ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 20

7. СУБГРАДИЕНТ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

7. СУБГРАДИЕНТ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

7.1. Определение субградиента и субдифференциала функции. Примеры.

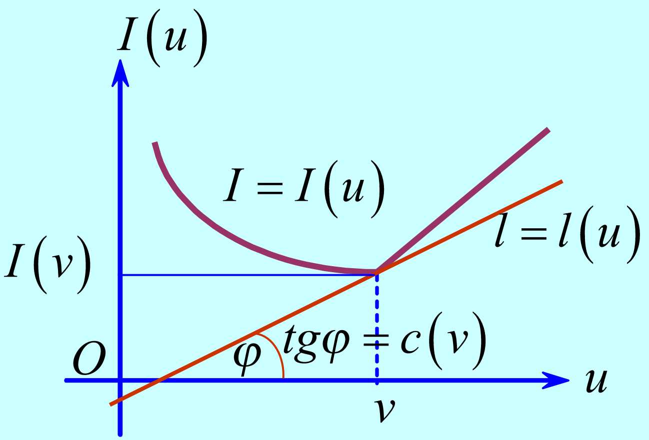
7. СУБГРАДИЕНТ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

7.1. Определение субградиента и субдифференциала функции. Примеры.

Определение 1. ***Пусть*** $I : U \to R^1, U \subset R^n$ и $v \in U$. ***Вектор*** $c(v) \in R^n$ ***называется субградиентом функции*** I ***в точке*** v, ***если***

$$I(u) \geq I(v) + \langle c(v), u - v \rangle, \forall u \in U. \quad (1)$$

Множество всех субградиентов функции I ***в точке*** v ***называют субдифференциалом этой функции в точке*** v ***и обозначают символом*** $\partial I(v)$.



Геометрический смысл неравенства (1) состоит в том, что график функции I лежит не ниже графика линейной функции $l : R^n \to R^1$, определенной равенством $l(u) = I(v) + \langle c(v), u - v \rangle, \; u \in U$.

При этом $l(v) = I(v)$.

Понятие субградиента и субдифференциала определено для произвольной функции $I : R^n \to R^1$. Однако естественным это понятие является для выпуклых функций.

Для выпуклых дифференцируемых функций был установлен критерий выпуклости

$$I(u) \geq I(v) + \langle I'(v), u - v \rangle, \forall u \in U. \qquad (2)$$

Выпуклая функция может не быть дифференцируемой даже во внутренних точках области определения. Для таких функций неравенство (1)

$$I(u) \geq I(v) + \langle c(v), u - v \rangle, \qquad (1)$$

является обобщением неравенства (2).

Из сказанного выше следует, что субдифференциал гладких выпуклых функций не пуст, а градиенты этих функций суть их субградиенты. Следующая теорема утверждает, что во внутренних точках области определения гладкая выпуклая функция других субградиентов иметь не может.

Теорема 1. ***Пусть функция*** $I : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла. Тогда если*** $I \in C^1(U)$, ***то***

$$\partial I(v) = \{I'(v)\} \ \forall v \in \operatorname{int} U.$$

Доказательство. Вложение

$$\{I'(v)\} \subset \partial I(v), \forall v \in \operatorname{int} U$$

следует непосредственно из неравенства (2). Докажем обратное вложение. Пусть

$c(v)\in\partial I(v).$ В силу $I\in C^1(U)$ для любых $u\in U$ справедливо равенство

$$I(u)=I(v)+\langle I'(v),u-v\rangle+O(\|u-v\|).$$

$$-\quad I(u)\ge I(v)+\langle c(v),u-v\rangle \quad (1)$$

$$0\le\langle I'(v)-c(v),\,u-v\rangle+O(\|u-v\|)\quad\Rightarrow$$

$$\langle I'(v)-c(v),\,u-v\rangle\ge O(\underbrace{\|u-v\|}_{\substack{>0\\ \text{мало}}}).\quad (3)$$

Условие $v\in\operatorname{int}U$ влечет за собой включение $u(\varepsilon)=v-\varepsilon\,(I'(v)-c(v))\in U$ для всех достаточно малых $\varepsilon>0.$ В неравенстве (3) полагаем $u=u(\varepsilon).$ Имеем

$$\Big\langle I'(v)-c(v),\,\overbrace{u}^{u(\varepsilon)}-v\Big\rangle=\langle I'(v)-c(v),\,v-\varepsilon(I'(v)-c(v))-v\rangle=$$

$$=-\varepsilon\langle I'(v)-c(v),\,I'(v)-c(v)\rangle=-\varepsilon\|I'(v)-c(v)\|^2\Rightarrow$$

$$-\varepsilon\|I'(v)-c(v)\|^2\ge O(\varepsilon)\Rightarrow\|I'(v)-c(v)\|\le\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}\Rightarrow$$

$$\|I'(v)-c(v)\|=0\Rightarrow I'(v)=c(v)\Rightarrow c(v)\in\{I'(v)\}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $g : R^n \to R^1$ произвольная функция и $g(v) = 0.$ Тогда для функции

$$I(u) = |g(u)|,\ u \in R^n$$

справедливо включение $0 \in \partial I(v).$ Действительно, для всех $u \in R^n$ имеем

$$|g(u)| \ge \overset{|g(v)|}{0} \Rightarrow \overbrace{|g(u)|}^{I(u)} \ge \overbrace{|g(v)|}^{I(v)} \Rightarrow I(u) \ge I(v) + \overset{\langle 0,\, u-v\rangle}{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I(u) \ge I(v) + \langle 0, u - v\rangle.$ Полученное неравенство в силу (1)

$c(v) \in \partial I(v) \Leftrightarrow I(u) \ge I(v) + \langle c(v), u - v\rangle \quad (1)$ и означает, что $c(v) = 0 \in \partial I(v).$

Существуют не дифференцируемые в точке функции, субдифференциал которых не пуст.

Пример 2. Функция $I : R^n \to R^1,$ определенная равенством $I(u) = \|u\|,\ u \in R^n,$ в точке $v = 0$ не дифференцируема, но в силу предыдущего примера $\partial I(0) \ne \varnothing.$

Более того, для этой функции из неравенства $\langle c, u\rangle \le \|c\| \cdot \|u\|$ следует, что при $\|c\| \le 1$ справедливо

$$I(u) = \overset{I(0)}{0} + \overset{\ge\|c\|}{1} \cdot \|u\| \ge I(0) + \overbrace{\|c\| \cdot \|u\|}^{\ge\langle c,u\rangle} \ge I(0) + \langle c, u\rangle = I(0) + \langle c, u - 0\rangle \Rightarrow$$

$$I(u) \ge I(0) + \langle c, u - 0\rangle, \quad \|c\| \le 1.$$

Последнее $I(u) \geq I(0) + \langle c, u - 0 \rangle, \quad \|c\| \leq 1$ означает, что $c \in \partial I(0)$.

Таким образом, справедливо вложение

$$\left\{ c \in R^n \,\middle|\, \|c\| \leq 1 \right\} \subset \partial I(0).$$

Упражнение. Доказать, что в разобранном примере на самом деле имеет место равенство

$$\left\{ c \in R^n \,\middle|\, \|c\| \leq 1 \right\} = \partial I(0).$$

Решение.

В силу (1) достаточно доказать, что для любого $c \in R^n, \quad \|c\| > 1$ найдется $\hat{u} \in R^n$, такой, что

$$\overset{\|\hat{u}\|}{I(\hat{u})} < \overset{\|0\|}{I(v)} + \left\langle \overset{\|c\|>1}{c}, \hat{u} - \overset{=0}{v} \right\rangle \Rightarrow \|\hat{u}\| < \langle c, \hat{u} \rangle.$$

В качестве такого полагаем $\hat{u} = \dfrac{c}{\|c\|} \Rightarrow \|\hat{u}\| = 1.$ Тогда

$$\langle c, \hat{u} \rangle = \left\langle c, \frac{c}{\|c\|} \right\rangle = \frac{\|c\|^2}{\|c\|} = \|\ \| > 1 = \|\hat{\ }\|.$$

Требуемое неравенство имеет место.

Пусть функция $I : R^n \to R^1$ определена формулой $I(u) = \max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} u^i$,

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \in R^n.$$ Обозначим $$Z(v) = \left\{ i \in \{1,\dots,n\} \,\middle|\, v^i = \max_{s \in \{1,\dots,n\}} v^s \right\}.$$

В частности, пусть $n = 4,\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$ Тогда $I(v) = 2,\ Z(v) = \{1,3\}.$

Заметим, что для всех $v \in R^n$ имеет место равенство

$$I(v) = v^i, \quad i \in Z(v). \qquad (4)$$

Для частного случая

$$I(v) = v^1 = v^3 = 2, \quad Z(v) = \{1,3\}.$$

Упражнение. Доказать, что функция $I(u) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} u^i$ является выпуклой.

Решение. Пусть $u_1, u_2 \in R^n$, $\alpha \in [0,1]$. Полагаем $u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2$.

Тогда

$$I(u_\alpha) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(u_\alpha^i\right) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(\alpha u_1^i + (1-\alpha)u_2^i\right) \le$$

$$\le \left(\alpha \overbrace{\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(u_1^i\right)}^{I(u_1)} + (1-\alpha) \overbrace{\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(u_2^i\right)}^{I(u_2)}\right) = \alpha I(u_1) + (1-\alpha) I(u_2).$$

Выпуклость функции I доказана.

Пример 3. Доказать, что для всех $v \in R^n$ справедливо

$$\partial I(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \, c_1 + \ldots + c_n = 1, c_i \ge 0, i = 1,\ldots,n;\ c_i = 0, i \notin Z(v); \right\}. \quad (5)$$

В частности, если $Z(v) = \{i_*\}$, то $\partial I(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, где 1 стоит на i_* месте.

Решение.

Правую часть равенства (5)

$$\partial I(v)=\left\{ c=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \, c_1+\dots+c_n=1, c_i\ge 0, i=1,\dots,n; c_i=0, i\notin Z(v); \right\}. \quad (5)$$

обозначим символом $A(v)$. Требуется доказать, что $A(v)=\partial I(v)$.

Пусть $c\in A(v)$. Покажем, что $c\in\partial I(v)$. Из (4) $I(v)=v^i, i\in Z(v) \quad (4)$

следует, что

$$\overbrace{I(u)}^{\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j}-\overbrace{I(v)}^{v^i,\, i\in Z(v)}=\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j\right)-v^i, \quad u,v\in R^n, i\in Z(v). \qquad (6)$$

Каждое из равенств в (6) умножим на c_i и сложим их по всем $i\in Z(v)$. Имеем

$$\big(I(u)-I(v)\big)\sum_{i\in Z(v)} c_i=\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j\right)\sum_{i\in Z(v)} c_i-\sum_{i\in Z(v)} c_i v^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\overbrace{\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j\right)}^{\ge u^i}\overset{\ge 0}{c_i}-\sum_{i=1}^{n} c_i v^i\ge\sum_{i=1}^{n} u^i c_i-\sum_{i=1}^{n} c_i v^i=\overbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i\left(u^i-v^i\right)}^{\langle c,u-v\rangle}=$$

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{\langle c,u-v\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(u^i - v^i\right) = \langle c, u-v \rangle.$$

Заметим, что $1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \overset{c_i=0,\; i\notin Z(v)}{=} \sum_{i \in Z(v)} c_i.$ Тогда

$$\left(I(u) - I(v)\right) \overbrace{\sum_{i \in Z(v)} c_i}^{=1} \ge \langle c, u-v \rangle \Rightarrow I(u) - I(v) \ge \langle c, u-v \rangle \Rightarrow$$

$$I(u) \ge I(v) + \langle c, u-v \rangle \Rightarrow c \in \partial I(v).$$

$$c(v) \in \partial I(v) \Leftrightarrow I(u) \ge I(v) + \langle c(v), u-v \rangle \quad (1)$$

Из доказанного включения $c \in \partial I(v)$ следует, что $A(v) \subset \partial I(v).$

Докажем обратное вложение $\partial I(v) \subset A(v).$

Пусть $c \in \partial I(v).$ Тогда по определению субградиента c

$$c(v)\in\partial I(v)\Leftrightarrow I(u)\ge I(v)+\langle c(v),u-v\rangle \quad (1)$$

получим

$$\overbrace{I(u)}^{\left(\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j\right)} - \overbrace{I(v)}^{\left(\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} v^j\right)} \ge \langle c, u-v\rangle, \quad u\in R^n \Rightarrow$$

$$\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u^j\right)-\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} v^j\right)\ge\langle c,u-v\rangle,\quad u\in R^n \quad (7)$$

Обозначим $u_\pm=\begin{pmatrix} v^1\pm 1\\ \vdots \\ v^n\pm 1\end{pmatrix}$. В (7) полагаем $u=u_\pm$. Последовательно вычисляем левую и правую части (7)

$$\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}}\left(v^j\pm 1\right)\right)-\left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} v^j\right)=\pm 1.$$

$$\langle c,u_\pm-v\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(v^i\pm 1-v^i\right)=\pm\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

$$\Longrightarrow \qquad \pm 1\ge\pm\sum_{i=1}^{n}c_i\Rightarrow$$

$$\pm 1 \geq \pm \sum_{i=1}^{n} c_i \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i \leq 1 \\ -\sum_{i=1}^{n} c_i \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1. \quad (8)$$

$$A(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} c_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, n\}; \\ c_i = 0, i \notin Z(v); \\ c_1 + \ldots + c_n = 1 \end{array} \right\}$$

Для $\varepsilon > 0$ и всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ полагаем $u_{\varepsilon i}^{-} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^i - \varepsilon \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$. Очевидно, что $I\left(u_{\varepsilon i}^{-}\right) \leq I(v)$. По определению субградиента c в силу (7)

$I(u) - I(v) \geq \langle c, u - v \rangle$ (7) при $u = u_{\varepsilon i}^{-}$ имеем

$$0 \geq I\left(u_{\varepsilon i}^{-}\right) - I(v) \overset{(7)}{\geq} \left\langle c, u_{\varepsilon i}^{-} - v \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(u_{\varepsilon i}^{-j} - v^j \right) =$$

$$0 \ge \sum_{j=1}^{n} c_j \left(u_{\varepsilon i}^{-j} - v^j \right) = \overbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} c_j \left(v^j - v^j \right)}^{0} + c_i \left(v^i - \varepsilon - v^i \right) =$$

$$= c_i(-\varepsilon) \Rightarrow \quad 0 \ge c_i(-\varepsilon) \Rightarrow \quad c_i \ge 0,\, i \in \{1, \dots, n\}. \qquad (9)$$

$$A(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} c_i \ge 0,\, i \in \{1, \dots, n\}; \\ c_i = 0,\, i \notin Z(v); \\ c_1 + \dots + c_n = 1 \end{array} \right\}$$

Далее пусть $i \notin Z(v) \Rightarrow v^i < I(v) \Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : v^i + \varepsilon < I(v).$$

Полагаем $u_{\varepsilon i}^{+} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ \overset{<I(v)}{v^i + \varepsilon} \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$

Очевидно, что $I\left(u_{\varepsilon i}^{+}\right) = I(v)$.

В силу (7) $I(u) - I(v) \ge \langle c, u - v \rangle, \quad u \in R^n \qquad (7)$

при $u = u_{\varepsilon i}^{+}$ имеем

$$0 = I\left(u_{\varepsilon i}^{+}\right) - I(v) \overset{(7)}{\ge} \left\langle \overset{\ge 0}{c}, u_{\varepsilon i}^{+} - v \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overset{\ge 0}{c_j} \left(u_{\varepsilon i}^{+j} - v^j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overset{\geq}{c_j} \left(u_{\varepsilon i}^{+j} - v^j \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j u_{\varepsilon i}^{+j} + \overset{\geq 0}{c_i} \left(\overset{v^i+\varepsilon}{u_{\varepsilon i}^{+i}} - v^i \right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} c_j \left(\underbrace{v^j - v^j}_{0} \right) + c_i \left(\underbrace{v^i + \varepsilon - v^i}_{\varepsilon} \right) = \varepsilon\, c_i \leq 0 \Rightarrow c_i \leq 0, i \notin Z(v).$$

Отсюда и (9) $c_i \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}$. (9) выводим

$$c_i \leq 0, c_i \geq 0 \Rightarrow c_i = 0, i \notin Z(v). \quad A(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_i \geq 0, i \in Z(v); \\ c_i = 0, i \notin Z(v); \\ c_1 + \dots + c_n = 1 \end{array} \right\}$$

Тогда $c \in A(v)$. Таким образом, $\partial I(v) \subset A(v) \Rightarrow \partial I(v) = A(v)$.

Упражнение. Для частного случая $n = 4, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ доказать, что

$$c \in A(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 + c_3 = 1, c_1 \geq 0, c_3 \geq 0 \right\} \Rightarrow c \in \partial I(v)$$

Решение. Требуется доказать, что $c \in \partial I(v)$. Для любого $c \in A(v)$ и $u \in R^4$ имеем

$$I(u) - I(v) = \overset{c_1+c_3}{1} \cdot \left(\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^j \right) - \overset{c_1+c_3}{1} \cdot 2 = (c_1 + c_3)\left(\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^j \right) - 2(c_1 + c_3) =$$

$$= \overset{\geq 0}{c_1} \cdot \left(\overset{\geq u^1}{\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^j} \right) + \overset{\geq 0}{c_3} \cdot \left(\overset{\geq u^3}{\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^j} \right) - 2c_1 - 2c_3 \geq c_1 u_1 + c_3 u_3 - 2c_1 - 2c_3 =$$

$$= c_1 u_1 + c_3 u_3 - 2c_1 - 2c_3 =$$

$$= c_1\left(u_1 - \overset{v_1}{2}\right) + 0\cdot\left(u_2 - \overset{v_2}{0}\right) + c_3\left(u_3 - \overset{v_3}{2}\right) + 0\cdot\left(u_4 - \overset{v_4}{(-1)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} c_i\left(u^i - v^i\right) = \left\langle c, u - v\right\rangle \Rightarrow$$

$$I(u) - I(v) \geq \left\langle c, u - v\right\rangle \Rightarrow$$

$$I(u) \geq I(v) + \left\langle c, u - v\right\rangle \Rightarrow c \in \partial I(v).$$

Утверждение доказано.

Упражнение. Для частного случая $n = 4, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ доказать, что

$$c \in \partial I(v) \Rightarrow c \in A(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1 + c_3 = 1, c_1 \geq 0, c_3 \geq 0 \right\}.$$

Решение.

$$c \in \partial I(v) \Leftrightarrow \overset{\left(\max\limits_{j \in \{1,\dots,4\}} u^j\right)}{I(u)} \geq \overset{2}{I(v)} + \langle c, u - v \rangle \Rightarrow$$

$$\left(\max_{j \in \{1,\dots,4\}} u^j \right) \geq 2 + c_1 \cdot \left(u^1 - 2\right) + c_2 \left(u^2 - 0\right) +$$

$$+ c_3 \cdot \left(u^3 - 2\right) + c_4 \cdot \left(u^4 - (-1)\right), \forall u \in R^4 \quad (11)$$

Обозначим: $u_\pm = \begin{pmatrix} 2\pm1 \\ 0\pm1 \\ 2\pm1 \\ -1\pm1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad u_+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Подставим u_+ в (11) $\left(\overset{3}{\max_{j\in\{1,\dots,4\}}} u^j\right) \geq 2 + c_1\cdot\left(\overset{3}{u^1}-2\right) + c_2\left(\overset{1}{u^2}-0\right) + c_3\cdot\left(\overset{3}{u^3}-2\right) + c_4\cdot\left(\overset{0}{u^4}+1\right) \quad (11)$

$$3 \geq 2 + c_1\cdot(3-2) + c_2 + c_3\cdot(3-2) + c_4\cdot(0+1) \Rightarrow$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \leq 1. \qquad (12)$$

Подставим u_- в (11) $\left(\overset{1}{\max_{j\in\{1,\dots,4\}}} u^j\right) \geq 2 + c_1\cdot\left(\overset{1}{u^1}-2\right) + c_2\left(\overset{-1}{u^2}-0\right) + c_3\cdot\left(\overset{1}{u^3}-2\right) + c_4\cdot\left(\overset{-2}{u^4}+1\right) \quad (11)$

$$1 \geq 2 + c_1\cdot(1-2) + (-1)u^2 + c_3\cdot(1-2) + c_4\cdot(-2+1) \Rightarrow$$

$$-1 \geq -c_1 - c_2 - c_3 - c_4 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c \geq 1 \qquad (13)$$

Из (12) и (13) следует

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1. \qquad (14)$$

Полагаем

$$u_{\varepsilon 1}^{-}=\begin{pmatrix}2-\varepsilon\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\ u_{\varepsilon 2}^{-}=\begin{pmatrix}2\\0-\varepsilon\\2\\-1\end{pmatrix},\ u_{\varepsilon 3}^{-}=\begin{pmatrix}2\\0\\2-\varepsilon\\-1\end{pmatrix},\ u_{\varepsilon 4}^{-}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-1-\varepsilon\end{pmatrix}$$

Последовательно подставляем в (11)

$$\left(\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^j\right)\geq 2+c_1\cdot\left(u^1-2\right)+c_2u^2+c_3\cdot\left(u^3-2\right)+c_4\cdot\left(u^4+1\right)\quad (11)$$

$$u=u_{\varepsilon 1}^{-}\Rightarrow 2\geq 2+c_1\cdot(-\varepsilon)\Rightarrow c_1\geq 0$$

$$u=u_{\varepsilon 2}^{-}\Rightarrow 2\geq 2+c_2(-\varepsilon)\Rightarrow c_2\geq 0$$

$$u=u_{\varepsilon 3}^{-}\Rightarrow 2\geq 2+c_3(-\varepsilon)\Rightarrow c_3\geq 0$$

$$u=u_{\varepsilon 4}^{-}\Rightarrow 2\geq 2+c_4(-\varepsilon)\Rightarrow c_4\geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1\geq 0,\ c_2\geq 0,\ c_3\geq 0,\ c_4\geq 0.$$

Полагаем $u_{\varepsilon 2}^{+} = \begin{pmatrix} 2 \\ \overset{<2}{0+\varepsilon} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_{\varepsilon 4}^{+} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \overset{<2}{-1+\varepsilon} \end{pmatrix}$. Последовательно подставляем в (11)

$$\left(\max_{j\in\{1,\ldots,4\}} u^{j}\right) \geq 2 + c_1\cdot\left(u^1-2\right) + c_2 u^2 + c_3\cdot\left(u^3-2\right) + c_4\cdot\left(u^4+1\right), \quad (11)$$

$$u = u_{\varepsilon 2}^{+} \Rightarrow 2 \geq 2 + c_2\cdot\varepsilon \Rightarrow c_2 \leq 0,\ c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$u = u_{\varepsilon 4}^{+} \Rightarrow 2 \geq 2 + c_4\cdot(\varepsilon) \Rightarrow c_4 \leq 0,\ c_4 \geq 0 \Rightarrow c_4 = 0.$$

Утверждение доказано. Таким образом, для частного случая доказано

$$\partial I(v) = \left\{ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\, c_1 + c_3 = 1,\ c_1 \geq 0,\ c_3 \geq 0 \right\}.$$

Упражнение. Для функции $I(u)=\max\left\{\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix}\right\}$ найти ее субдифференциал в точках $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Построить эти множества на плоскости c_1Oc_2.

Решение. $$\partial I(v)=\left\{c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\middle| c_1+c_2=1, c_1\ge 0, c_2\ge 0;\quad c_i=0, i\notin Z(v)\right\}$$

$$Z(v)=\left\{i\in\{1,2\}\middle| v^i=\max_{s\in\{1,2\}} v^s\right\}.$$

$$Z(v_1)=\{1,2\}\Rightarrow\qquad \partial I(v_1)=\left\{c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\middle| c_1+c_2=1, c_1\ge 0, c_2\ge 0\right\}$$

$$Z(v_2)=\{1\}\Rightarrow\quad \partial I(v_2)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$Z(v_3)=\{2\}\Rightarrow\quad \partial I(v_3)=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$