ПЯВУ. Лекция 14.

Основы программирования.

А.М. Задорожный

Контрольные вопросы

1. Почему в C# рекомендуют использовать свойства вместо полей данных?
2. Что такое рекурсия?
3. В чем заключается метод Гаусса решения системы линейных уравнений?
4. Какие варианты решения системы уравнений могут быть?

План лекции

1. Решение системы уравнений методом Гаусса
   - Вариант с выбором ведущего элемента
2. Вычисление детерминанта методом Гаусса
3. Вычисление числа Пи методом “Монте-Карло”.

Системы линейных уравнений и Матрицы

$$\begin{cases} a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + \dots a_{1N}*x_N = b_1 \\ a_{21}*x_1 + a_{22}*x_2 + \dots a_{2N}*x_N = b_2 \\ \dots \\ a_{N1}*x_1 + a_{N2}*x_2 + \dots a_{NN}*x_N = b_N \end{cases}$$

В векторном виде:

$A*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \dots x_N\}$

Метод Гаусса

$$a'_{11} * x_1 + a'_{12} * x_2 + \ldots a'_{1N} * x_N = b'_1$$

$$a'_{22} * x_2 + \ldots a'_{2N} * x_N = b'_2$$

$\ldots$

$$a'_{NN} * x_N = b'_N$$

Представление системы уравнений

Матрицу представим в виде двумерного массива:

```
double [,] M = new double[N, N+1];
```

Число строк матрицы N. Число столбцов N + 1, т. к. включает и свободный вектор b.

…

Заполняем матрицу коэффициентами…

Алгоритм вычитания строк

Здесь k – номер строки, которую надо вычитать …

```
static void SubtractRow(double [,] M, int k)
{
	double m = M[k, k];
	for(int i = k+1; i < M.GetLength(0); i++)
	{
		double t = M[i, k]/m;
		for(int j = k; j < M.GetLength(1);  j++)
		{
			M[i, j] = M[i, j] - M[k, j]*t;
		}
	}
}
```

Приведение матрицы к верхнетреугольному виду

```
static void TriangleMatrix(double [,] M)
{
    for(int i = 1; i < M.GetLength(0); i++)
        SubtractRow(M, i-1);
}
```

Решение

Последнее уравнение содержит только 1 неизвестное – x_N. После решения последнего уравнения, можно решить предпоследнее, т.к. после подстановки x_N в нем останется неизвестным только x_{N-1} и т.д.

```
public static double [] Solve(double [,] M)
{
        TriangleMatrix(M);
        double v[] = new double[M.GetLength(0)];
        int Nb = M.GetLength(1)-1;
        for(int n = v.Length-1; n >= 0; n--)
        {
                double sum = 0;
                for(int i = n+1; i < Nb; i++)
                        sum += v[i]*M[n, i];
                v[n] = (M[n, Nb]-sum)/M[n, n];
        }
        return v;
}
```

“Слабые” места

SubtractRow:

```
double m = M[k, k];
…
M[i, j] = M[i, j] - M[k, j]*t/m;
```

Возможно, m окажется равным 0!

Возможно окажется неравным 0, в результате ошибок вычислений!

Улучшение метода

Выбор “ведущего элемента”.

Идея заключается в том, что бы каждый раз выбирать из оставшихся строк строку с набольшим элементом в текущей позиции (столбце, который зануляем).

От перестановки уравнений решение системы не изменяется.

Выбор ведущего элемента

```
//Находит строку, в которой элемент n имеет наибольшее по модулю значение,
// и меняет ее местами со строкой n

static void SelectLeading(double [,] M, int n)
{
        //Найдем номер строки, с наибольшим
        //элементом в столбце n
        int iMax = n;
        for(int i = n+1; i < M.GetLength(0); i++)
                if(Math.Abs(M[iMax, n])  <  Math.Abs(M[i, n]))
                        iMax = i;

        // Переставить строки iMax и n
        if(iMax != n)
                for(int i =n; i < M.GetLength(1); i++)
                {
                        double t = M[n, i];
                        M[n, i] = M[iMax, i];
                        M[iMax, i] = t;
                }
}
```

Усовершенствованная триангуляция матрицы

```
static void TriangleMatrix(double [,] M)
{
    for(int i = 1; i < M.GetLength(0); i++)
    {
        SelectLeading(M, i-1);
        SubtractRow(M, i-1);
    }
}
```

Решение есть не всегда

```
static bool TriangleMatrix(double [,] M)
{
    for(int i = 1; i < M.GetLength(0); i++)
    {
        SelectLeading(M, i-1);
        if(Math.Abs(M[i-1, i-1]) > 0.0001)
            SubtractRow(M, i-1);
        else
            retrun false;
    }
    return true;
}
```

Решение

```
public static double [] Solve(double [,] M)
{
	if(!TriangleMatrix(M))
		retun null;
	double v[] = new double[M.GetLength(0)];
	int Nb = M.GetLength(1)-1;
	for(int n = v.Length-1; n >= 0; n--)
	{
		double sum = 0;
		for(int i = n+1; i < Nb; i++)
			sum += v[i]*M[n, i];
		v[n] = (M[n, Nb]-sum)/M[n, n];
	}
	return v;
}
```

Решение

```
double[,] M = new double[4, 5] {
        { 2, 3, 1, 1, 1 }, { 1, 2, 1, 5, 1 },
        { 1, 1, 2, 1, 1 }, { 1, 1, 4, 2, 1 } };
 double[]x = Gauss.Solve(M);
if(x != null)
        for (int i = 0; i < x.Length; i++)
                Console.WriteLine(x[i]);
else
            Console.WriteLine(“Единственного решения системы нет.”);
```

Детерминант и метод Гаусса

Если не применять выбор ведущего элемента, то детерминант – это просто произведение диагональных элементов верхнетреугольной матрицы.

Перестановка строк может приводить к изменению знака.

Если меняются местами строки i и j, то знак будет меняться на противоположенный.

Выбор ведущего элемента

```
static bool SelectLeading(double [,] M, int n)
{
        //Найдем номер строки, с наибольшим
        //элементом в столбце n
        int iMax = n;
        for(int i = n+1; i < M.GetLength(0); i++)
                if(Math.Abs(M[iMax, n])
                                < Math.Abs(M[i, n])
                iMax = i;

        // Переставить строки iMax и n
        if(iMax != n)
        {
                for(int i =n; i < M.GetLength(1); i++)
                {
                        double t = M[n, i];
                        M[n, i] = M[iMax, i];
                        M[iMax, i] = t;
                }
                return true;
        }
        return false;
}
```

Вычисляем детерминант

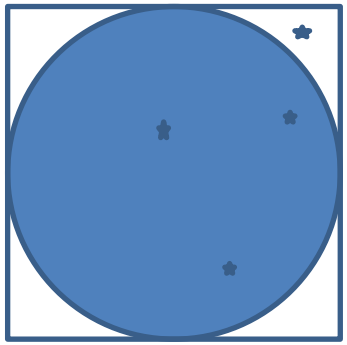
```
static  double Determinant(double [,] M)
{
        double d = 1;
        for(int i = 1; i < M.GetLength(0); i++)
        {
                if(SelectLeading(M, i-1))
                        d *=-1;
                if(Math.Abs(M[i-1, i-1]) > 0.0001)
                        SubtractRow(M, i-1);
                else
                        retrun 0;
        }
        for(int i = 0; i < M.GetLength(0); i++)
                d*=M[i, i];
        return d;
}
```

Контрольные вопросы

1. Как в решении задачи проявился характер вычислений с числами с плавающей точкой?
2. Какие преобразования числовых типов компилятор выполняет сам?
3. Как преобразовать числовые типы, если компилятор не позволяет неявное преобразование?

Вычисление числа Пи методом “Монте-Карло”

Метод основан на применении для вычислений случайных чисел.



Если моделировать попадание точек в квадрат равномерно по его площади, то доля точек попавших в круг, будет пропорциональна отношению площади круга к площади квадрата.

Вычисление числа Пи

$S_{окр} = Пи * R^2$

Удобно взять R = 1 и ограничиться 1-ой четвертью математической плоскости.

$S_{окр} = Пи$

Площадь квадрата при этом равна 4.

Вычисление Пи
Реализация

```
int N=1000000;
int n=0;
Double x, y;
Random r = new Random();
for(int i = 0; i < N; i++)
{
      x = r.NextDouble(); y = r.NextDouble();
      if(x*x + y*y < 1)
            n++;
}
Double pi = (4.0 * n) / N;

Console.WriteLine(“Pi = {0:0.###}”, pi);
```

Вопросы для повторения

1. В чем особенность статических методов (методов класса) по сравнению с методами объектов?

2. Какие преимущества ООП дает на примере класса гистограммы?

3. На какой идее был основан алгоритм определения принадлежности точки полигону?

4. Как можно вычислить площадь полигона?