ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 11

3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ.

3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Определение выпуклой функции. Примеры.

3.2. Действия с выпуклыми функциями.

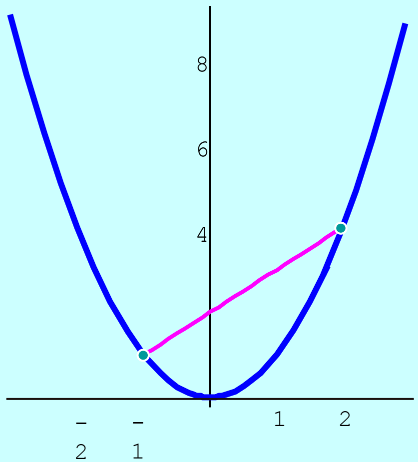
3.1. Определение выпуклой функции. Примеры.

Определение 1. ***Функция*** $I : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, называется выпуклой на этом множестве, если***

$$I\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big) \le \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v), \quad \forall u, v \in U, \alpha \in [0,1]. \quad (1)$$

В случае, когда при $u \ne v$ ***равенство в (1) возможно только для*** $\alpha = 0$ ***и*** $\alpha = 1$, ***функцию*** I ***называют строго выпуклой.***

Определение 2. ***Функцию*** I ***называют вогнутой (строго вогнутой) на выпуклом множестве*** U, ***если функция*** $-I$ ***выпукла (строго выпукла) на множестве*** U.



По определению полагается, что если множество U одноточечное или пустое, то функция I выпукла на этом множестве. Если не оговорено противное, то рассматриваемые функции всюду принимают конечные значения. Геометрический смысл данного определения состоит в том, что секущая, соединяющая любые две точки графика выпуклой функции, располагается не ниже графика этой функции.

Пример 1. Функция $I : R^n \to R^1$, определенная формулой $I(u) = \|u\|$, выпукла. Действительно, при всех $u, v \in R^n$, $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$I\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) = \left\|\alpha u + (1-\alpha)v\right\| \le \alpha\|u\| + (1-\alpha)\|v\| = \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v).$$

Пример 2. Функция $I : R^n \to R^1$, определенная формулой $I(u) = \langle c, u\rangle$, $c \in R^n$, выпукла. Действительно, при всех $u, v \in R^n$, $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$I\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) = \left\langle c, \alpha u + (1-\alpha)v\right\rangle = \alpha\langle c, u\rangle + (1-\alpha)\langle c, v\rangle =$$

$$= \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v).$$

Аналогично проверяется выпуклость функции $-I$. Таким образом, в данном примере функция I выпукла и вогнута одновременно.

Пример 3. Функция $I : R^n \to R^1$, определенная формулой $I(u) = \langle u, u\rangle$, строго выпукла. Действительно, при всех $u, v \in R^n$, $u \ne v$ справедливо неравенство

$$2\langle u, v\rangle < \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Отсюда для любого $\alpha \in [0,1]$ выводим

$$I\left(\alpha u+\left(1-\alpha\right)v\right)=\left\langle \alpha u+\left(1-\alpha\right)v,\alpha u+\left(1-\alpha\right)v\right\rangle =$$

$$\alpha^2\left\langle u,u\right\rangle + \overset{<\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle,\ u\neq v}{2\left\langle u,v\right\rangle}\cdot\alpha\left(1-\alpha\right)+\left(1-\alpha\right)^2\cdot\left\langle v,v\right\rangle <$$

$$<\alpha^2\left\langle u,u\right\rangle+\left[\left\langle u,u\right\rangle+\left\langle v,v\right\rangle\right]\alpha\left(1-\alpha\right)+\left(1-\alpha\right)^2\left\langle v,v\right\rangle =$$

$$=\alpha^2\left\langle u,u\right\rangle+\alpha\left\langle u,u\right\rangle-\alpha^2\left\langle u,u\right\rangle+\alpha\left\langle v,v\right\rangle-$$

$$-\alpha^2\left\langle v,v\right\rangle+\left\langle v,v\right\rangle-2\alpha\left\langle v,v\right\rangle+\alpha^2\left\langle v,v\right\rangle =$$

$$=\alpha\left\langle u,u\right\rangle+\alpha\left\langle v,v\right\rangle+\left\langle v,v\right\rangle-2\alpha\left\langle v,v\right\rangle =$$

$$=\alpha\left\langle u,u\right\rangle+(1-\alpha)\left\langle v,v\right\rangle=\alpha I\left(u\right)+\left(1-\alpha\right)I\left(v\right)\ ,\forall u,v\in R^n,\ u\neq v,$$

что и означает строгую выпуклость функции I.

Теорема 1. ***Пусть функция*** $I:U\to R^1$, ***где*** $U\subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла. Тогда для любых***

$$u_i\in U,\alpha_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1,\quad m=1,2,\ldots$$

имеет место неравенство (Иенсена)

$$I\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right) \le \sum_{i=1}^{m}\alpha_i I\left(u_i\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу m. При $m = 2$ справедливость неравенства (2) есть следствие определения выпуклости функции. Допустим, что неравенство Иенсена имеет место для всех $k \le m-1,\, m > 2.$ Примем для определенности, что $\alpha_m \ne 1.$ Тогда $\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i = 1-\alpha_m > 0$ и

$$I\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right) = I\left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i u_i + \alpha_m u_m\right) =$$

$$= I\left(\overbrace{\left(1-\alpha_m\right)}^{>0}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\overbrace{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_m}}^{\beta_i}u_i\right)+\alpha_m u_m\right) = I\left(\overbrace{\left(1-\alpha_m\right)\left(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i u_i\right)}^{u_*}+\alpha_m u_m\right) =$$

$$= I\left(\left(1-\alpha_m\right)u_* + \alpha_m u_m\right) \Rightarrow$$

$$I\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right) = I\left(\left(1-\alpha_m\right)u_* + \alpha_m u_m\right), \quad u_* = \sum_{i=1}^{m-1}\beta_i u_i, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m}.$$

Заметим, что $\beta_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, m-1$ и

$$\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i = \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i}^{1-\alpha_m}}{1-\alpha_m} = \frac{1-\alpha_m}{1-\alpha_m} = 1.$$

Тогда $u_* = \sum_{i=1}^{m-1}\beta_i u_i \in U$ и в силу выпуклости функции I имеет место неравенство

$$I\left(\left(1-\overset{\ge 0}{\alpha_m}\right)u_* + \overset{\ge 0}{\alpha_m}\, u_m\right) \le \left(1-\alpha_m\right) I\left(\overbrace{u_*}^{\left(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i u_i\right)}\right) + \alpha_m I\left(u_m\right) =$$

$$= \left(1-\alpha_m\right)\overbrace{I\left(\sum_{i=1}^{m-1}\beta_i u_i\right)}^{\substack{\text{предположение индукции}\\ \le \sum_{i=1}^{m-1}\beta_i I(u_i)}} + \alpha_m I\left(u_m\right) \le$$

$$\leq (1-\alpha_m)\left(\sum_{i=1}^{m-1} \overset{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_m}}{\beta_i}\; I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) =$$

$$= (1-\alpha_m)\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_m} I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i I(u_i) \right) + \alpha_m I(u_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I(u_i).$$

Возвращаясь на начало цепочки, получим

$$I\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I(u_i).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет свести исследование выпуклости функции многих переменных к исследованию выпуклости функций одной переменной.

Теорема 2. ***Функция*** $I : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла тогда и только тогда, когда для любых*** $v, w \in U$ ***функция*** $\varphi : [0,1] \to R^1$, ***определенная формулой,*** $\varphi(\varepsilon) = I\big(\varepsilon v + (1-\varepsilon) w\big),\ \varepsilon \in [0,1]$ ***выпукла.***

Доказательство. Необходимость. Пусть функция I выпукла на выпуклом множестве U и $v, w \in U$. Для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ \alpha \in [0,1]$ полагаем $\varepsilon_\alpha = \alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2$. Вычисляем

$$\varphi(\varepsilon_\alpha) = I\left(\overbrace{\varepsilon_\alpha}^{\alpha\varepsilon_1+(1-\alpha)\varepsilon_2} v + \overbrace{(1-\varepsilon_\alpha)}^{(1-(\alpha\varepsilon_1+(1-\alpha)\varepsilon_2))} w \right) =$$

$$= I\Big(\big(\alpha\varepsilon_1 + (1-\alpha)\varepsilon_2\big)v + \big(1 - \alpha\varepsilon_1 - (1-\alpha)\varepsilon_2\big)w \pm \alpha w\Big) =$$

$$= I\big(\alpha\varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v - \alpha\varepsilon_2 v + w - \alpha\varepsilon_1 w - \varepsilon_2 w + \alpha\varepsilon_2 w + \alpha w - \alpha w\big) =$$

$$= I\big(\alpha\varepsilon_1 v - \alpha\varepsilon_1 w + \alpha w + \varepsilon_2 v(1-\alpha) + (1-\alpha)w + \varepsilon_2 w(\alpha - 1)\big) =$$

$$= I\big(\alpha(\varepsilon_1 v + w - \varepsilon_1 w) + (1-\alpha)(\varepsilon_2 v - \varepsilon_2 w + w)\big) =$$

$$=I\left(\alpha\left(\varepsilon_1 v+w-\varepsilon_1 w\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\varepsilon_2 v-\varepsilon_2 w+w\right)\right)=$$

$$=I\left(\alpha\left(\overbrace{\varepsilon_1 v+\left(1-\varepsilon_1\right)w}^{\in U}\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\overbrace{\varepsilon_2 v+\left(1-\varepsilon_2\right)w}^{\in U}\right)\right)\overset{I\ \text{выпуклая}}{\leq}$$

$$\overset{I\ \text{выпуклая}}{\leq}\ \alpha\,\overbrace{I\left(\varepsilon_1 v+\left(1-\varepsilon_1\right)w\right)}^{\varphi(\varepsilon_1)}+\left(1-\alpha\right)\overbrace{I\left(\varepsilon_2 v+\left(1-\varepsilon_2\right)w\right)}^{\varphi(\varepsilon_2)}=$$

$$=\alpha\varphi(\varepsilon_1)+\left(1-\alpha\right)\varphi(\varepsilon_2)\Rightarrow$$

$$\varphi\left(\alpha\varepsilon_1+(1-\alpha)\varepsilon_2\right)\leq\ \alpha\varphi(\varepsilon_1)+\left(1-\alpha\right)\varphi(\varepsilon_2).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любой пары точек $u_1,u_2\in U$ функция φ выпукла. Тогда для всех $\alpha\in[0,1]$ имеем

$$\overbrace{I\left(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\right)}^{\varphi(\alpha)}=\ \varphi\left(\overbrace{\alpha}^{\alpha\cdot 1+(1-\alpha)\cdot 0}\right)=\varphi(\alpha\cdot 1+\left(1-\alpha\right)\cdot 0)\ \overset{\text{неравенство Иенсена}}{\leq}$$

$$\overset{\text{неравенство Иенсена}}{\leq}\ \alpha\,\overbrace{\varphi(1)}^{I(u_1)}+\left(1-\alpha\right)\overbrace{\varphi(0)}^{I(u_2)}=\ \alpha I(u_1)+\left(1-\alpha\right)I(u_2).$$

Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать выпуклость функции

$$I(u)=\left(x+y\right)^2 \quad u=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть

$$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad v=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon\in\left[0,1\right]\Rightarrow$$

Полагаем

$$\varepsilon u+\left(1-\varepsilon\right)v=\varepsilon\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\left(1-\varepsilon\right)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon x_1+\left(1-\varepsilon\right)x_2 \\ \varepsilon y_1+\left(1-\varepsilon\right)y_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\varphi\left(\varepsilon\right)=I(\varepsilon u+\left(1-\varepsilon\right)v)=\left(\varepsilon x_1+\left(1-\varepsilon\right)x_2+\varepsilon y_1+\left(1-\varepsilon\right)y_2\right)^2=$$

$$=\left[\varepsilon x_1+x_2-\varepsilon x_2+\varepsilon y_1+y_2-\varepsilon y_2\right]^2=$$

$$=\left[\left(x_1-x_2+y_1-y_2\right)\varepsilon+x_2+y_2\right]^2=$$

$$=\left[\overbrace{(x_1-x_2+y_1-y_2)}^{a}\varepsilon+\overbrace{x_2+y_2}^{b}\right]^2 = \overbrace{a^2}^{\ge 0}\cdot\varepsilon^2+2ab\cdot\varepsilon+b^2=\varphi(\varepsilon).$$

Функция $\varphi:[0,1]\to R^1$ представляет собой параболу ветвями вверх и поэтому она выпукла. По **теореме 2** будет выпуклой и исходная функция

$$I:R^2\to R^1.$$

3.2. Действия с выпуклыми функциями. Рассмотрим некоторые операции над выпуклыми функциями, сохраняющие их выпуклость.

Теорема 3. ***Пусть функции*** $I_i : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, выпуклы и*** $\lambda_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, m$. ***Тогда функция*** $I : U \to R^1$, ***определенная формулой***

$$I(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_i(u),\, u \in U,$$

выпукла.

Доказательство. Для любых $u, v \in U,\, \alpha \in [0,1]$ имеем

$$I\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\lambda_i}^{\geq 0} \overbrace{I_i(\alpha u + (1-\alpha)\, v)}^{\leq \alpha I_i(u) + (1-\alpha) I_i(v)} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big[\alpha I_i(u) + (1-\alpha) I_i(v)\big] =$$

$$= \alpha \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_i(u)\right)}^{=I(u)} + (1-\alpha) \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_i(v)\right)}^{I(v)} = \alpha I(u) + (1-\alpha)\, I(v).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. ***Пусть функции*** $I_i : U \to R^1,\ i = 1, \ldots, m,$ ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, выпуклы. Тогда функция*** $I : U \to R^1$, ***определенная формулой***

$$I(u) = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \{I_i(u)\},\ u \in U,$$

выпукла.

Доказательство. Для любых $u, v \in U, \alpha \in [0,1]$ имеем

$$I\left(\alpha u + (1-\alpha)v\right) = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \left\{ \overbrace{I_i(\alpha u + (1-\alpha)v)}^{\le \alpha I_i(u) + (1-\alpha) I_i(v)} \right\} \le$$

$$\le \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \{\alpha I_i(u) + (1-\alpha) I_i(v)\} \le$$

$$\le \alpha \overbrace{\max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \{I_i(u)\}}^{= I(u)} + (1-\alpha) \overbrace{\max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \{I_i(v)\}}^{= I(v)} = \alpha I(u) + (1-\alpha) I(v).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности следует, что функция $g^{+}:U\to R^{1}$, определенная на выпуклом множестве $U\subset R^{n}$ равенством

$$g^{+}(u)=\max\{g(u),0\},\ u\in U,$$

где $g:U\to R^{1}$, выпукла на множестве U, если на этом же множестве выпукла функция g.

Теорема 5. ***Пусть функция*** $\varphi:[a,b]\to R^{1}$ ***выпуклая и неубывающая, а функция*** $g:U\to[a,b]$, ***где множество*** $U\subset R^{n}$ ***выпуклое, выпуклая на этом множестве. Тогда функция*** $I:U\to R^{1}$, ***определенная равенством*** $I(u)=\varphi\left(g(u)\right),\ u\in U$, ***выпукла на множестве*** U.

Доказательство. Для любых $u,v\in U,\ \alpha\in[0,1]$ имеем

$$I\left(\alpha u+(1-\alpha)v\right)=\varphi\Big(\underbrace{g\left(\alpha u+(1-\alpha)v\right)}_{\substack{\text{выпуклость } g\\ \le\alpha g(u)+(1-\alpha)g(v)}}\Big)\overset{\text{монотонность }\varphi}{\le}\varphi\left(\alpha g(u)+(1-\alpha)g(v)\right)\le$$

$$\overset{\text{выпуклость }\varphi}{\le}\alpha\underbrace{\varphi\left(g(u)\right)}_{=I(u)}+(1-\alpha)\underbrace{\varphi\left(g(v)\right)}_{=I(v)}=\alpha I(u)+(1-\alpha)I(v).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Пусть функция*** $g: U \to [a,b]$ ***выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве*** $U \subset R^n$. ***Тогда функция*** $I: U \to R^1$, ***определенная равенством***

$$I(u) = g^p(u), u \in U, \quad p \geq 1$$

выпукла на множестве U.

Доказательство. Функция $\varphi(g) = g^p$, $g \geq 0$, $p \geq 1$ – является выпуклой и монотонной.

Следствие 2. ***Пусть функция*** $g: U \to [a,b]$ ***выпукла на выпуклом множестве*** $U \subset R^n$. ***Тогда функция*** $I: U \to R^1$, ***определенная равенством***

$$I(u) = \left(\max\{0, g(u)\}\right)^p = \left(g^+(u)\right)^p, u \in U, \ p \geq 1$$

выпукла на множестве U.

Доказательство. Функция $g^+(u) = \max\{0, g(u)\}$ является выпуклой и положительной на множестве U, если функция g – выпуклая. Справедливость доказываемого утверждения следует теперь из предыдущего следствия.