rightarrow a * c \geq b * c$? Почти
    - Кроме бесконечностей и нечисел

Плавающая точка в Си

- Си гарантирует как минимум два уровня точности
  - `float` одиночная
  - `double` двойная
- Преобразования
  - Преобразование между `int`, `float`, и `double` меняет набор битов
  - `double`/`float` → `int`
    - Отсекает дробную часть
    - Подобно округлению к нулю
    - Не определено для запредельных или NaN: обычно TMin
  - `int` → `double`
    - Точное преобразование, т.к. `int` имеет разрядность ≤ 53 бит
  - `int` → `float`
    - Округляется в соответствии в режимом
- Промежуточные вычисления в расширенном формате (80 бит)

Головоломки плавающей точки

- Для каждого следующего выражения Си :
  - Либо объясните почему оно верно для любых значений аргументов
  - Либо - почему неверно

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

Принять, что
ни `d` ни `f` не есть NaN

- `x == (int)(float) x`
- `x == (int)(double) x`
- `f == (float)(double) f`
- `d == (float) d`
- `f == -(-f);`
- `2/3 == 2/3.0`
- `d < 0.0  ⇒  ((d*2) < 0.0)`
- `d > f  ⇒  -f > -d`
- `d * d >= 0.0`
- `(d+f)-d == f`