

Десятая Всероссийская командная олимпиада школьников по программированию

Разбор задач

14 ноября 2009 года

Санкт-Петербург

Задача А. Поедание сыра





Авторы задачи

- Автор задачи — Сергей Мельников
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Антон Ахи
- Разбор — Сергей Мельников

Общая идея

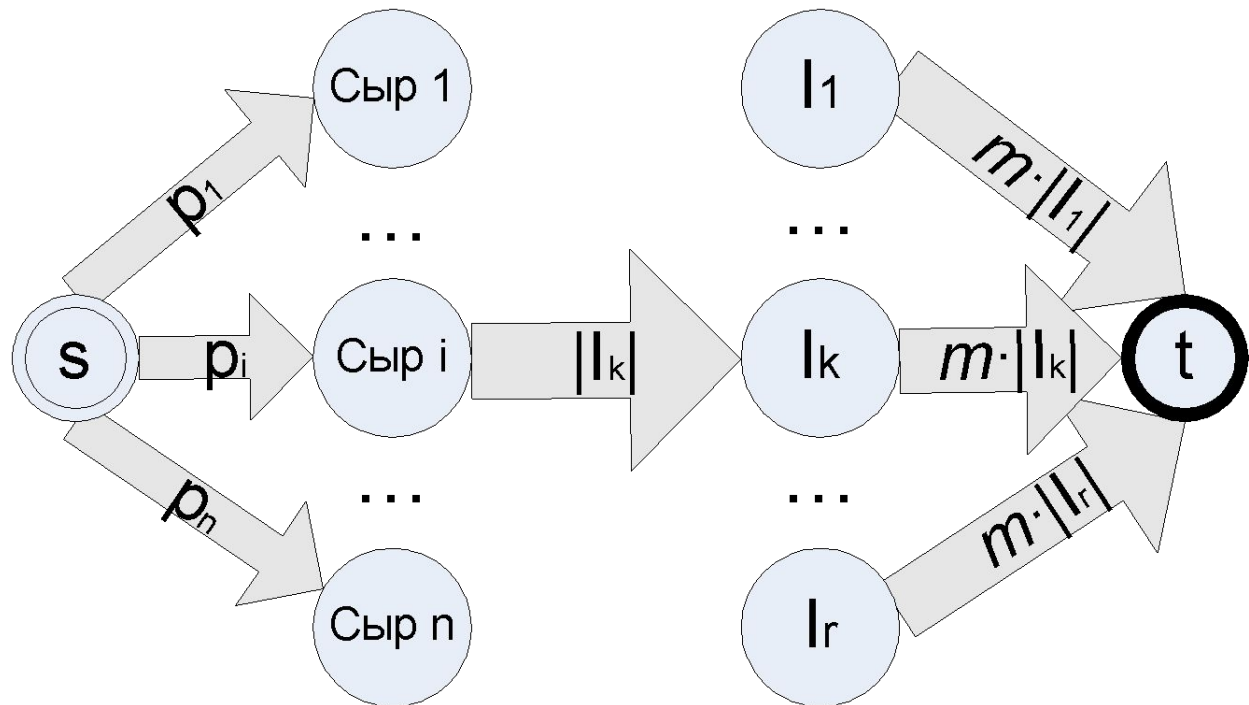
- Используем двоичный поиск по ответу
- Дано t , можно ли организовать поедание сыра, чтобы мыши не ели сыр более чем через t часов, после того как сыр начал портиться
- Обозначим $D_i = d_i + t$

Интересные интервалы

- Пусть T_i – все моменты времени r_i и D_i
- $T_1 < T_2 < \dots < T_n$
- Время разбивается на интервалы $[T_i, T_{i+1}]$
- Сыр или можно есть в течение всего интервала, или нельзя

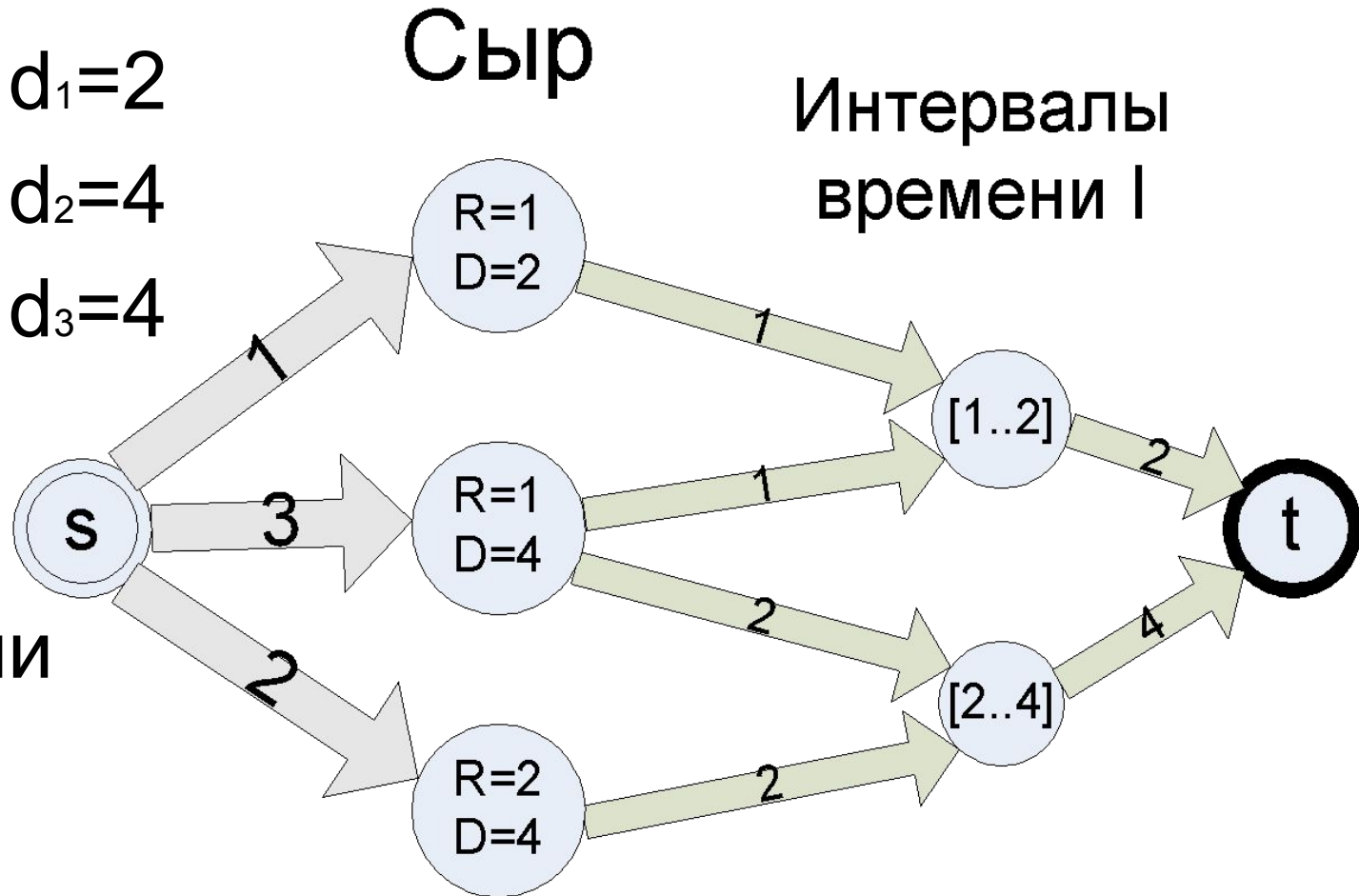
Скорости всех мышей равны 1

- Рассмотрим сеть
- В ней надо найти максимальный поток
- Можно, если все рёбра из s насыщены
- Ребро из сыра i в интервал k , если этот сыр можно есть в этот интервал



Скорости всех мышей равны 1

- Три сыра
- $p_1=1$ $r_1=2$ $d_1=2$
- $p_2=3$ $r_2=1$ $d_2=4$
- $p_3=2$ $r_3=2$ $d_3=4$



- Две мыши

Разные скорости мышей

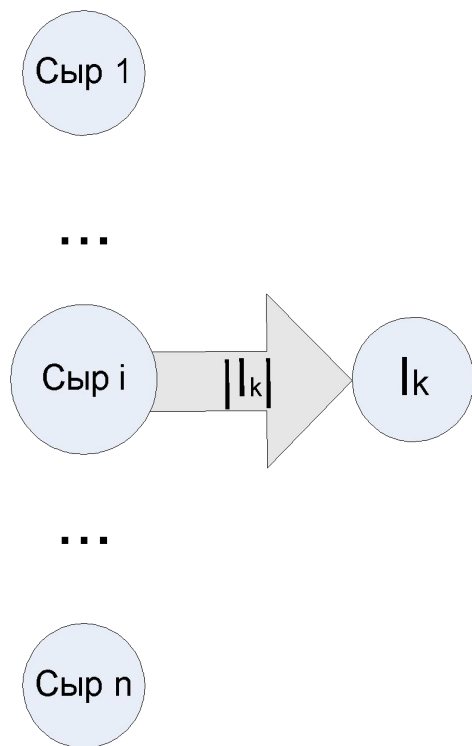
- Упорядочим мышей по неубыванию скоростей:

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$$

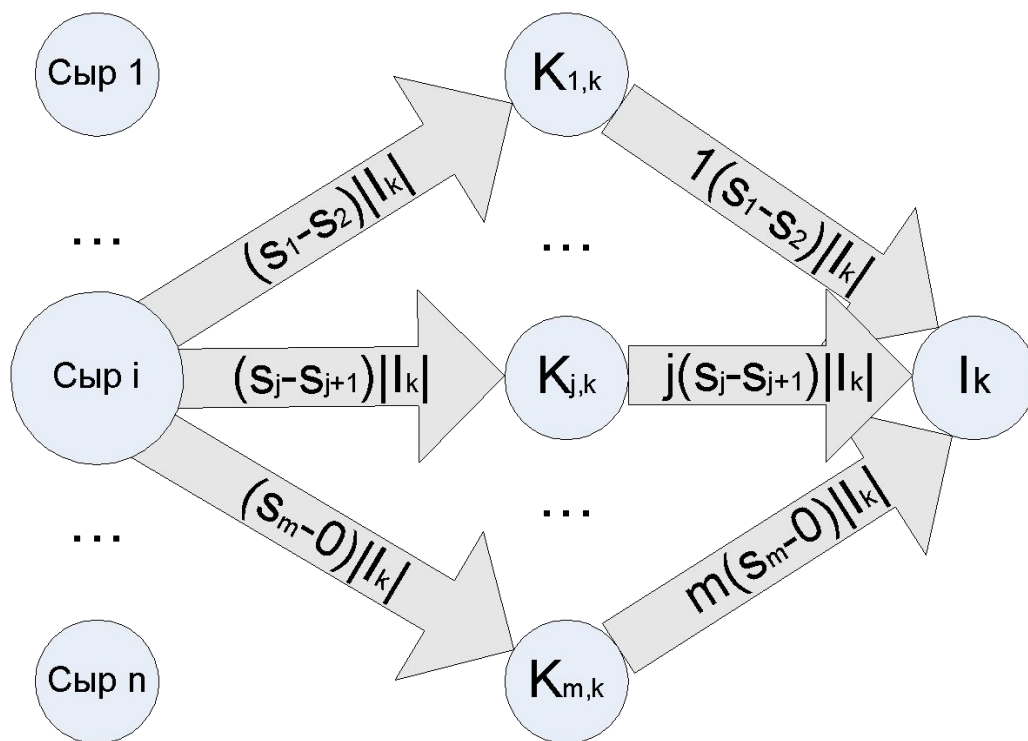
- Представим $(m-1)$ -ю мышь, как набор из мыши со скоростью s_m , и мыши со скоростью $s_{m-1}-s_m$
- Аналогично разобьем $(m-2)$ -ю мышь на 3 три мыши: s_m , $s_{m-1}-s_m$ и $s_{m-2}-s_{m-1}$
- И так далее

Модификация сети

Раньше было




Заменим, на такой фрагмент



$K_{j,k}$ – одни и те же разных i и одного lk

Общее решение

- Двоичный поиск
- Поток в специальной сети



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче А?

Задача В. Соревнования по программированию





Авторы задачи

- Автор задачи — Владимир Ульянов
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Антон Ахи
- Разбор — Антон Ахи

О чем задача?

- Дан список файлов и определения для каталогов с тестами, задач и описаний соревнований
- Необходимо посчитать количество описаний соревнований

Как решать?


- Восстановить полностью дерево каталогов и файлов
- Использовать символ «\» как разделитель имен в путях
- Для каждого каталога хранить список подкаталогов и файлов в нем, например с помощью хеш-таблицы

Как посчитать количество описаний соревнований?

- В получившемся дереве файлов/каталогов проверить про каждый каталог, является ли он каталогом с тестами, задачей или описанием соревнований
- Не забыть, что в каталоге с тестами могут быть подкаталоги

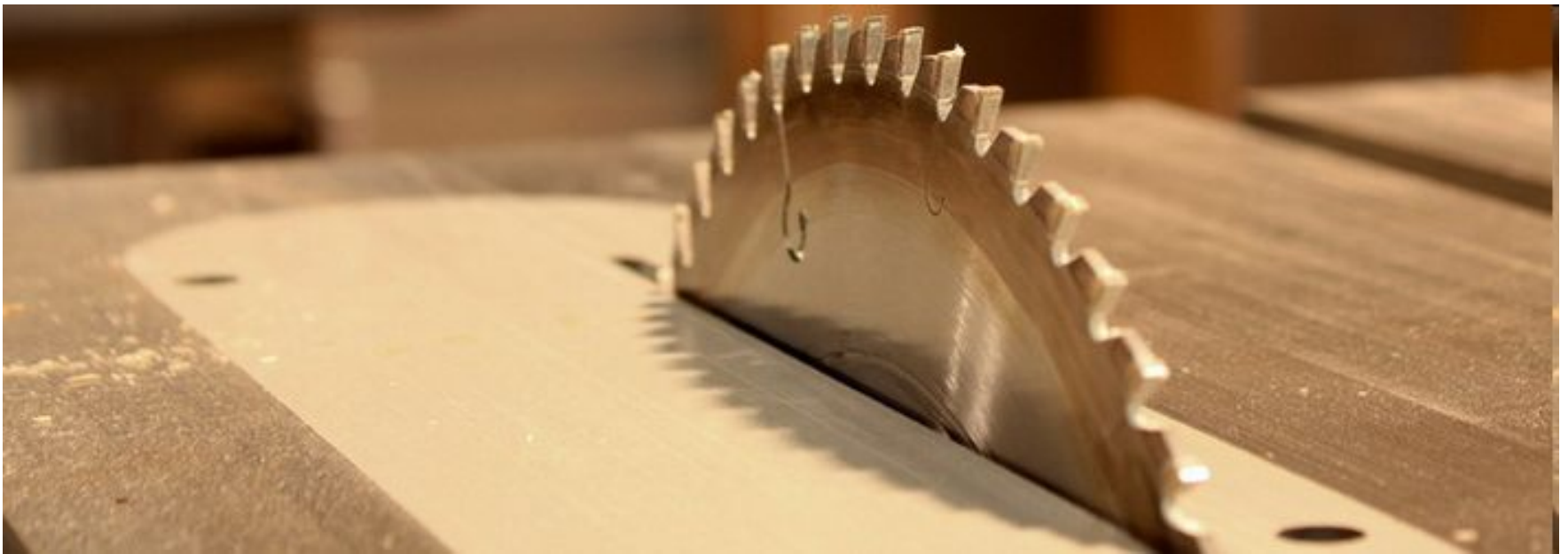
Сколько работает?

- Во входном файле задано не более 100000 файлов/каталогов
- Каждый каталог просматривается один раз



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче В?

Задача С. Распил



Авторы задачи

- Авторы задачи — Елена Андреева, Владимир Гуровиц
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Антон Банных
- Разбор — Антон Банных

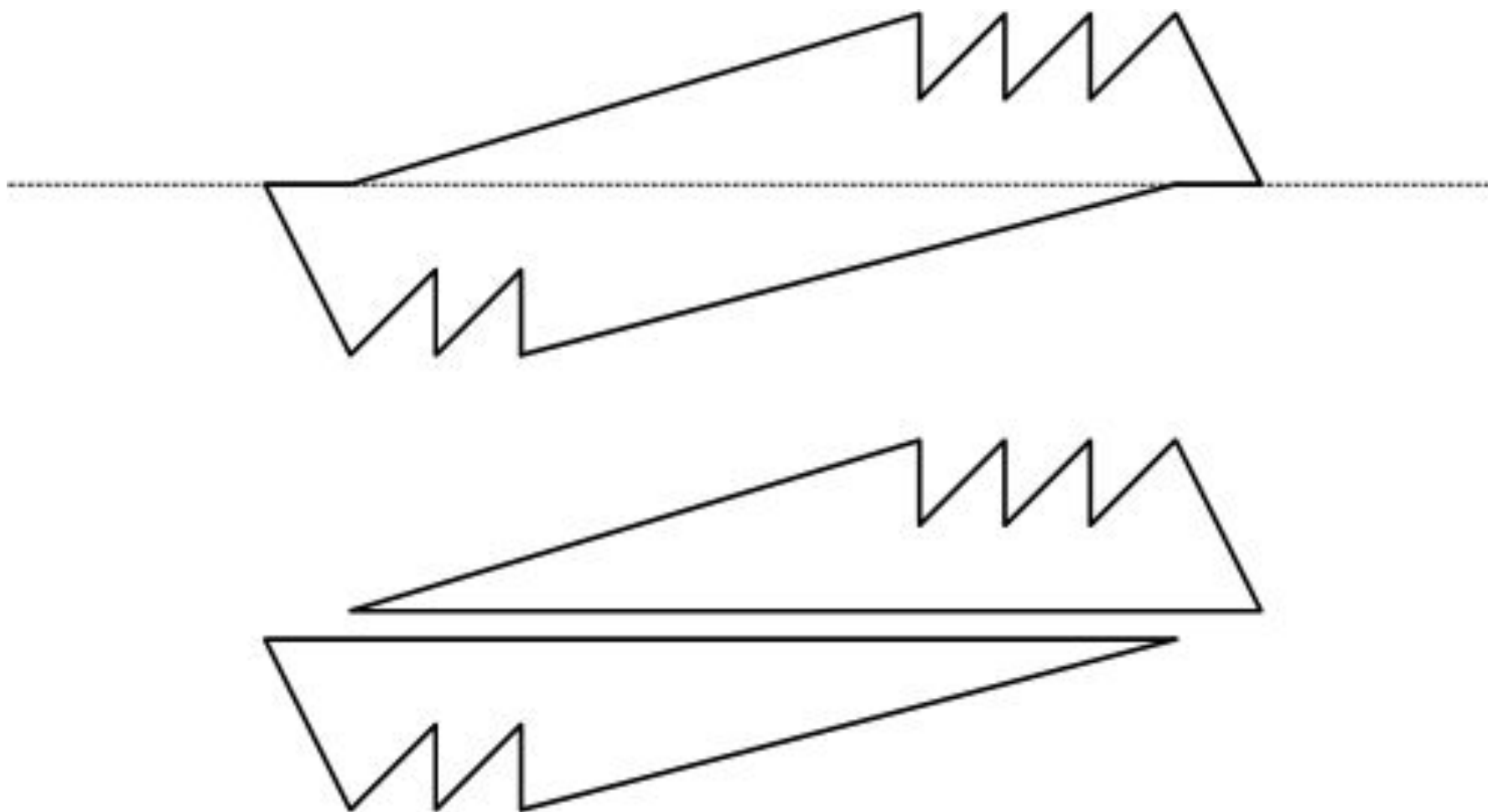
О чем задача?

- Придумать n -угольник, который можно распилить на k -угольник и m -угольник разрезом, проходящим через две его вершины.

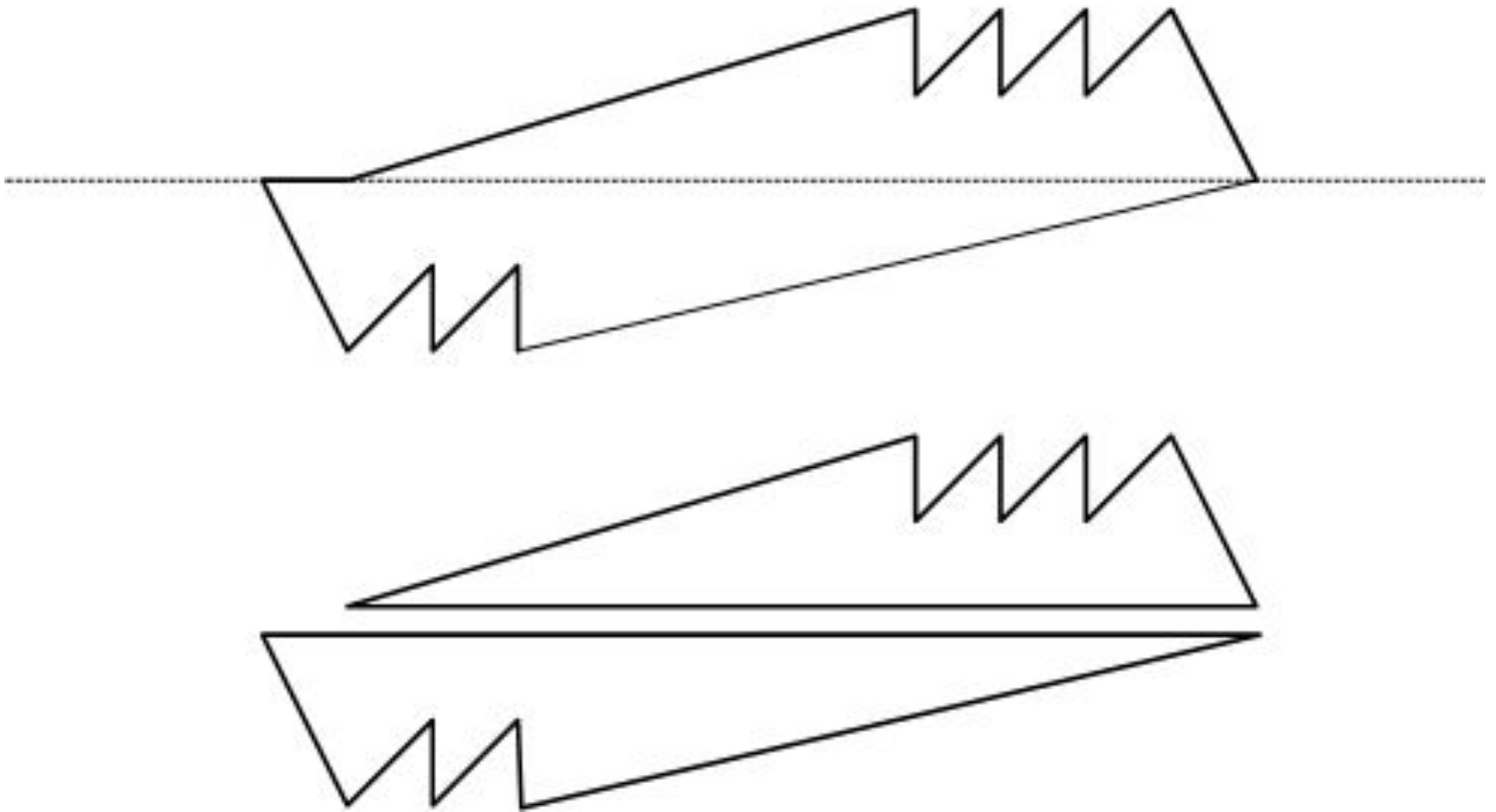
Какие n , m , k допустимы?

- Если $m + k - n \notin \{0..4\}$, решения нет.
- Иначе при достаточно больших n , m , k искомый многоугольник существует.

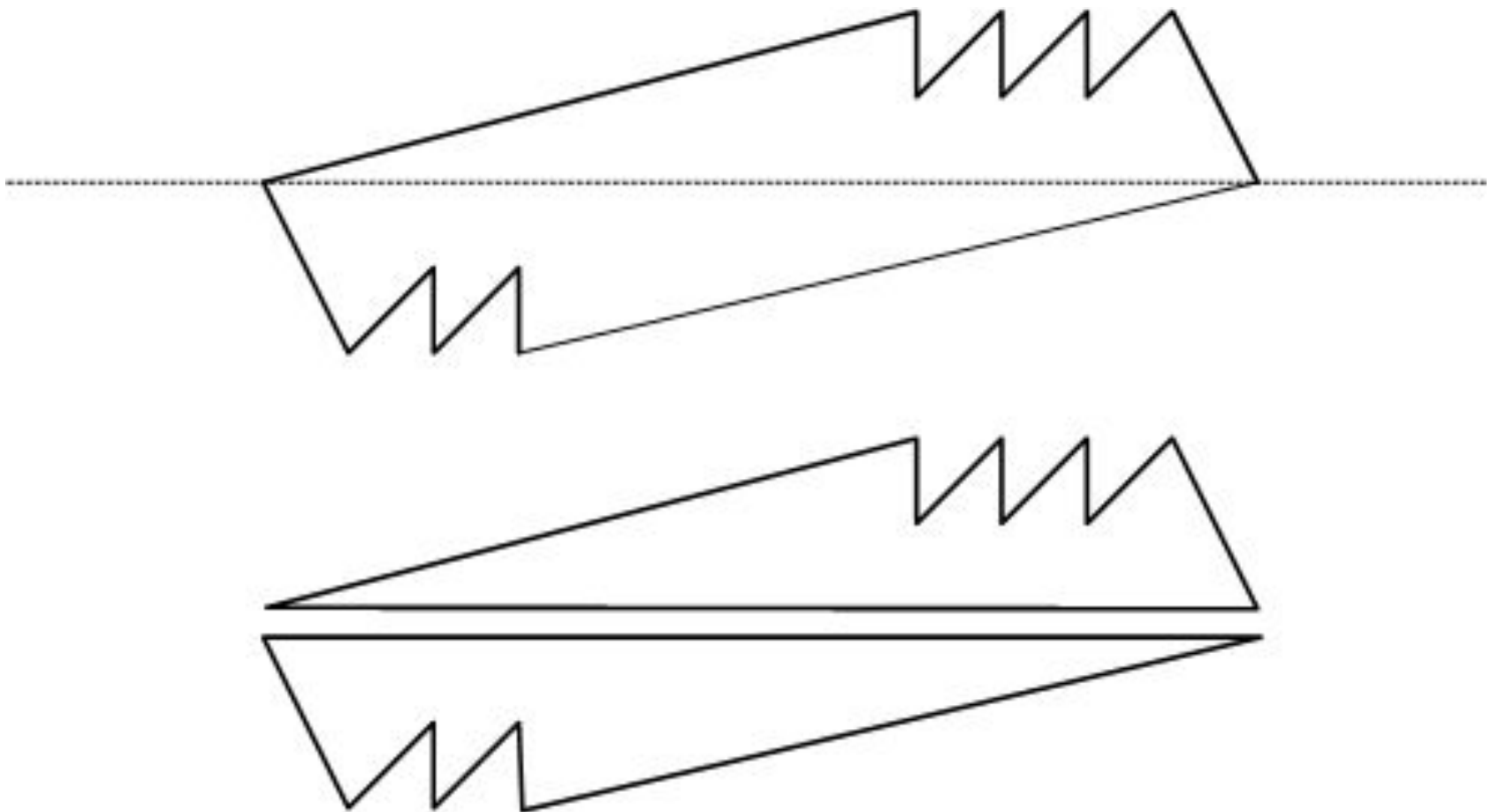
$$m + k = n$$



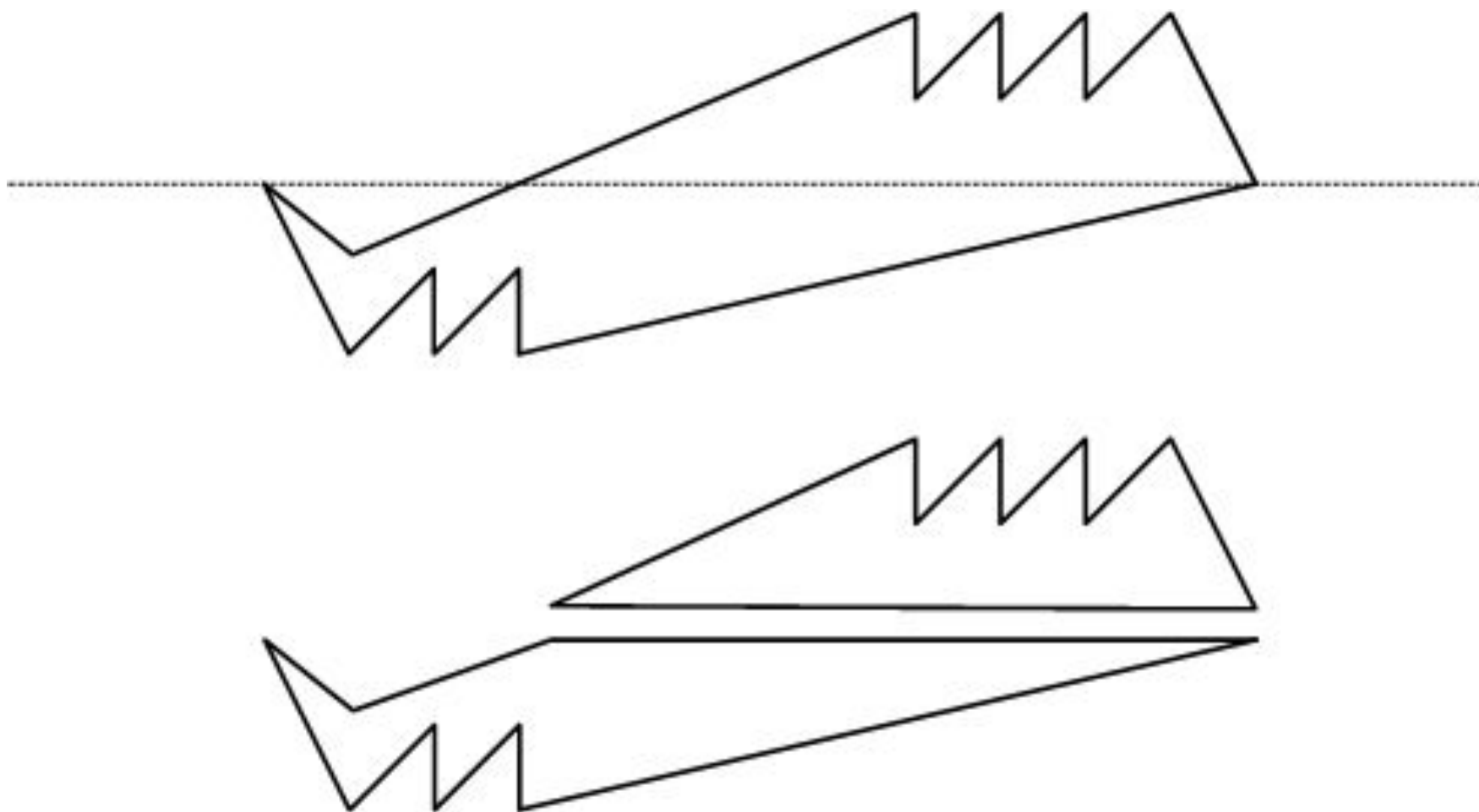
$$m + k = n + 1$$



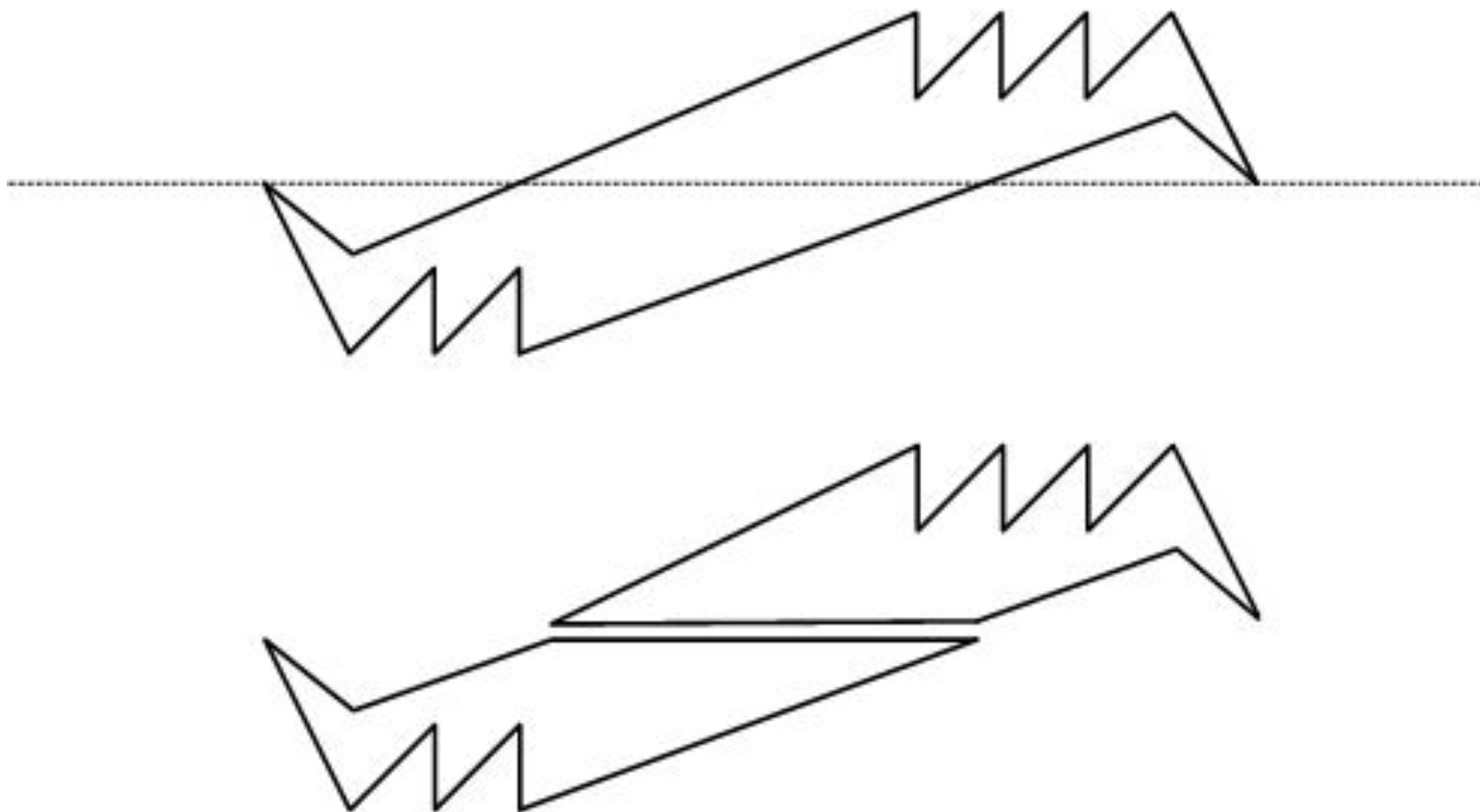
$$m + k = n + 2$$



$$m + k = n + 3$$

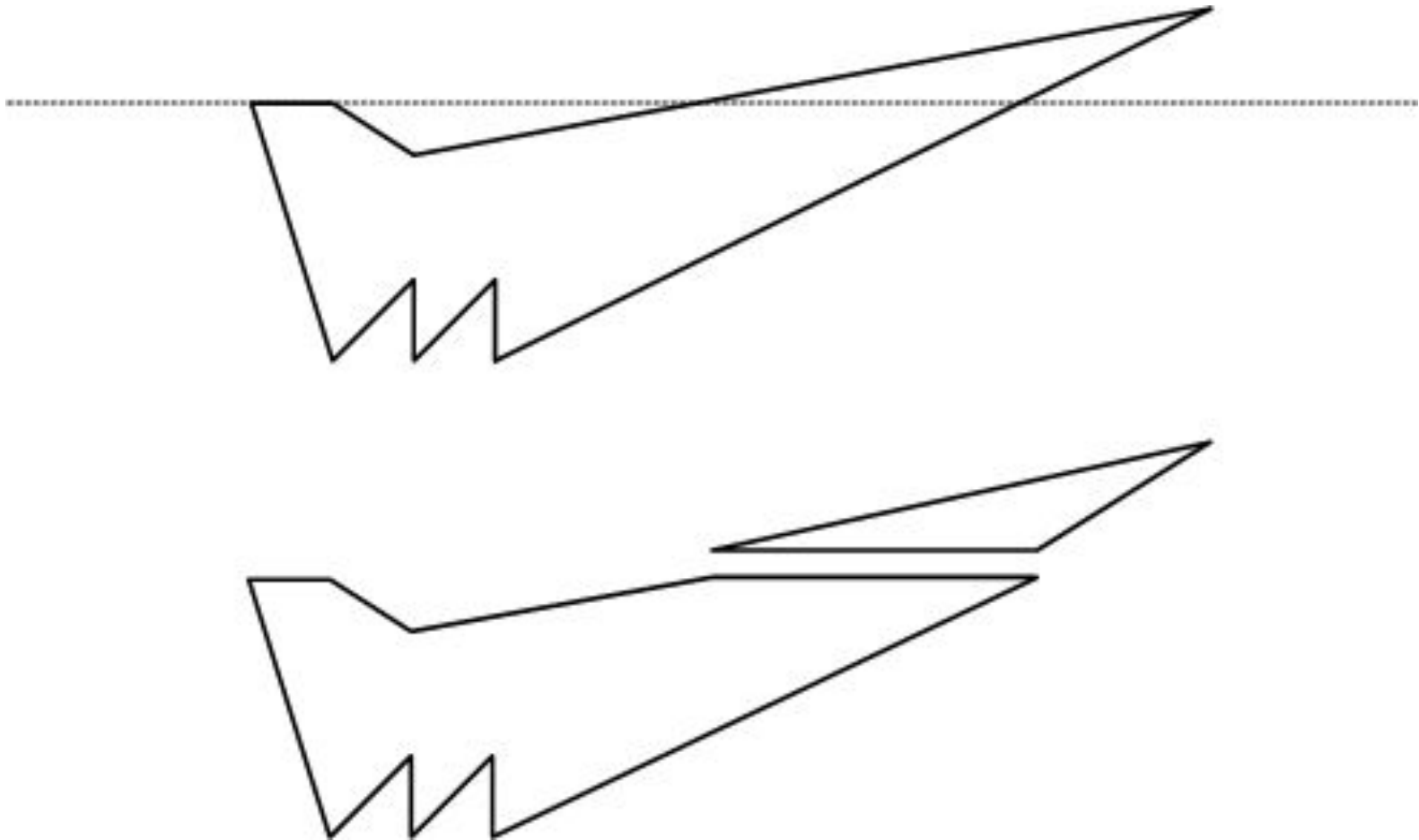



$$m + k = n + 4$$



$$m + k = n + 4, k < 5$$

Дополнительный случай





Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче С?

Задача D.

Электричество





Авторы задачи

- Автор задачи — Владимир Гуровиц
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Сергей Поромов
- Разбор — Антон Банных

О чем задача?


- В наличии:
 - k сетевых фильтров
 - n электроприборов
 - 1 розетка
- Требуется подсоединить все электроприборы так, чтобы потребляемая ими мощность не превышала допустимую для сетевого фильтра.
- К сетевому фильтру можно подсоединить не более одного сетевого фильтра.

Основные идеи

- Не имеет смысла подключать фильтр к фильтру с меньшей максимальной нагрузкой.
- Наиболее мощные приборы имеет смысл ставить ближе к розетке.

Решение

- Отсортировать электроприборы и фильтры в порядке невозрастания мощностей.
- Строить ответ жадно, начиная с фильтра, подключенного к розетке.



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче D?

Задача Е. Адронные коллайдеры

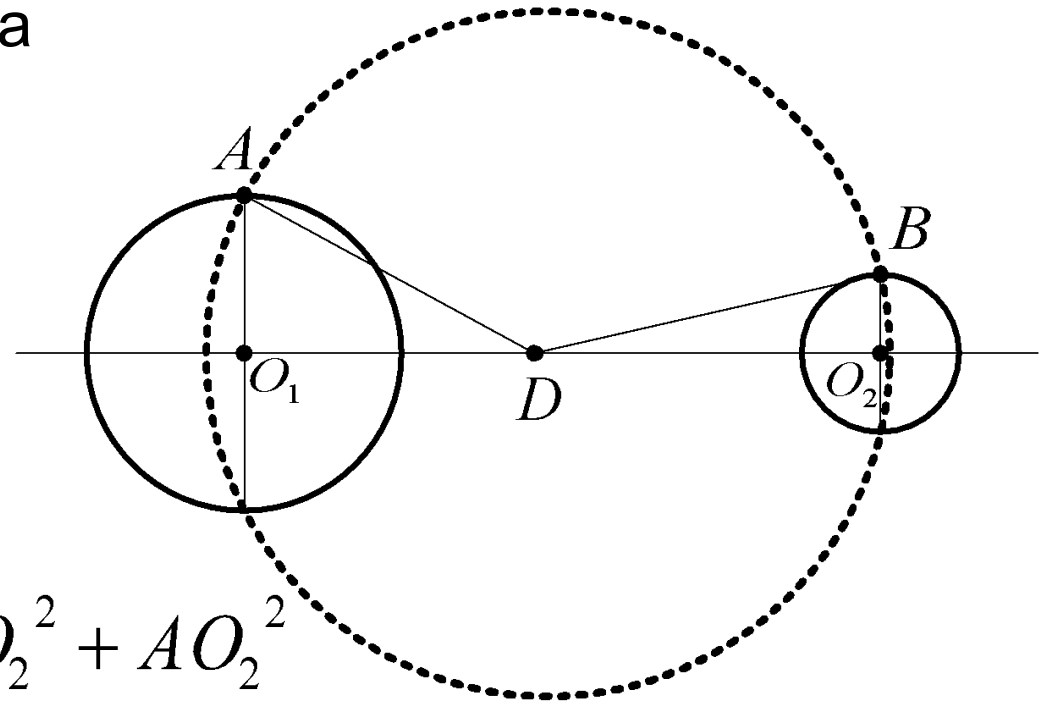


Авторы задачи

- Автор задачи — Михаил Кевер
- Условие — Федор Царев
- Подготовка тестов — Сергей Поромов
- Разбор — Сергей Мельников

Две окружности

- Две окружности: найдем окружность с центром на прямой, соединяющей центры исходных окружностей

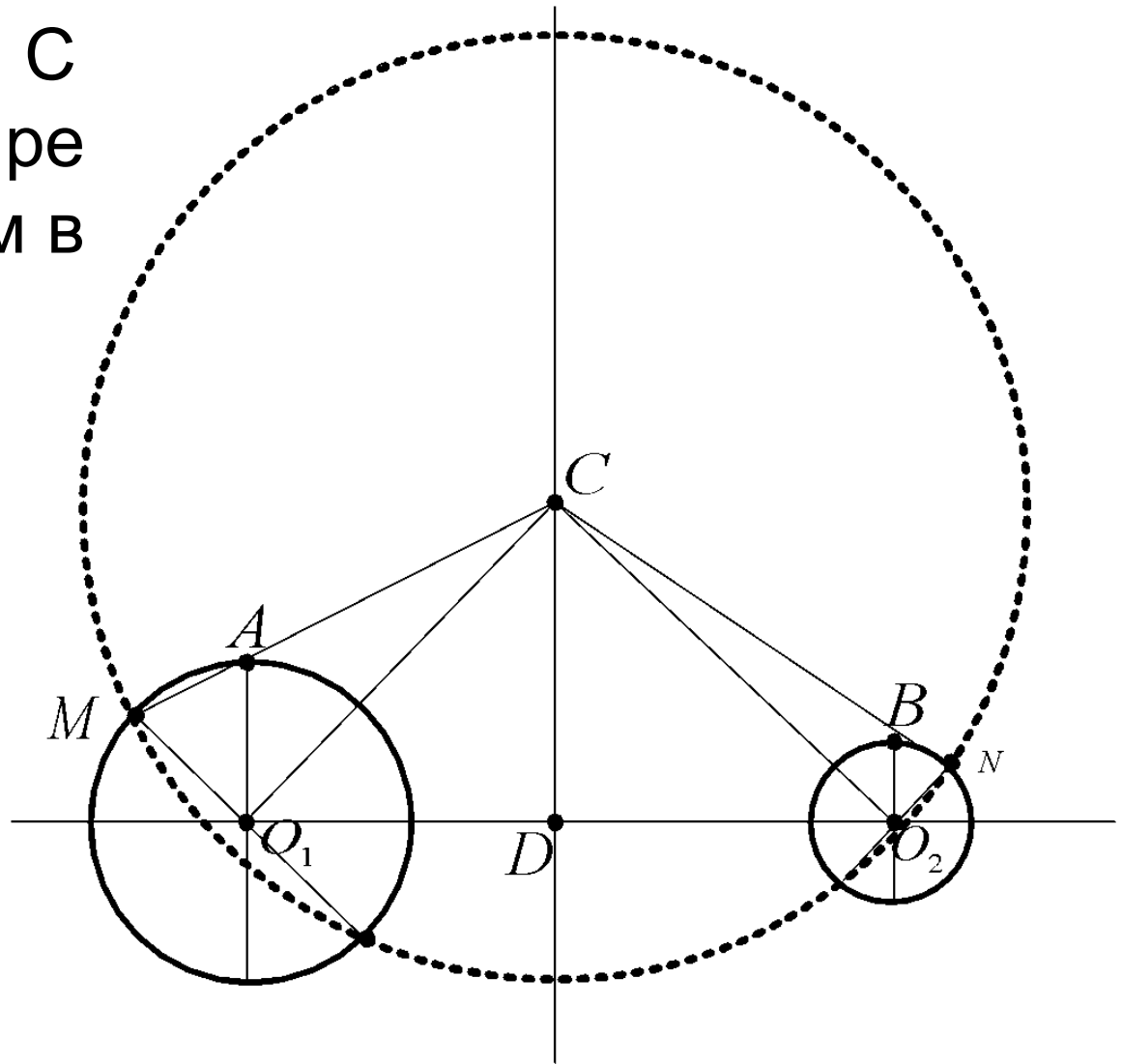


$$\begin{cases} O_1D + DO_2 = O_1O_2 \\ O_1D^2 + O_1A^2 = AD^2 = DO_2^2 + AO_2^2 \end{cases}$$

$$O_1D = \frac{O_2D^2 + O_1O_2^2 - O_1A^2}{2O_1O_2}$$

Две окружности

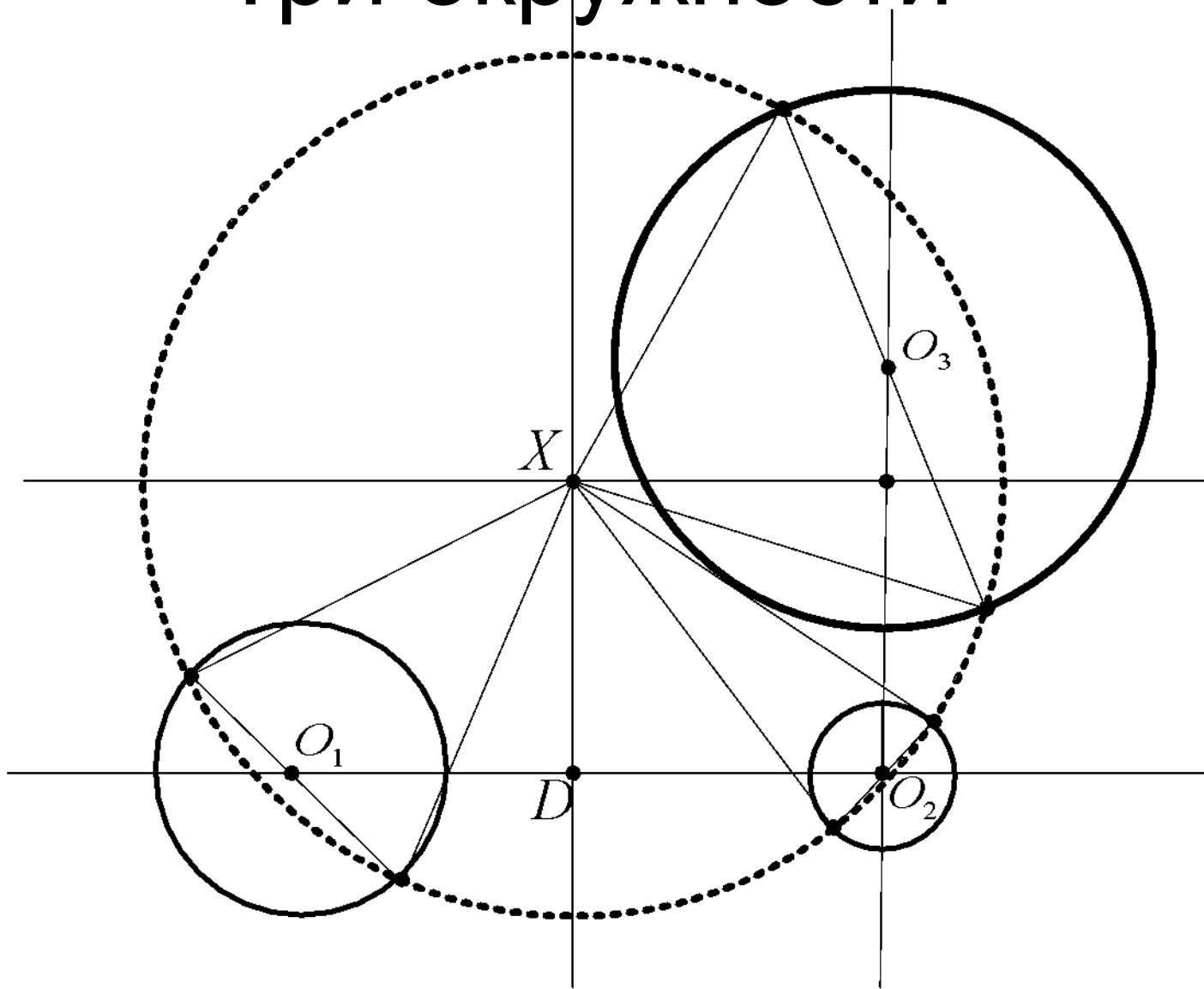
- Для любой точки C на перпендикуляре восстановленном в точке D – существует окружность являющаяся решением




Три окружности

- Три окружности:
- Построим прямую на которой может быть центр окружности делящей пополам O_1 и O_2
- Построим прямую на которой может быть центр окружности делящей пополам O_2 и O_3
- Найдем их точку пересечения - X

Три окружности





Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче E?

Задача F. Космические захватчики





Авторы задачи

- Автор задачи — Георгий Корнеев
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Антон Банных
- Разбор — Антон Ахи

О чем задача?


- В столбцах находятся a_i захватчиков
- Пушка за одно действие либо перемещается в соседний столбец, либо производит выстрел и убивает одного захватчика
- Необходимо уничтожить всех захватчиков за минимальное количество действий

Частный случай

- Если пушка стоит в крайнем столбце, то нужно уничтожить всех захватчиков в этом столбце и перейти к следующему
- Ответ — сумма общего количества захватчиков и количества перемещений, то есть $\sum a_i + (n-1)$

Решение

- Дойти до ближайшего из краев, далее действовать по предыдущему плану
- Ответ — $\sum a_i + (n-1) + \min(p-1, n-p)$



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче F?

Задача G. Пробежки по Манхэттену



© Neil deGrasse Tyson 2001

Авторы задачи

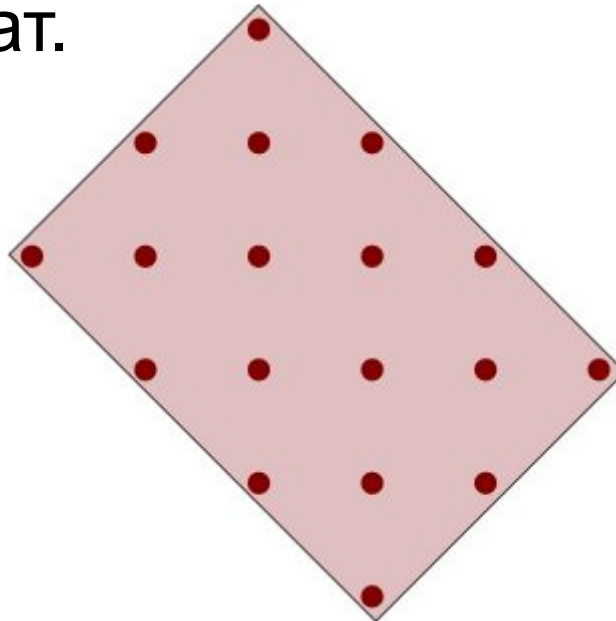
- Автор задачи — Михаил Дворкин
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Олег Давыдов
- Разбор — Михаил Дворкин

О чем задача?

- Объект передвигается по Манхэттену, пробегая за t минут не более чем t кварталов.
- Каждые t минут навигатор сообщает точку, где находится объект, с точностью до d кварталов.
- Где может находиться объект в данный момент времени?

Утверждение

- В каждый момент времени множество точек, в которых может находиться объект, составляют прямоугольник, стороны которого повернуты на 45° относительно осей координат.



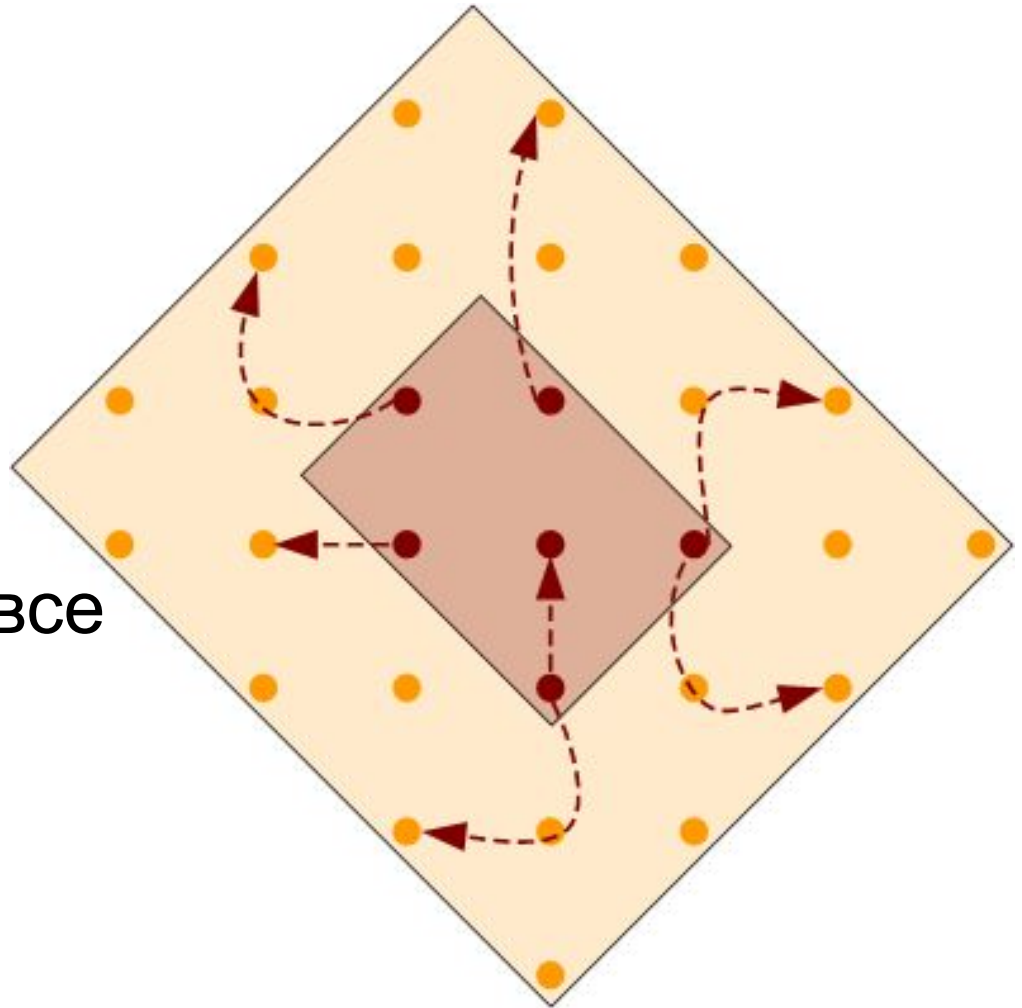
В начальный момент времени

- Это точка $(0, 0)$ — вырожденный прямоугольник.



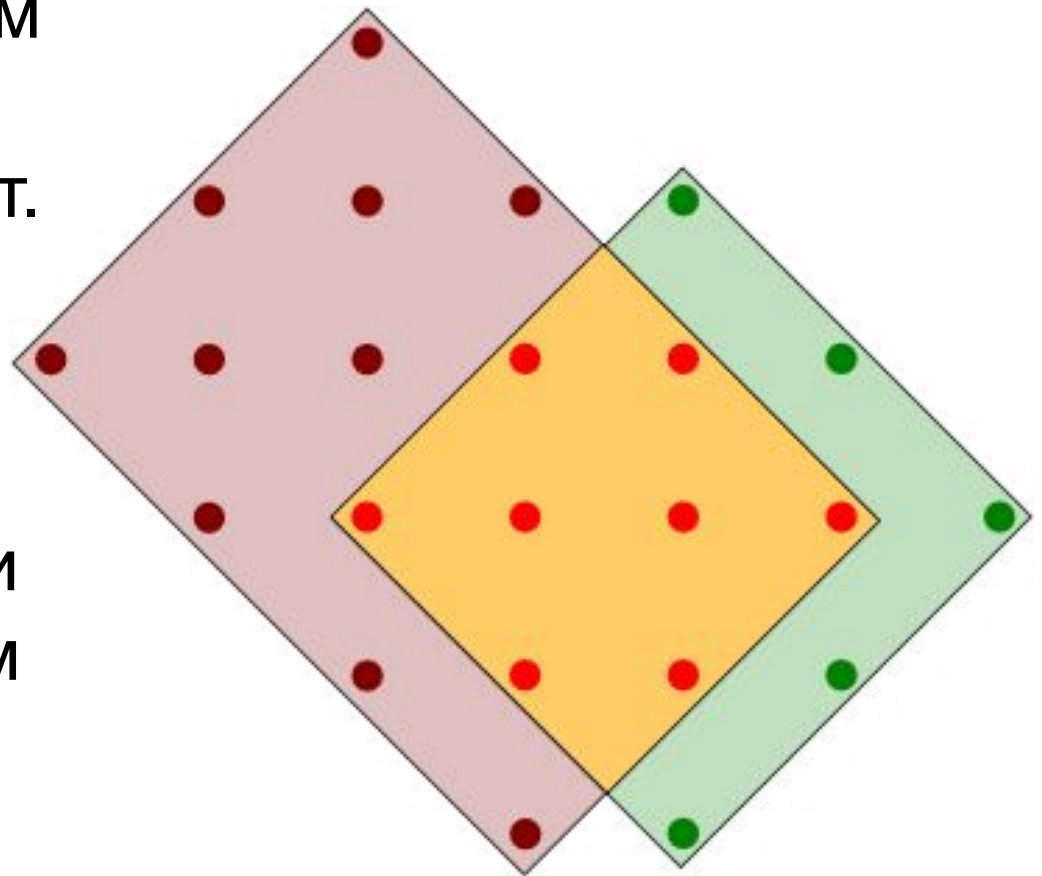
За t минут...


- Объект может пройти не более t кварталов.
- Прямоугольник «расширяется во все стороны на t »



Данные от навигатора...

- Сообщают, в каком квадрате может находиться объект.
- Пересечем прямоугольник и квадрат (с параллельными осями) — получим **НОВЫЙ** прямоугольник.





Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче G?

Задача Н. Следующее разбиение на слагаемые



Название чисел
при сложении

Слагаемое Слагаемое Сумма или
значение суммы

$$3 + 4 = 7$$

Сумма

Авторы задачи

- Автор задачи — Андрей Станкевич
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Сергей Мельников
- Разбор — Сергей Мельников

Генерация следующего комбинаторного объекта

- Дано разбиение
 - $5=1+1+3$
- Идём с конца, пока нельзя увеличить слагаемое
- Увеличим слагаемое на минимальную величину
- Допишем минимальный «хвост»

Когда можно увеличить слагаемое?


- Первое слагаемое с конца нельзя увеличить
- Второе слагаемое с конца можно увеличить
 - Например можно прибавить к нему последнее слагаемое
 - $5=1+1+3 \rightarrow 5=1+4$

На сколько можно увеличить слагаемое?

- Слагаемое можно увеличить на 1, если оно было меньше последнего хотя бы на 2
 - $5=1+1+3 \rightarrow 5=1+2+2$
- Иначе его надо увеличить на величину последнего слагаемого
 - $5=1+2+2 \rightarrow 5=1+4$

Минимальный «хвост»?

- Надо вывести хвост с суммой S , при этом последнее слагаемое которое было выведено перед ним равно K
- Выведем несколько (возможно ноль) слагаемых K , а затем остаток
- Остаток должен быть не меньше чем K



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче N?

Задача I. Самодвойственный документ



Авторы задачи

- Автор задачи — Сергей Мельников
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Сергей Мельников
- Разбор — Сергей Мельников

Условие задачи

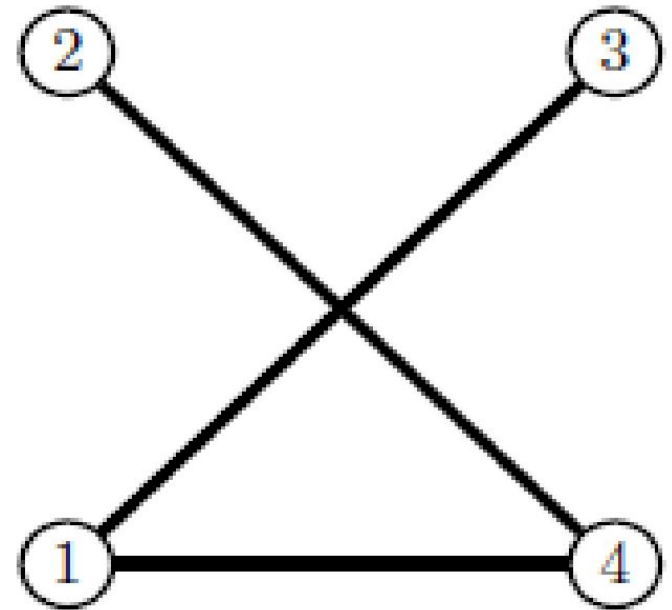
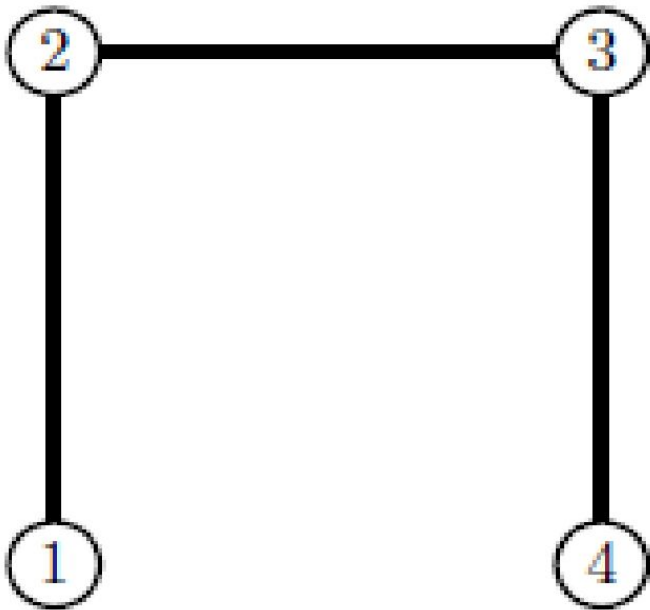
- В задаче надо построить граф из n вершин
- Первый отдел: пары чисел – это ребра графа
- Второй отдел: пары чисел – это вершины между которыми ребра нет
- Граф изоморфен своему дополнению

Когда ответ существует?

- В полном графе из n вершин $n(n - 1)/2$ ребер
- Если $n = 4k + 2$ или $n = 4k + 3$, то ребер нечетное число – ответ «No»
- Если $n = 4k$ или $n = 4k + 1$, то ответ «Yes»

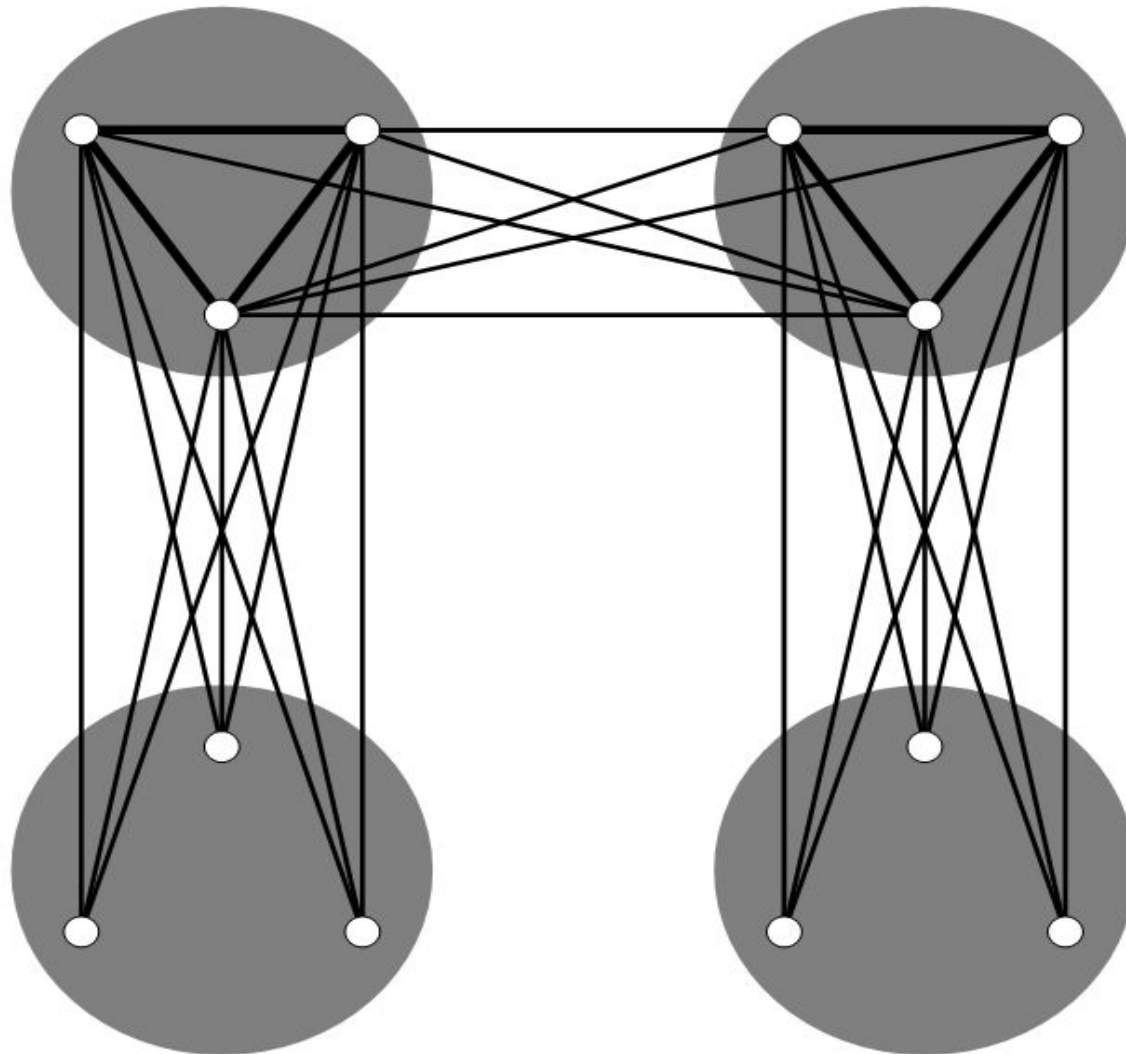
4к вершин

- 4 вершины



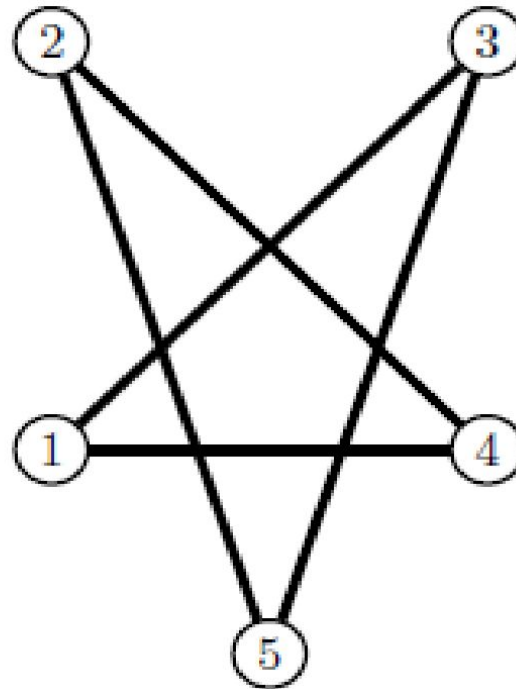
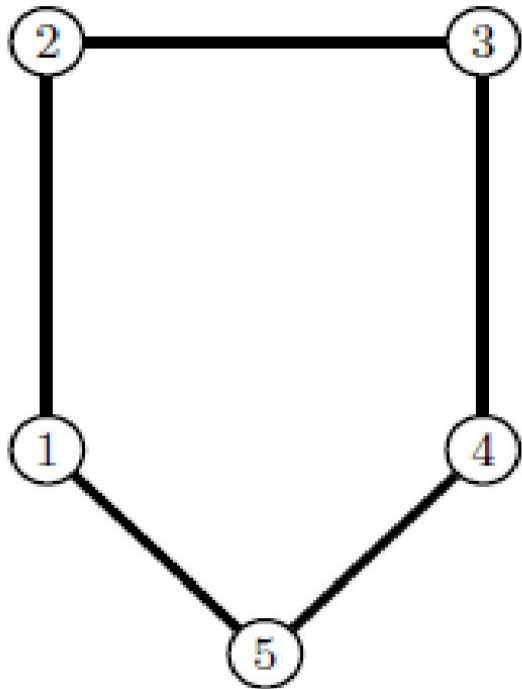
- 4к вершин – заменить вершины 2 и 3 на полные графы, 1 и 4 – на пустые

12 вершин



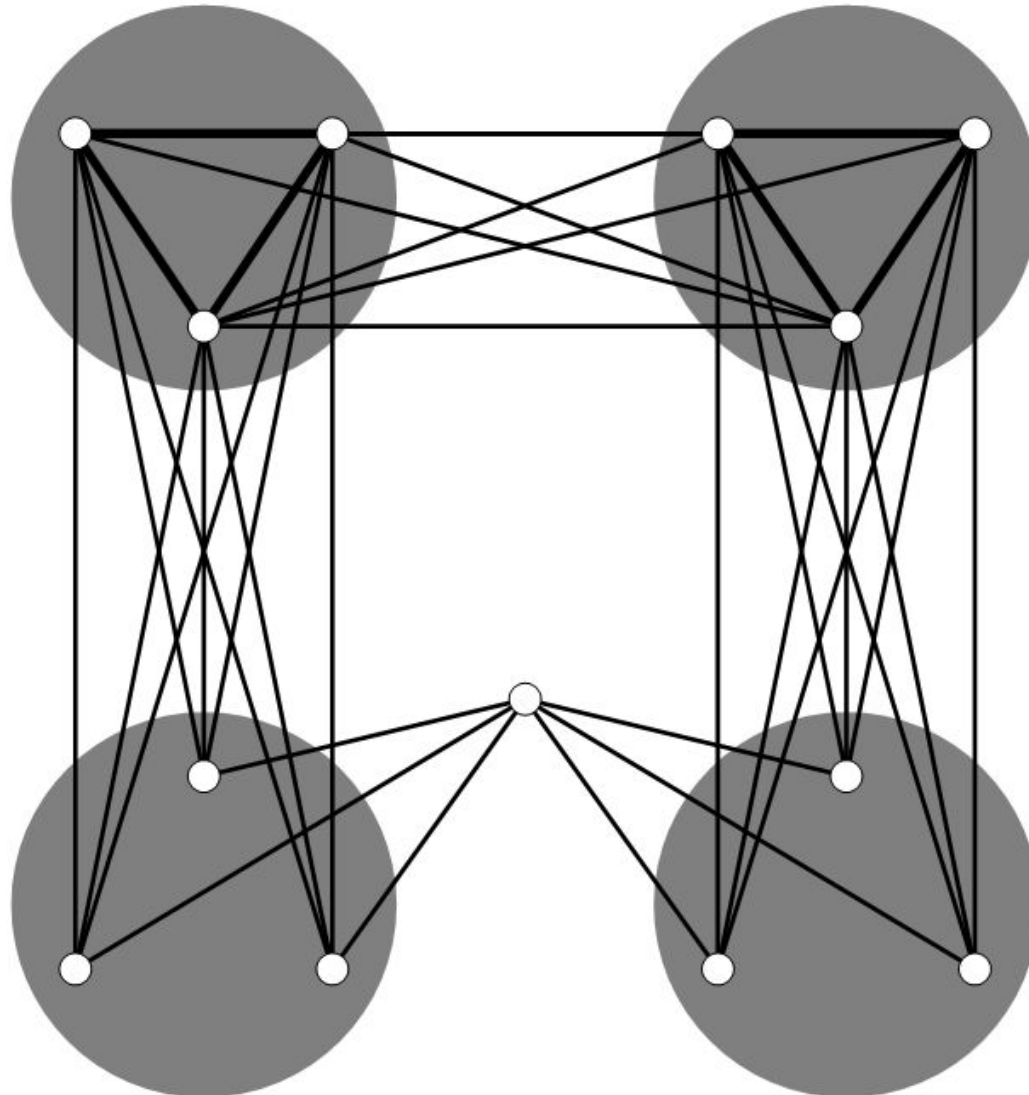
$4k + 1$ вершина


- 5 вершин



- $4k+1$ вершина – заменить вершины 2 и 3 на полные графы, 1 и 4 – на пустые

13 вершин





Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче I?

Задача J. Цирковое шоу





Авторы задачи

- Автор задачи — Юрий Петров
- Условие — Павел Маврин
- Подготовка тестов — Юрий Петров
- Разбор — Юрий Петров

Формулировка

- Дан набор отрезков
- Выбрать два поднабора, объединения которых не пересекаются
- Максимизировать минимум размеров



Идея решения

- **Динамическое программирование**

Решение: вычисляемая функция


- Функция $f(a, n, t)$:
- a — самый правый из отрезков, взятых в один из наборов
- n — текущее количество отрезков в первом наборе
- t — какому набору принадлежит отрезок a
- Значение — максимальное количество отрезков во втором наборе

Решение: переходы

- Перебрать отрезок b , который будет завершать следующую группу
- Перебрать набор, в который взять эту группу
- Все отрезки, лежащие правее конца a и левее конца b , выгодно взять в тот же набор

Оценка времени работы

- Всего есть $n \times n \times 2$ состояний
- Из каждого $O(n)$ переходов
- Переходы перебирать в порядке возрастания конца отрезка
- Суммарное время обработки переходов из одного состояния $O(n)$
- Итоговое время $O(n^3)$



Спасибо за внимание!
Вопросы по задаче J?

Задача К. Красивая таблица результатов

Аграрная мини-футбольная лига

№	команда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	И	В	Н	П	Мин	О
1	Гидроор (Менделеев)			7:4		10:1	4:3					8:3	7:3	9:5	10:3	7:2		8	8	0	0	62-24	24
2	Кантар (Эконец)			7:5			8:5	7:2	4:7		9:0		8:6	10:0	4:1			8	7	0	1	58-25	21
3	Бякил (БТФ)		5:7				8:2				9:4	9:4	8:2	9:2	11:2	14:1		8	7	0	1	73-24	21
4	Марафон (Агрофак)	4:7				9:3	2:14			8:4	11:6		5:4		10:5		16:5	8	6	0	2	65-48	18
5	Самол (Эконец)			3:9			6:4				1:5		9:4	10:5	11:7	10:3	14:1	8	6	0	2	64-38	18
6	Ром (Менделеев)	1:10			14:2	4:6			5:4	9:3	11:4		2:2				12:4	8	5	1	2	58-35	16
7	Фаворит (ЗаРс)	3:4	5:8	2:8					6:5	6:4		5:2		6:2		8:1		8	5	0	3	41-34	15
8	Механики (Преподаватели)		2:7			4:5	5:6						6:4	7:4	9:2	4:1	9:2	8	5	0	3	47-30	15
9	ОГАУ-ППС (преподаватели)			7:4	4:8		3:9	4:6				7:5	13:7	10:5			11:2	8	5	0	3	59-44	15
10	Сосур (Эконец)				6:11	5:1	4:11			5:7			2:3	6:4	10:4		9:3	8	4	0	4	47-44	12
11	Репон-64 (Ю)		8:9	4:9				2:5		7:13				6:5	13:3	9:3	8:0	8	4	0	4	49-47	12
12	Миракса (ВПОЛ)	3:8		4:9	4:5	4:9	2:2		4:6	3:10	3:2							8	1	1	6	27-51	4
13	Total-90 (Эконец)	3:7	6:8	2:8		5:10		2:6	4:7		4:6	5:6						8	0	0	8	31-58	0
14	Гол (ФППП)	5:9	0:10	2:9	5:10	7:11			2:9		4:10	3:13						8	0	0	8	28-61	0
15	Юмор (Агрофак)	3:10	1:4	2:11		3:10		1:8	1:4	2:11		3:9						8	0	0	8	14-69	0
16	Протос (Эконец)	2:7		1:14	5:16	1:14	4:12		2:9		3:9	0:8						8	0	0	8	18-89	0

Авторы задачи

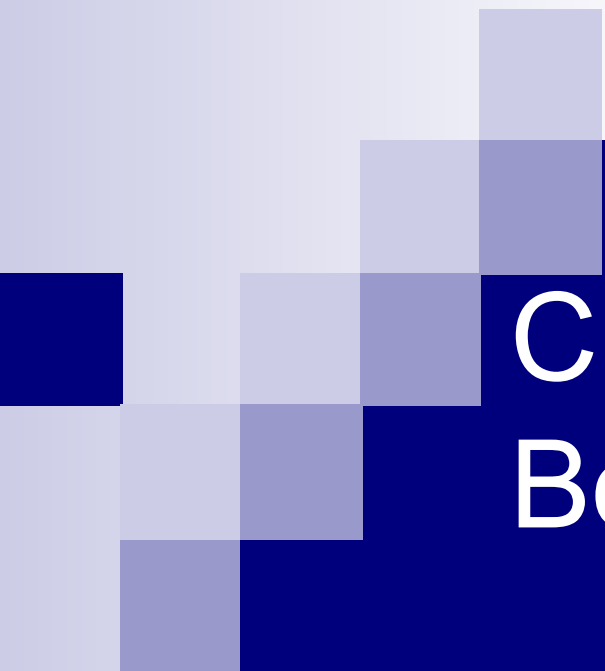
- Автор задачи — Владимир Ульнцев
- Условие — Андрей Станкевич
- Подготовка тестов — Владимир Ульянцев
- Разбор — Антон Ахи

О чем задача?

- Таблица результатов считается красивой, если количество задач, решенных каждой из команд, либо 0, либо делитель числа задач на соревновании
- Сколько еще можно сдать задач, чтобы таблица не переставала быть красивой

Как решать?

- Для каждой команды увеличивать количество сданных ею задач, пока это не изменяет красоту таблицы результатов
- У количества задач на соревновании не может быть более 24 подряд идущих делителей, так как минимальное число, которое делится на все числа от 1 до 24 это — 5354228880



Спасибо за внимание!
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>