Оптимизация на сетях

СЕТЬ → ГРАФ ВЕРШИНЫ ГРАФА – УЗЛЫ СЕТИ **(N)**

РЕБРА ГРАФА – ДУГИ СЕТИ **(A)**

ОПИСАНИЕ СЕТИ – МНОЖЕСТВА **(N, A)**

ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ

Поток – пропускная способность дуг (ребер)

Ориентированнная дуга (сеть)

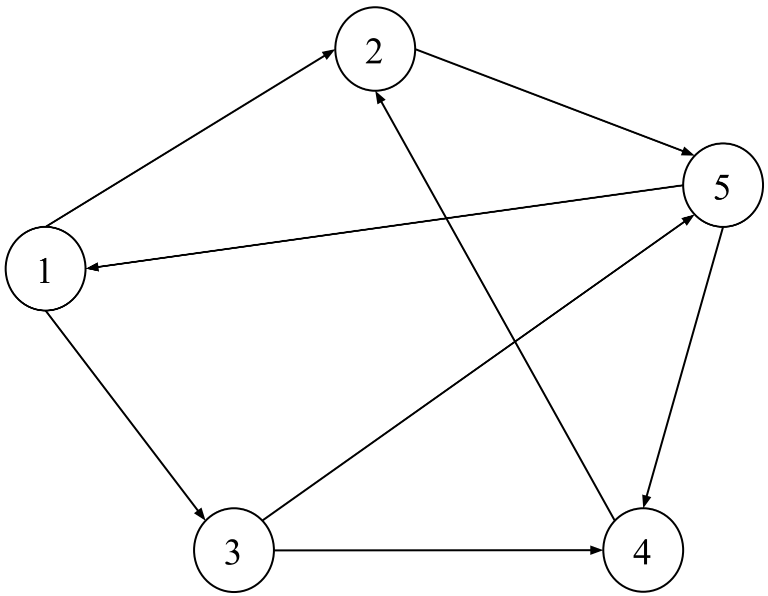
Путь

Цикл (ориентированный цикл)

Связная сеть

Дерево

Остовное дерево



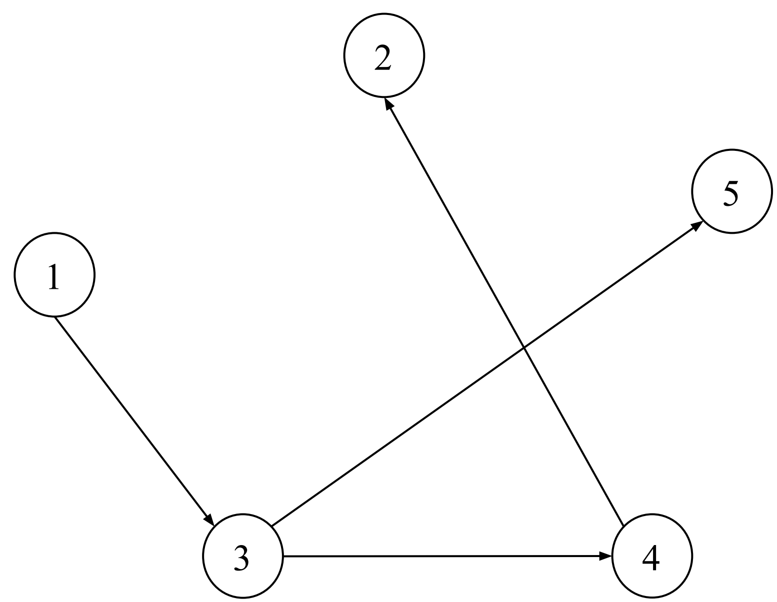
Путь – 1,2,4; 1,2,5,4; 1,2,5,3,4

Цикл – 1,2,4,3,1; 1,2,5,3,1

Ориентированный цикл – 1,2,5,1; 2,5,4,2

Дерево – 3,4,2; 1,3,4; 3,5,2

Остовное дерево



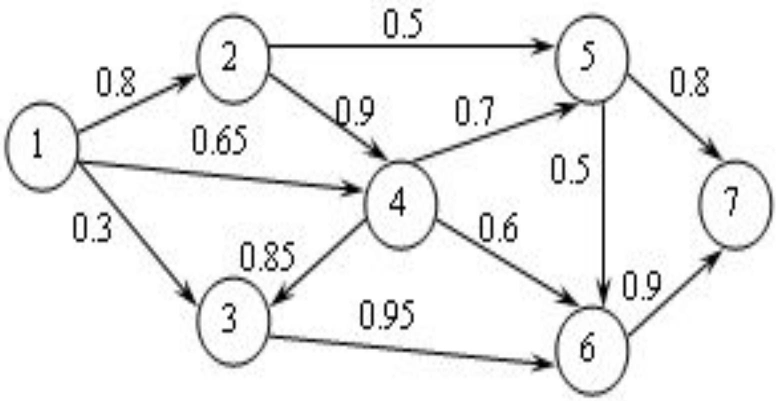
Классификация задач оптимизации на сетях

- Алгоритм нахождения минимального остового дерева
- Алгоритм нахождения кратчайшего пути
- Алгоритм определения максимального потока
- Алгоритм минимизации стоимости потока в сети с ограниченной пропускной способностью
- Алгоритм нахождения критического пути
- Алгоритм определения гамильтонова контура минимальной длины

Методы решения задач оптимизации на сетях

- 1. Симплекс-метод, т.к. все перечисленные задачи относятся к задачам линейного программирования
- 2. Специализированные методы, учитывающие особенности математической модели конкретной задачи

Пример сведения задачи к задаче о кратчайшем пути



Коммуникационная сеть:
узлы сети 1-7 –приемопередающие станции
дуги сети - указана вероятность передачи сообщения без потерь

Найти: путь 1→7 с максимальной вероятностью успешной передачи сообщения

Вероятность успешной передачи сообщения по пути 1→2→…→k

$$p_{1k} = p_1 p_2 \dots p_k \qquad (1)$$

Логарифмирование выражения (1)

$$\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_k \qquad (2)$$

$$\max p_{1k} \Leftrightarrow \max \log p_{1k} \qquad (3)$$

$$\log p_{1k} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\log p_{1k}) \ge 0$$

$$\max \log p_{1k} \Leftrightarrow \min(-\log p_{1k}) \qquad (4)$$

Задача $\min(-\log p_{1k})$ - алгоритм нахождения кратчайшего пути между двумя узлами сети

Методы решения – 1. Симплекс-метод
2. Методы решения ТЗ с ПП
3. Метод Дейкстри
4. Метод Флойда
5. Метод ДП

Задача с кольцевыми маршрутами (о коммивояжере)

Дано: 1. граф – вершины – узлы сети (n

ребра – дуги сети

2. матрица расстояний $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$

при $a_{ij} = \infty$ прямого маршрута между i-м

и j-м вершинами графа

Найти: гамильтонов контур минимальной длины –

путь, проходящий через все вершины графа,

когда начальная вершина совпадает с конечной

Методы решения задачи о коммивояжере

1. метод перебора всех возможных маршрутов

количество $(n-1)!$

2. метод ветвей и границ решения задач ЦЛП

(схема с использованием верхних оценок)

Математическая модель задачи

Переменные $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(дуга (i, j) включена в контур)} \\ 0 & \text{(дуга (i, j) не включена в контур)} \end{cases}$

ЦФ – длина контура $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min$ **(5)**

Система ограничений $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1,n} \quad \textit{(въезд в вершину j)} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1,n} \quad \textit{(выезд из вершины i)} \end{cases}$ **(6)**

Условие устранения образования негамильтоновых контуров

$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1 \quad i, j = \overline{1,n} \quad (i \ne j)$ u_i, u_j - целочисленные переменные **(7)**

Алгоритм метода ветвей и границ

I Определение множеству всех гамильтоновых контуров нижней границы длины маршрута

$$\varphi_{(R)}$$

Основная идея – применение процедуры приведения матрицы расстояний

Ia) приведение матрицы расстояний A по строкам

$$\alpha_i = \min_{\underline{j=1,n}} a_{ij} \qquad \textbf{(8)}$$

Iб) приведение матрицы расстояний A по столбцам

$$\beta_j = \min_{\underline{i=1,n}} a_{ij} \qquad \textbf{(9)}$$

α_i, β_j - <u>константы приведения</u>

A' - <u>полностью приведенная матрица расстояний</u>

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \qquad \textbf{(10)}$$

$$L = L' + \gamma \qquad \textbf{(11)}$$

L - <u>длины оптимального маршрута в задаче с неприведенной матрицей</u>

L' - <u>длина оптимального маршрута в задаче с полностью приведенной матрицей</u>

$$\varphi_{(R)} = \gamma \qquad \textbf{(12)}$$

Алгоритм метода ветвей и границ

II Разбиение множества R всех гамильтоновых маршрутов на подмножества

$\varphi_{(\overline{i,j})} \leftrightarrow \{(\overline{i,j})\}$ - гамильтонов контур, не включающий дугу (i,j)

$\varphi_{(i,j)} \leftrightarrow \{(i,j)\}$ - гамильтонов контур, включающий дугу (i,j)

Сравнение нижних границ длины гамильтонова контура $\varphi_{(\overline{i.j})}$ и $\varphi_{(i,j)}$ с $\varphi_{(R)}$:

$$\left\{\begin{matrix}\textit{выбор подмножества}\\ \textit{с меньшей нижней}\\ \textit{границей длины}\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{процесс}\\ \textit{разбиения}\\ \textit{выбранного}\\ \textit{множества}\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{получение}\\ \textit{гамильтонова}\\ \textit{контура с}\\ \textit{рекордом } \mathrm{Rec}\end{matrix}\right\}$$

После получения гамильтонова контура просмотр оборванных ветвей дерева

если $\begin{matrix}\varphi_{(\overline{i,j})}\\ \varphi_{(i,j)}\end{matrix} < \mathrm{Rec}$

При получении новых гамильтоновых контуров берут наименьший из Rec

Решение закончено при нижних границах оборванных ветвей превышающих Rec

Оптимальный маршрут – гамильтонов контур с наименьшей длиной

Алгоритм метода ветвей и границ

Па) Замена в матрице A' условно элемента "0" на "∞"

$$\gamma_{(\overline{i,j})} = \alpha_i + \beta_j \qquad \textbf{(13)}$$

выбор $\gamma_{(\overline{r,s})} = \max \gamma_{(\overline{i,j})}$

подмножество контуров - $\{(\overline{r,s})\}$

$$\varphi_{(\overline{r,s})} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(\overline{r,s})} = \gamma + \gamma_{(\overline{r,s})} \qquad \textbf{(14)}$$

Пб) Условное включение выбранной в Па) дуги $(\overline{r,s})$ в гамильтонов маршрут:

исключение в матрице A' строки r и столбца s

замена элемента $a_{s,r}$ на "∞" (устранение образования негамильтонова контура)

приведение усеченной матрицы расстояние с расчетом $\gamma_{(r,s)}$

подмножество контуров - $\{(r,s)\}$

$$\varphi_{(r,s)} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(r,s)} = \gamma + \gamma_{(r,s)} \qquad \textbf{(15)}$$

Пв) Проверка размера усеченной матрицы

$2 \times 2 \rightarrow$ **Пд)**

более чем $2 \times 2 \rightarrow$ **Пг)**

Алгоритм метода ветвей и границ

IIг) Сравнение нижних границ подмножеств $\varphi_{\left(\overline{r,s}\right)}$ и $\varphi_{(r,s)}$:

$$\varphi_{\left(\overline{r,s}\right)} < \varphi_{(r,s)} \text{ - развитие подмножества } \left\{\left(\overline{r,s}\right)\right\}$$

$$\varphi_{\left(\overline{r,s}\right)} > \varphi_{(r,s)} \text{ - развитие подмножества } \left\{\left(r,s\right)\right\}$$

переход к **IIа)**

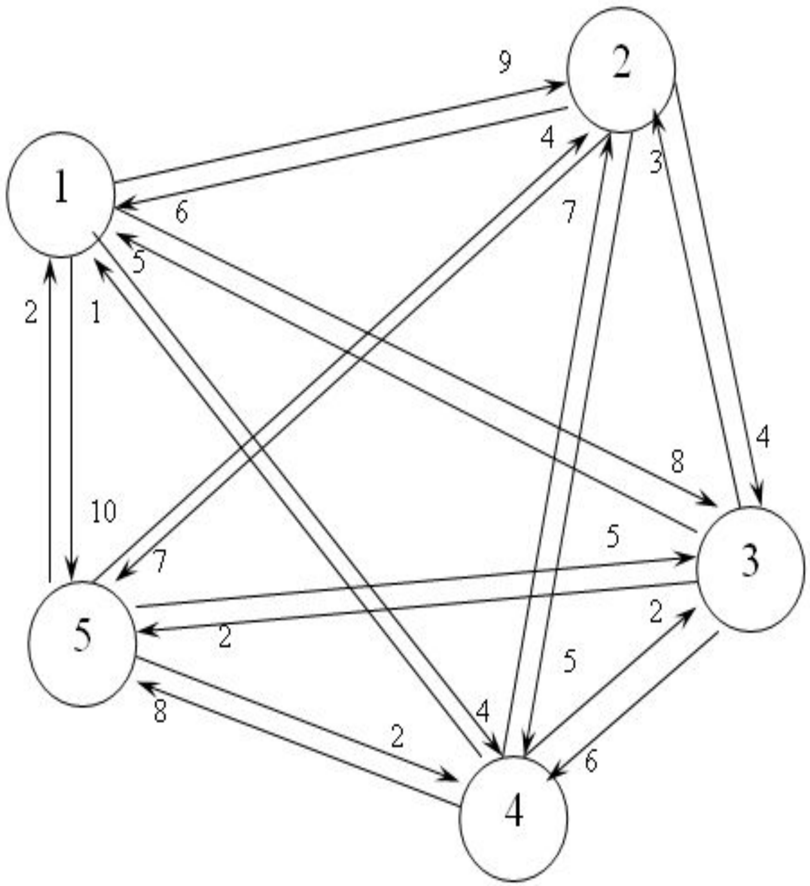
IIд) Определение гамильтонова контура и его длины Rec

IIе) Определение оптимального решения:

$$\mathrm{Rec} < \begin{cases} \varphi_{(i,j)} \\ \varphi_{\left(\overline{i,j}\right)} \end{cases} \quad i,j = \overline{1,n} \text{ оборванных ветвей – решение найдено}$$

иначе – развитие оборванных ветвей по приведенному алгоритму

Пример решения задачи о коммивояжере



$n = 5$ матрица расстояний

j / i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	9	8	4	10
2	6	∞	4	5	7
3	5	3	∞	6	2
4	1	7	2	∞	8
5	2	4	5	2	∞

Пример решения задачи о коммивояжере

1. Поиск нижней границы множества всех маршрутов $\varphi_{(R)}$

Таблица 1.

i \ j	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	9	8	4	10	4
2	6	∞	4	5	7	4
3	5	3	∞	6	2	2
4	1	7	2	∞	8	1
5	2	4	5	2	∞	2

Таблица 2.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	5	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	1	∞	4	0
4	0	6	1	∞	7
5	0	2	3	0	∞
β_j	0	1	0	0	0

Таблица 3.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0	6
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞

$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 14$$

2. Разбиение множества гамильтоновых контуров на подмножества

Таблица 3.

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	4	4	0 (4)	6
2	2	∞	0 (2)	1	3
3	3	0 (1)	∞	4	0 (3)
4	0 (1)	5	1	∞	7
5	0 (0)	1	3	0 (0)	∞

Выбор $\gamma_{(\overline{1,4})} = 4$

Пример решения задачи о коммивояжере

Подмножество контуров $\{(\overline{1,4})\}$

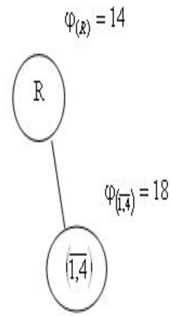
Таблица 4.

j / i	1	2	3	4	5	α_i
1	∞	4	4	∞	6	4
2	2	∞	0	1	3	0
3	3	0	∞	4	0	0
4	0	5	1	∞	7	0
5	0	1	3	0	∞	0

Таблица 5.

j / i	1	2	3	4	5
1	∞	0	0	∞	2
2	2	∞	0	1	3
3	3	0	∞	4	0
4	0	5	1	∞	7
5	0	1	3	0	∞
β_j	0	0	0	0	0

$\varphi_{(\overline{1,4})} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(\overline{1,4})} = 14 + 4 = 18$



3. Включение дуги $(1,4)$ в гамильтонов контур

$(a_{41} = \infty)$

Таблица 6.

j / i	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	5	1	7	1
5	0	1	3	∞	0

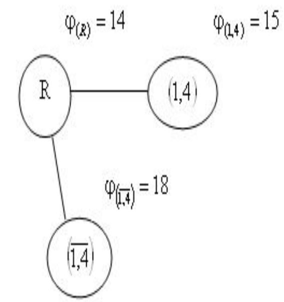
Таблица 7.

j / i	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	4	0	6
5	0	1	3	∞
β_j	0	0	0	0

$\gamma_{(1,4)}=1$

Подмножество контуров $\{(1,4)\}$

$\varphi_{(1,4)} = \varphi_{(R)} + \gamma_{(1,4)} = 14 + 1 = 15$



Пример решения задачи о коммивояжере

4. Сравнение $\varphi_{(1,4)} = 15 < \varphi_{(\overline{1,4})} = 18$

5. Развитие подмножества $\{(1,4)\}$

Таблица 7.

j / i	1	2	3	5
2	2	∞	0 (2)	3
3	3	0 (1)	∞	0 (3)
4	∞	4	0 (4)	6
5	0 (3)	1	3	∞

Выбор $\gamma_{(\overline{4,3})} = 4$

Подмножество контуров $\{(1,4), (\overline{4,3})\}$

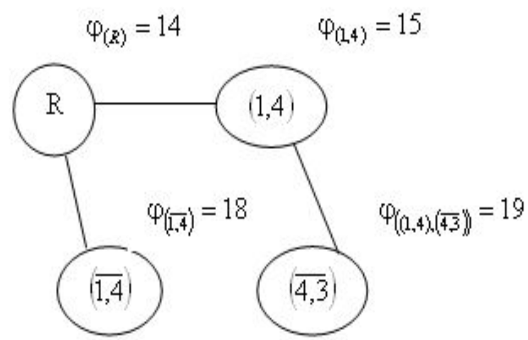
Таблица 8.

j / i	1	2	3	5	α_i
2	2	∞	0	3	0
3	3	0	∞	0	0
4	∞	4	∞	6	4
5	0	1	3	∞	0

Таблица 9.

j / i	1	2	3	5
2	2	∞	0	3
3	3	0	∞	0
4	∞	0	∞	2
5	0	1	3	∞
β_j	0	0	0	0

$$\varphi_{((1,4),(\overline{4,3}))} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(\overline{4,3})} = 15 + 4 = 19$$



Пример решения задачи о коммивояжере

6. Включение дуги $(4,3)$ в гамильтонов контур $(a_{31} = \infty)$

Таблица 10.

j i	1	2	5	α_i
2	2	∞	3	2
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0

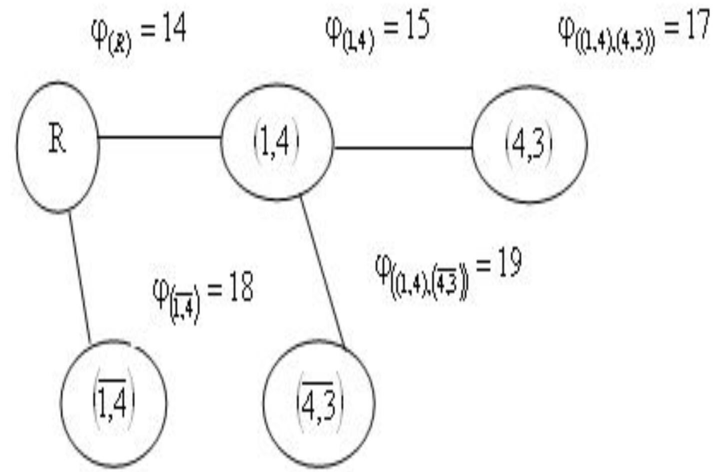


Таблица 11.

j i	1	2	5
2	0	∞	1
3	∞	0	0
5	0	1	∞
β_j	0	0	0

$\gamma_{(4,3)} = 2$

7. Сравнение $\varphi_{((1,4),(\overline{4,3}))} = 19 > \varphi_{((1,4),(4,3))} = 17$

Подмножество контуров $\{(1,4),(4,3)\}$

$$\varphi_{((1,4),(4,3))} = \varphi_{(1,4)} + \gamma_{(4,3)} = 15 + 2 = 17$$

Пример решения задачи о коммивояжере

8. Развитие подмножества $\{(1,4),(4,3)\}$

Таблица 11.

j i	1	2	5
2	0 (1)	∞	1
3	∞	0 (1)	0 (1)
5	0 (1)	1	∞

$$\varphi_{((1,4),(4,3),(\overline{2,1}))} = \varphi_{((1,4),(4,3))} + \gamma_{(\overline{2,1})} = 17 + 1 = 18$$

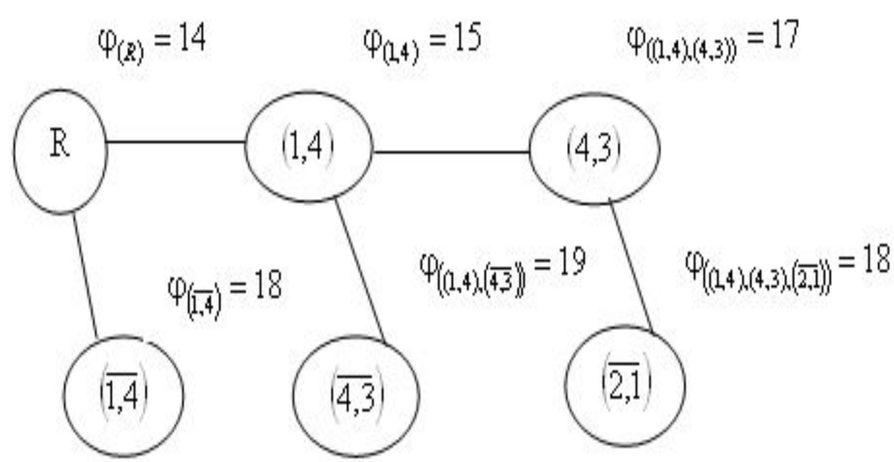
Выбор $\gamma_{(\overline{2,1})} = 1$

Таблица 12.

j i	1	2	5	α_i
2	∞	∞	1	1
3	∞	0	0	0
5	0	1	∞	0

Таблица 13.

j i	1	2	5
2	∞	∞	0
3	∞	0	0
5	0	1	∞
β_j	0	0	0



Пример решения задачи о коммивояжере

9. Включение дуги $(2,1)$ в гамильтонов контур $(\alpha_{32} = \infty)$

Таблица 14.

j / i	2	5	α_i
3	∞	0	0
5	1	∞	1

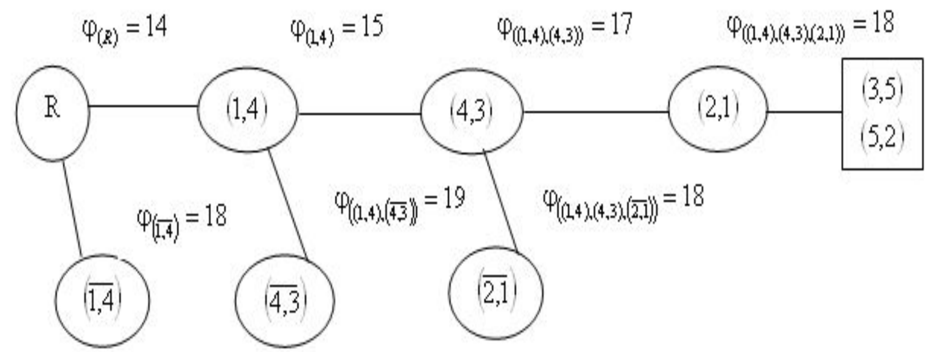
Таблица 15.

j / i	2	5
3	∞	0
5	0	∞
β_j	0	0

$\gamma_{(2,1)} = 1$

Подмножество контуров $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$

$$\varphi_{((1,4),(4,3),(2,1))} = \varphi_{((1,4),(4,3))} + \gamma_{(2,1)} = 17 + 1 = 18$$



9. Сравнение $\varphi_{((1,4),(4,3),(\overline{2,1}))} = \varphi_{((1,4),(4,3),(2,1))} = 18$

10. развитие обеих ветвей

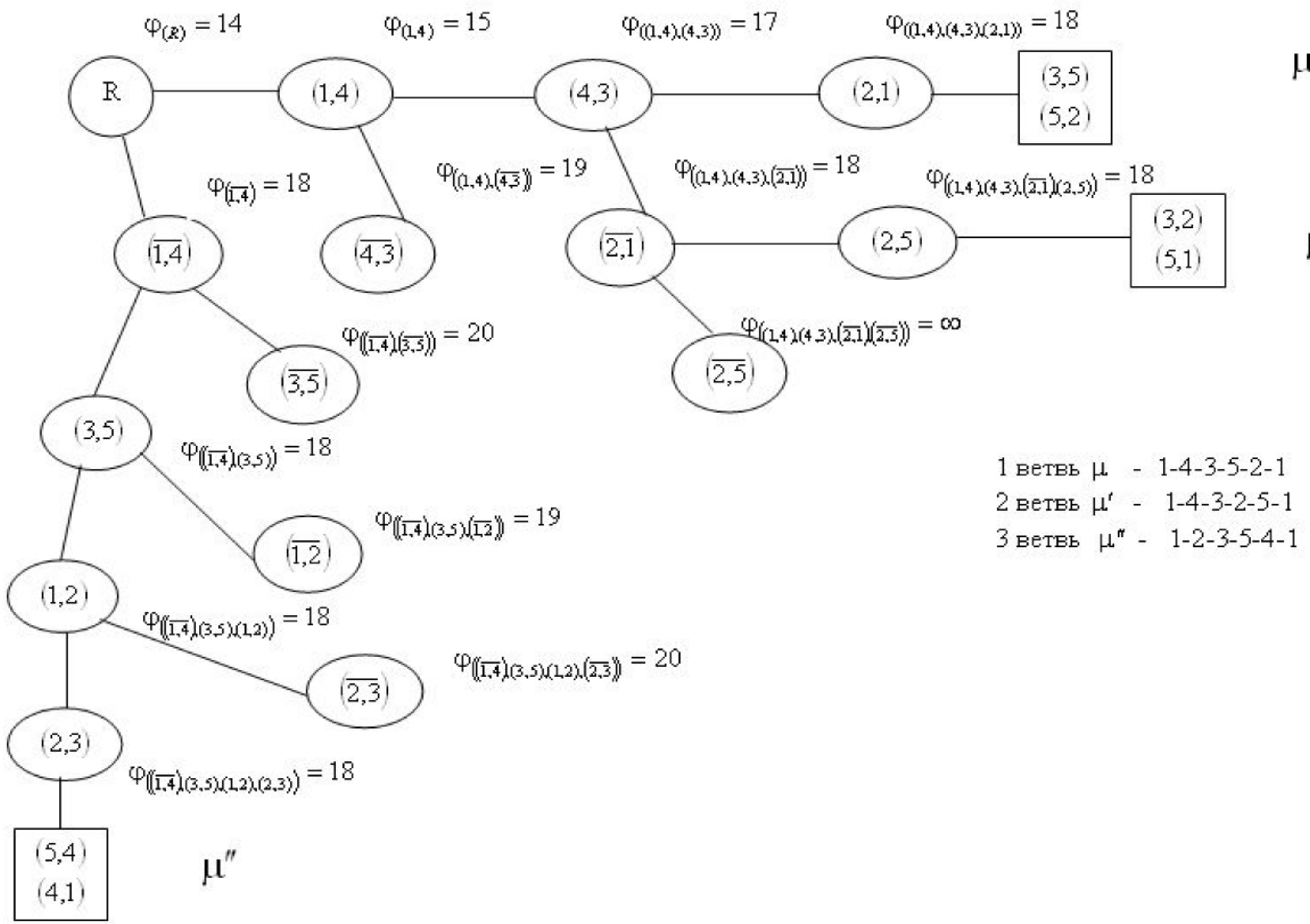
ветвь $\{(1,4),(4,3),(2,1)\}$ - из таблицы 15 размером 2×2 в гамильтонов контур входят дуги $(3,5)$ и $(5,2)$

Гамильтонов контур $1-4-3-5-2-1$ длиной $\mu = 18$ $\quad Rec = 18$

ветвь $\{(1,4),(4,3),(\overline{2,1})\}$ - развитие далее по алгоритму

Дерево маршрутов

Дополнительно развитие ветвей $\{(1,4),(4,3),(\overline{2,1})\}$ и $\{(\overline{1,4})\}$ с нижней границей 18



1 ветвь μ - 1-4-3-5-2-1 $\varphi = 18$
2 ветвь μ' - 1-4-3-2-5-1 $\varphi = 18$
3 ветвь μ'' - 1-2-3-5-4-1 $\varphi = 18$

Алгоритм построения минимального остовного дерева

N – множество узлов сети

C_k – множество узлов сети, соединенных после k-ой итерации

$\bar{C}_k$ – множество узлов сети, не соединенных с узлами множества C_k после выполнения k-ой итерации

I) $C_0 = 0 \quad \bar{C}_0 = N$

II) $k = 1$ выбор i из C_0 $>$ $\quad C_1 = \{i\} \;\; C_1 = N - \{i\} \quad k = k + 1$

III) в $\bar{C}_{k-1}$ поиск узла j^* из условия $min(d_{qp})$

d_{qp} – длина дуги между узлами q и p

q – узел из множества C_{k-1}

p – узел из множества $\bar{C}_{k-1}$

$$C_k = C_{k-1} + \{j^*\}$$

$$\bar{C}_k = \bar{C}_{k-1} - \{j^*\}$$

IV) $\bar{C}_k = 0$ $>$ задача решена

$\bar{C}_k \neq 0 \quad k = k + 1$ $>$ переход к III)