ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 28

11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

11.1. Двойственная задача к канонической задаче линейного программирования.

11.2. Двойственная задача к стандартной задаче линейного программирования.

11.3. Двойственная задача к общей задаче линейного программирования.

11.4. Правило построения двойственной задачи.

11.1. Двойственная задача к канонической задаче линейного программирования.

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования.

Задача 1.
$$I(u) = \langle c, u \rangle \to \inf,$$
$$u \in U = \{ u \in U_0 \mid Au - b = 0 \}, \qquad U_0 = \{ u \in R^n \mid u \geq 0 \},$$

Здесь $A \div s \times n, b \in R^s, c \in R^n, \quad \Lambda^0 = R^s.$

Построим функцию Лагранжа для **задачи 1**. Имеем
$$L(u,\lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au - b \rangle = \langle c, u \rangle + \langle \lambda, Au \rangle - \langle \lambda, b \rangle =$$
$$= \langle c, u \rangle + \langle A^T \lambda, u \rangle - \langle \lambda, b \rangle = \langle c + A^T \lambda, u \rangle - \langle \lambda, b \rangle.$$

Функция $\psi : \Lambda^0 \to R^1$, определяемая формулой $\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} L\left(\overset{\geq 0}{u}, \lambda \right)$, здесь выписывается в явном виде. Действительно,
$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T \lambda \geq 0; \\ -\infty, & \exists i \in \{1, \ldots, s\} : \left(c + A^T \lambda \right)^i < 0. \end{cases}$$

Таким образом, точка $\lambda^* \in \Lambda^0$, на которой может достигаться максимум функции

ψ

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T \lambda \geq 0; \\ -\infty, & \exists i \in \{1, \ldots, s\} : \left(c + A^T \lambda\right)^i < 0 \end{cases}$$

следует искать среди тех векторов $\lambda \in \Lambda^0$ для которых выполнено $c + A^T \lambda \geq 0.$ Двойственная задача $\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda^0$ формулируется так.

Задача 1д.

$$\langle -b, \lambda \rangle \to \sup,$$

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^s \middle| c + A^T \lambda \geq 0 \right\} = \left\{ \lambda \in R^s \middle| -A^T \lambda - c \leq 0 \right\}.$$

Данная задача эквивалентна следующей.

Задача 1д(а).

$$\langle b, \lambda \rangle \to \inf,$$

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^s \middle| -A^T \lambda - c \leq 0 \right\}.$$

Эквивалентность з**адачи 1д и задача 1д(а)** понимается в том смысле, что их решениями служат одни и те же точки $\lambda^* \in \Lambda.$ **Задачу 1д(а)** обычно называют двойственной к **задаче 1.**

Задача 1д(а). является задачей линейного программирования с ограничениями типа неравенств. Матрица ограничений $-A^T$ имеет размер $n \times s.$ Заметим, что эту задачу Нельзя считать стандартной, т.к. компоненты вектора λ не обязаны быть положительными.

Покажем, что задача двойственная к **задаче 1д(а),** будет эквивалентна **задаче 1.**

Обозначим множители Лагранжа в **задаче 1д(а)** символами $u^1, \dots, u^n.$ Составим функцию Лагранжа для **задачи 1д(а)**

Задача 1д(а)

$$\langle b, \lambda \rangle \to \inf,$$

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^s \middle| -A^T \lambda - \quad \le 0 \right\}$$

Полагаем $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}.$ Тогда

$$L_Д(\lambda, u) = \langle b, \lambda \rangle + \langle u, -A^T \lambda - c \rangle = \langle b, \lambda \rangle - \langle u, c \rangle + \langle u, -A^T \lambda \rangle =$$

$$= \langle b, \lambda \rangle - \langle u, c \rangle - \langle Au, \lambda \rangle = \langle b - Au, \lambda \rangle - \langle c, u \rangle$$

основные двойственные

Здесь

$$U_{0Д} = \left\{ \lambda \middle| \lambda \in R^s \right\} = \Lambda^0, \quad \Lambda_Д^0 = \left\{ u \in R^n \middle| u \ge 0 \right\} = U_0,$$

$$L_Д(\lambda,u)=\langle b-Au,\lambda\rangle-\langle c,u\rangle$$

Тогда

$$\psi_Д(u)=\inf_{\lambda\in U_{0Д}} L_Д(\lambda,u)=\inf_{\lambda\in R^s}\left[\left\langle b-Au,\overset{\in R^s}{\lambda}\right\rangle-\langle c,u\rangle\right]=$$

$$=\begin{cases}-\langle c,u\rangle, & b-Au=0;\\ -\infty, & b-Au\neq 0.\end{cases}$$

Задача двойственная к **задаче 1д(а)**

$$\psi_Д(u)\to\sup,\quad u\in\Lambda_Д^0=U_0=\{u\in R^n\,|\,u\ge 0\}$$ имеет вид

(Задача 1д(а))д. $\langle -c,u\rangle\to\sup,$

$$u\in\{u\in R^n\,|\,b-Au=0;u\ge 0\}=U.$$

(Задача 1д(а))д(а).

$$\langle c,u\rangle\to\inf,$$

$$u\in\{u\in R^n\,|\,b-Au=0;u\ge 0\}=U.$$

Задача 1.

$$\langle c,u\rangle\to\inf,$$

$$u=\{u\in U_0\,|\;Au-b=0\},$$

$$U_0=\{u\in R^n\,|\,u\ge 0\}.$$

Задачи **1** и **(1д(а))д(а)** тождественны.

11.2. Двойственная задача к стандартной задаче линейного программирования.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования.

Задача 2.

$$\langle c, u\rangle \to \inf,$$

$$U_0 = \left\{u \in R^n \middle| u \geq 0\right\}, \qquad u \in U = \left\{u \in U_0 \middle| \; Au - b \leq 0\right\},$$

Здесь

$$A \div m \times n, b \in R^m, c \in R^n, \Lambda^0 = \left\{\lambda \in R^m \middle| \lambda \geq 0\right\}$$

Построим функцию Лагранжа для **задачи 2**. Имеем

$$L(u,\lambda) = \langle c, u\rangle + \langle \lambda, Au - b\rangle = \langle c, u\rangle + \langle \lambda, Au\rangle - \langle \lambda, b\rangle =$$

$$= \langle c + A^T\lambda, u\rangle - \langle \lambda, b\rangle.$$

Функция $\psi : \Lambda^0 \to R^1,$ определяемая формулой $\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} L(u,\lambda),$

здесь выписывается в явном виде. Действительно,

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda\rangle, & c + A^T\lambda \geq 0; \\ -\infty, & \exists i \in \{1, \ldots, m\} : \left(c + A^T\lambda\right)^i < 0. \end{cases}$$

Таким образом, точка $\lambda^* \in \Lambda^0$, на которой может достигаться максимум функции

ψ

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\langle b, \lambda \rangle, & c + A^T\lambda \geq 0; \\ -\infty, & \exists i \in \{1, \ldots, m\} : \left(c + A^T\lambda\right)^i < 0. \end{cases}$$

следует искать среди тех векторов $\lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda \in R^m \middle| \lambda \geq 0 \right\}$, для которых выполнено $c + A^T\lambda \geq 0.$ Двойственная задача $\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda \in R^m \middle| \lambda \geq 0 \right\}$ формулируется так.

Задача 2д.

$$\langle -b, \lambda \rangle \to \sup,$$

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^m \middle| c + A^T\lambda \geq 0, \lambda \in \Lambda^0 \right\} = \left\{ \lambda \in R^m \middle| -A^T\lambda - c \leq 0, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Данная задача эквивалентна следующей.

Задача 2д(а).

$$\langle b, \lambda \rangle \to inf,$$

$$\lambda \in \left\{ \lambda \in R^m \middle| -A^T\lambda - c \leq 0, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Задача 2д(а)

$\langle b, \lambda \rangle \to inf$,

$\lambda \in \left\{ \lambda \in R^m \middle| -A^T\lambda - c \le 0,\ \lambda \ge 0 \right\}$

Эквивалентность **Задачи 2д и Задача 2д(а)** понимается в том смысле, что их решениями служат одни и те же точки $\lambda^* \in \Lambda$. **Задачу 2д(а)** обычно называют двойственной к **Задаче 2.**

Задача 2д(а). является стандартной задачей линейного программирования. Матрица ограничений имеет размер $n \times m$.

Покажем, что задача двойственная к **задаче 2д(а)** будет эквивалентна **задаче 2.**

Обозначим множители Лагранжа в **задаче 2д(а)** символами $u^1, \dots, u^n$.

Составим функцию Лагранжа для **задаче 2д(а).** Полагаем $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$. Тогда

$$L_Д(\lambda, u) = \langle b, \lambda \rangle + \langle u, -A^T\lambda - c \rangle = \langle b - Au, \lambda \rangle - \langle c, u \rangle.$$

Здесь

основные *двойственные*

$$U_{0Д} = \lambda \in \left\{ \lambda \in R^m \middle| \lambda \ge 0 \right\} = \Lambda^0, \qquad \Lambda_Д^0 = \left\{ u \in R^n \middle| u \ge 0 \right\} = U_0.$$

Тогда

$$L_Д(\lambda, u) = \langle b - Au, \lambda \rangle - \langle c, u \rangle$$

$$\psi_Д(u) = \inf_{\lambda \in U_{0Д}} L_Д(\lambda, u) = \inf_{\lambda \in \left\{ \lambda \in R^m \middle| \lambda \ge 0 \right\}} \left[\langle b - Au, \lambda \rangle - \langle c, u \rangle \right] =$$

$$= \inf_{\lambda \in \left\{ \lambda \in R^m \middle| \lambda \ge 0 \right\}} \left[\left\langle b - Au, \lambda \right\rangle - \left\langle c, u \right\rangle \right] =$$

$$= \begin{cases} -\left\langle c, u \right\rangle, & b - Au \ge 0; \\ -\infty, & \exists i \in \{1, \ldots, m\} : \left(c + A^T \lambda\right)^i < 0 \end{cases} = \psi_Д(u)$$

Задача двойственная к **задаче 2д(а)** $\psi_Д(u) \to \sup, \quad u \in \Lambda_Д^0 = U_0 = \left\{ u \in R^n \middle| u \ge 0 \right\}$ имеет вид.

Задача 2

$$\left\langle c, u \right\rangle \to \inf,$$

$$U_0 = \left\{ u \in R^n \middle| u \ge 0 \right\},$$

$$u \in \left\{ u \in U_0 \middle| \ Au - b \le 0 \right\}.$$

(Задача 2д(а))д.

$$\left\langle -c, u \right\rangle \to \sup,$$

$$u \in \left\{ u \in R^n \middle| Au \le b; u \ge 0 \right\} = U.$$

(Задача 2д(а))д(а).

$$\left\langle c, u \right\rangle \to \inf,$$

$$u \in \left\{ u \in R^n \middle| Au \le b; u \ge 0 \right\} = U.$$

Задачи **2** и **(2д(а))д(а)** тождественны.

11.3. Двойственная задача к общей задаче линейного программирования.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования.

Задача 3.

$$\langle c, u \rangle \to \inf,$$

$$u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in U_0 \;\middle|\; Au - b \le 0,\ \hat{A}u - \hat{b} = 0 \right\},$$

Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^k \end{pmatrix} \in R^k, \quad \overline{w} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \in R^{n-k}, k \le n,$$

$$A \div m \times n,\ \hat{A} \div (s - m) \times n, \qquad b \in R^m, \hat{b} \in R^{s-m}, c \in R^n.$$

$$U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in R^n \;\middle|\; w \ge 0, \right\}.$$

Полагаем

$$\Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^s \,\middle|\, \mu \ge 0 \right\}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in R^m, \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} \in R^{s-m}$$

Построим функцию Лагранжа для **задачи 3**. Имеем

$$L(u,\lambda) = \langle c, u \rangle + \langle \mu, Au - b \rangle + \langle \bar{\mu}, \hat{A}u - \hat{b} \rangle =$$

$$= \langle c, u \rangle + \langle \mu, Au \rangle - \langle \mu, b \rangle + \langle \bar{\mu}, \hat{A}u \rangle - \langle \bar{\mu}, \hat{b} \rangle =$$

$$= \langle c, u \rangle + \langle A^T \mu, u \rangle - \langle \mu, b \rangle + \langle \hat{A}^T \bar{\mu}, u \rangle - \langle \bar{\mu}, \hat{b} \rangle =$$

$$= \left\langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

основные *двойственные*

$$u \in U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in R^n \,\middle|\, w \ge 0 \right\}, \quad \lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^s \,\middle|\, \mu \ge 0 \right\}.$$

Функция $\psi : \Lambda^0 \to R^1$, определяемая формулой $\psi(\lambda) = \inf\limits_{u \in U_0} L(u, \lambda)$,

здесь выписывается в явном виде. Действительно,

$$u \in U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in R^n \;\middle|\; w \geq 0 \right\},$$

$$\lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^s \;\middle|\; \mu \geq 0 \right\}$$

$$L(u, \lambda) = \left\langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \in U_0} L(u, \lambda) = \inf_{\substack{w \geq 0 \\ \bar{w} \in R^{s-m}}} \left\langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{cases} -\left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle, & \begin{cases} \left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j \geq 0, \ j \in \{1, \dots, k\}, \\ \left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j = 0, \ j \in \{k+1, \dots, n\}; \end{cases} \\ -\infty, & \textit{при остальных } \lambda \in \Lambda^0 \end{cases}$$

Двойственная задача: $\psi(\lambda) \to \sup,$

$$\lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \,\middle|\, \mu \geq 0 \right\}$$

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle, & \begin{cases} \left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, k\}, \\ \left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j = 0,\ j \in \{k+1, \ldots, n\}; \end{cases} \\ -\infty, & \textit{при остальных } \lambda \in \Lambda^0 \end{cases}$$

записывается в виде

Задача 3д.

$$-\left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle \to \sup$$

$$\left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, k\};$$

$$\left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}\right)^j = 0, \quad j \in \{k+1, \ldots, n\};$$

$$\lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \,\middle|\, \mu \geq 0 \right\}.$$

Данная задача эквивалентна следующей.

Задача 3д(а).

$$\left\langle \begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \right\rangle \to \inf,$$

$$\left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \overline{\mu}\right)^j \le 0, \quad j \in \{1, \ldots, k\};$$

$$\left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \overline{\mu}\right)^j = 0, \quad j \in \{k+1, \ldots, n\};$$

$$\lambda \in \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \overline{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \,\middle|\, \mu \ge 0 \right\}.$$

Эквивалентность **задачи 3д и задача 3д(а)** понимается в том смысле, что их решениями служат одни и те же точки $\lambda^* \in \Lambda.$ **Задачу 3д(а)** обычно называют двойственной к **задаче 3.** **Задача 3д(а).** является общей задачей линейного программирования. Матрица ограничений в ней имеет размер $n \times s.$

По аналогии с предыдущими пунктами доказывается, что **Задачи 3 и (Задача 3д(а))д** эквивалентны.

11.4. Правило построения двойственной задачи. Запишем **задачу 3** и **задачу 3д(а)** в координатной форме.

Задача 3.

$$I(u) = c_1 u^1 + \ldots + c_k u^k + c_{k+1} u^{k+1} + \ldots + c_n u^n \to \inf,$$

$$a_{11} u^1 + \ldots + a_{1k} u^k + a_{1k+1} u^{k+1} + \ldots + a_{1n} u^n \le b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} u^1 + \ldots + a_{mk} u^k + a_{mk+1} u^{k+1} + \ldots + a_{mn} u^n \le b_m,$$

$$a_{m+11} u^1 + \ldots + a_{m+1k} u^k + a_{m+1k+1} u^{k+1} + \ldots + a_{m+1n} u^n = b_{m+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{s1} u^1 + \ldots + a_{sk} u^k + a_{sk+1} u^{k+1} + \ldots + a_{sn} u^n = b_s,$$

$$u^1 \ge 0, \ldots, u^k \ge 0.$$

Задача 3д(а).

$$I_{Д}\left(\lambda\right)=b_1\lambda_1+\dots+b_m\lambda_m+b_{m+1}\lambda_{m+1}+\dots+b_s\lambda_s\to\inf,$$

$$-a_{11}\lambda_1-\dots-a_{m1}\lambda_m-a_{m+11}\lambda_{m+1}-\dots-a_{s1}\lambda_s\le c_1,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$-a_{1k}\lambda_1-\dots-a_{mk}\lambda_m-a_{m+1k}\lambda_{m+1}-\dots-a_{sk}\lambda_s\le c_k,$$

$$-a_{1k+1}\lambda_1-\dots-a_{mk+1}\lambda_m-a_{m+1k+1}\lambda_{m+1}-\dots-a_{sk+1}\lambda_s=c_{k+1},$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$-a_{1n}\lambda_1-\dots-a_{mn}\lambda_m-a_{m+1n}\lambda_{m+1}-\dots-a_{sn}\lambda_s=c_n,$$

$$\lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_m\ge 0.$$

Сформулируем правило, в соответствие с которым строится **задача 3д(а),** на основе **задачи 3.**

В двойственной **задаче 3д(а)** переменных $\lambda_j,\ j=1,\ldots,s$ столько же, сколько ограничений в прямой **задаче 3.** Матрица ограничений в двойственной задаче совпадает с транспонированной матрицей $\begin{pmatrix} A \\ \hat{A} \end{pmatrix}$ ограничений прямой задачи, умноженной на (-1).

Вектором правых частей ограничений двойственной задачи служит вектор коэффициентов целевой функции прямой задачи. В качестве вектора целевой функции двойственной задачи выступает вектор $\begin{pmatrix} b \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ правых частей ограничений прямой задачи.

Ограничения двойственной задачи, номера которых совпадают с номерами положительных переменных прямой задачи, записываются в форме неравенств, а остальные ограничения – в форме равенств. Наконец, переменные двойственной задачи, номера которых совпадают с номерами ограничений типа неравенств в прямой задаче, объявляются положительными, а на остальные переменные ограничения не налагаются.

Пример 1.

Прямая задача.

$$I\left(u^1,u^2,u^3,u^4,u^5\right)=-40u^1+7u^2-3u^3+6u^4-3u^5\to\inf,$$

$$4u^1+u^2+2u^3+u^4+3u^5\le 55,$$

$$-17u^1+16u^2-4u^3+2u^4+5u^5=46,$$

$$-33u^1+26u^2-7u^3+4u^4+8u^5=66,$$

$$u^1\ge 0,\,u^2\ge 0,\,u^3\ge 0.$$

Двойственная задача.

$$I_Д\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)=55\lambda_1+46\lambda_2+66\lambda_3\to\inf$$

$$-4\lambda_1+17\lambda_2+33\lambda_3\le -40,$$

$$-\lambda_1-16\lambda_2-26\lambda_3\le 7,$$

$$-2\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3\le -3,$$

$$-\lambda_1-2\lambda_2-4\lambda_3=6,$$

$$-3\lambda_1-5\lambda_2-8\lambda_3=-3,$$

$$\lambda_1\ge 0.$$