

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 12

3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



3. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

3.3. Непрерывность выпуклой функции.



**3.4. Дифференцируемость выпуклой функции по всем возможным
направлениям.**

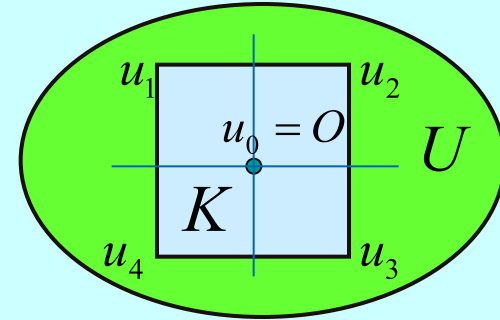


3.3. Непрерывность выпуклой функции. Неравенство (1.1), определяющее

$$I(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha I(u) + (1-\alpha)I(v) \quad (1.1)$$

выпуклую функцию, оказывается столь сильным, что обеспечивает ей непрерывность в каждой внутренней точке области определения.

Теорема 6. Пусть функция $I: U \rightarrow R^1$, где $U \subset R^n$ выпуклое множество, выпукла. Тогда она непрерывна в любой точке $u_0 \in \text{int } U$.



Доказательство. Сначала предположим, что

$u_0 = 0 \in \text{int } U$, $I(u_0) = 0$. Существует n -мерный куб K с вершинами $u_1, \dots, u_m$, $m = 2^n$, с центром в нуле и содержащийся в множестве U . Обозначим $I_K = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} I(u_i)$. Любая точка $v \in K$ может быть представлена в виде

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда в силу выпуклости функции I находим

$$I(v) = I\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) \stackrel{\text{выпуклость } I}{\leq} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overset{\leq I_K}{I(u_i)} \leq I_K \sum_{i=1}^m \alpha_i \overset{=1}{=} I_K. \quad (1)$$

Пусть $u \in \varepsilon K \subset U$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Тогда $\pm \frac{u}{\varepsilon} \in K$. Из неравенства (1)

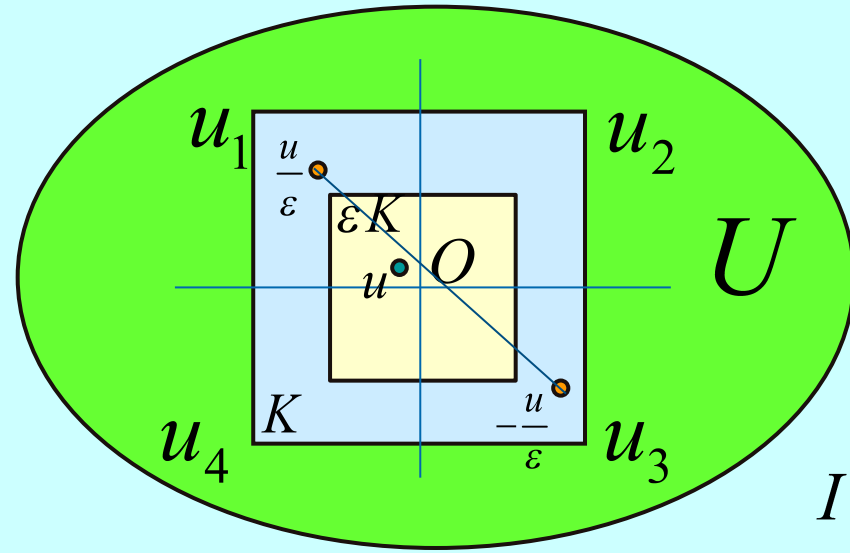
$I(v) \leq I_k, v \in K$ (1) следует

$$I\left(\begin{array}{c} \varepsilon \cdot \frac{u}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot 0 \\ u \end{array}\right) = I\left(\begin{array}{c} \in K \\ \varepsilon \cdot \frac{u}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot 0 \end{array}\right) \stackrel{\text{выпуклая}}{\leq}$$

$$\stackrel{\text{выпуклая}}{\leq} \varepsilon I\left(\begin{array}{c} \frac{u}{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{array}\right) + (1-\varepsilon) I(0) \stackrel{=0}{\leq} \varepsilon I_K. \quad (2)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} 0 &= I\left(\begin{array}{c} \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot u + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(-\frac{u}{\varepsilon}\right) \\ 0 \end{array}\right) = I\left(\begin{array}{c} \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \in K + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(-\frac{u}{\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot u + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(-\frac{u}{\varepsilon}\right) \end{array}\right) \stackrel{\text{выпуклость } I}{\leq} \\ &\stackrel{\text{выпуклость } I}{\leq} \frac{1}{1+\varepsilon} I(u) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot I_k \Rightarrow 0 \leq I(u) + \varepsilon \cdot I_k \Rightarrow \\ &I(u) \geq -\varepsilon I_k. \quad (3) \end{aligned}$$



Из (2) $I(u) \leq \varepsilon I_k$ (2) и (3) $I(u) \geq -\varepsilon I_k$ (3) следует, что $|I(u)| \leq \varepsilon I_k \Rightarrow$

$$\left| I(u) - \overset{\text{0}}{I(0)} \right| = |I(u)| \leq \varepsilon I_k,$$

что и означает непрерывность функции I в нуле.

Общий случай сводится к уже рассмотренному путем введения функции

$G: (U - \{u_0\}) \rightarrow R^1$, определенной формулой

область определения G

$$G(u) = I(u + u_0) - I(u_0), \quad u \in U - \{u_0\}.$$

Эта функция выпукла и для нее выполнено

$$0 \in \text{int}(U - \{u_0\}), \quad G(0) = I(u + u_0) - I(u_0) = 0.$$

Тогда по доказанному она непрерывна в нуле. Непрерывной в нуле будет и функция

непрерывна константа

$$I(u + u_0) = G(u) + I(u_0), \quad u \in U - \{u_0\},$$

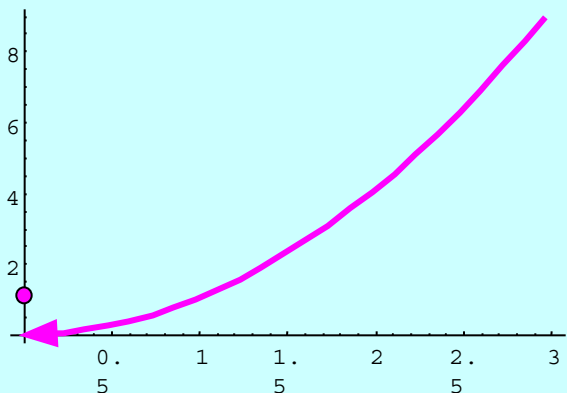
как сумма непрерывной функции и постоянной. Отсюда следует непрерывность функции

$$I(u), \quad u \in U \quad \text{в точке} \quad u_0. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Для граничных точек доказанная теорема неверна.

Пример 4. Функция $I : [0, +\infty) \rightarrow R^1$, определенная равенством

$$I(u) = \begin{cases} u^2, & u > 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}, \quad u \in [0, +\infty),$$



выпукла на $[0, +\infty)$, но терпит разрыв в нуле.

Покажем, что эта функция выпукла. Достаточно

проверить определение выпуклости только в точке $u = 0$. Пусть $u \in (0, +\infty)$ и $\alpha \in [0, 1)$.

(В случае $\alpha = 1$: $I\left(1 \cdot 0 + (1-1)u\right) = I(0) = 1 \cdot I(0) + (1-1)I(u)$ неравенство Иесена

выполнено в форме равенства). Вычисляем

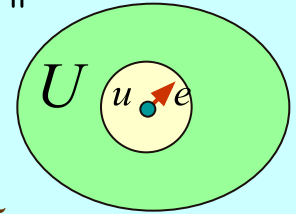
$$\begin{aligned} I(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha)u) &= I\left(\overset{\boxed{\times} 0}{(1-\alpha)u}\right) = \overset{\boxed{\times} \leq (1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} u^2 \overset{+\alpha \geq 0}{\leq} \alpha \cdot \overset{I(0)}{1} + (1-\alpha) \overset{I(u)}{u^2} = \\ &= \alpha I(0) + (1-\alpha)I(u) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha)u) \leq \alpha I(0) + (1-\alpha)I(u).$$



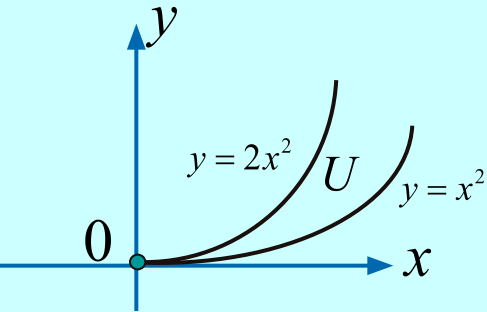
3.4. Дифференцируемость выпуклой функции по всем возможным направлениям.

Определение 3. Пусть $u \in U \subset R^n$. Направление $e \in R^n, \|e\| = 1$ называется возможным в точке u , если существует число $t_0 > 0$ такое, что $u + te \in U, \forall t \in [0, t_0]$.



Пример 5. Пусть $u \in \text{int } U$. Тогда любое направление $e \neq 0$ будет возможным.

Пример 6. Пусть $U = \{u = (x, y) \in R^2 \mid x \geq 0, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$.



Для точки $u = (0, 0)$ нет ни одного возможного направления.

Действительно, пусть $e = (e_1, e_2), \|e\| = 1$ и $t > 0$. Тогда, если это направление возможное, для точки $u = (0, 0) \in U$ должно

выполняться включение $0 + te = (te_1, te_2) \in U$ для достаточно малых $t \geq 0$.

Данное включение означает, что $t^2 (e_1)^2 \leq te_2 \leq 2t^2 (e_1)^2 \Rightarrow$

$$t(e_1)^2 \leq e_2 \leq 2t(e_1)^2. \quad (1)$$

Левое неравенство в (1) невозможно, если $e_2 \leq 0$. В случае, когда $e_2 > 0$ для малых $t > 0$ невозможно правое неравенство в (1). Полученное противоречие доказывает отсутствие возможных направлений для точки $u = (0, 0) \in U$.

Пример 7. Пусть множество $U \subset R^n$ выпукло и содержит не менее двух точек.

Тогда для любой точки $u \in U$ имеется хотя бы одно возможное направление.

Действительно, пусть $v \in U, v \neq u$. Положим $e = v - u$. Для всех $t \in [0,1]$ имеем $u + t e = u + t(v - u) = tv + (1-t)u \in U$.

Полученное включение означает, что направление $e = v - u$ — возможное.

Определение 4. Пусть $I : U \rightarrow R^1, U \subset R^n$. Производной функции I по возможному направлению $e, \|e\| = 1$, будем называть величину

$$\frac{dI}{de}(u) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{I(u + te) - I(u)}{t},$$

если этот предел существует.

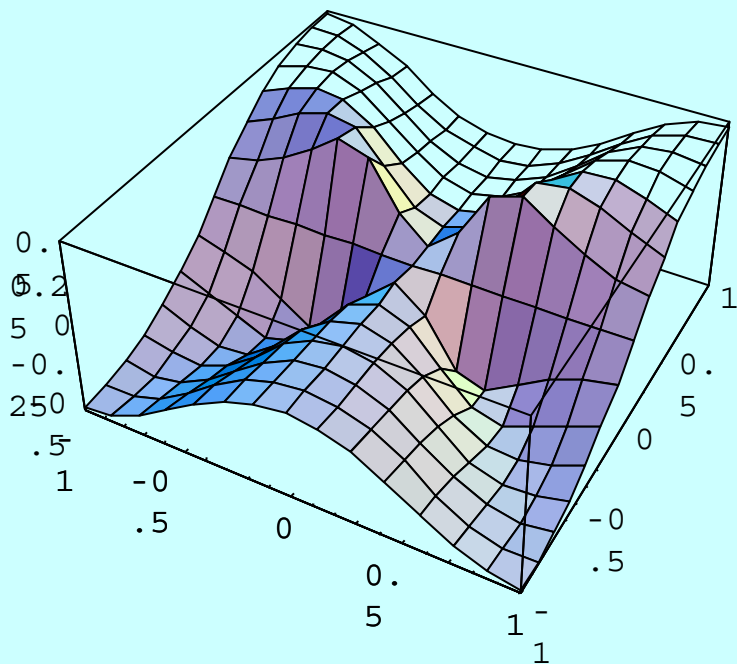
Заметим, что если функция I определена в некоторой окрестности точки u и дифференцируема в ней, то она имеет производные по всем возможным направлениям причем

$$\frac{dI}{de}(u) = \frac{\partial}{\partial t} I(u + te) \Big|_{t=0} = \left\langle I'(u + te) \Big|_{t=0}, \frac{\partial}{\partial t}(te) \right\rangle = \left\langle \overset{\text{grad } I(u)}{I'(u)}, e \right\rangle.$$

Однако, обратное неверно. Более того, нельзя даже гарантировать непрерывность функции в точке, в которой она имеет производные по всем направлениям.

Пример 8. Пусть

$$I(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$



Покажем, что эта функция дифференцируема вдоль любого направления $e \in \mathbb{R}^2$, $\|e\| = 1$ в точке 0 .

Представим произвольное направление в виде

$$e = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad (\|e\| = 1).$$

и установим существование предела $\lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{I(0 + te) - I(0)}{t} \right)$ для любого направления

$e = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. В силу $I(0) = 0$ имеем

$$\frac{I\left(\begin{matrix} 0+t \\ \begin{matrix} (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ e \end{matrix} \end{matrix}\right) - I(0)}{t} = \frac{1}{t} I\left(\begin{matrix} \begin{matrix} x \\ t \cos \alpha \end{matrix} \\ \begin{matrix} y \\ t \sin \alpha \end{matrix} \end{matrix}\right) = I(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot \frac{(t \cos \alpha)^2 t \sin \alpha}{(t \cos \alpha)^4 + (t \sin \alpha)^2}, & \sin \alpha \neq 0, \\ 0, & \sin \alpha = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}, & \sin \alpha \neq 0, \\ 0, & \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда выводим

$$\frac{dI}{de}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}, & \sin \alpha \neq 0, \\ 0, & \sin \alpha = 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, & \sin \alpha \neq 0, \\ 0, & \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Таким образом, указанный предел существует. Однако, функция I разрывная в точке $(0, 0)$. В самом деле, устремим точку (x, y) к нулю по параболе $y = x^2$.

Тогда

$$I\left(x, y\right) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} = \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = I(0, 0).$$

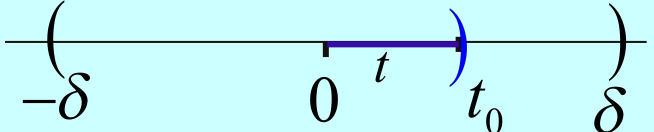
Теорема 7. Пусть функция $I : U \rightarrow R^1$, где $U \subset R^n$ выпуклое множество, выпукла. Тогда в любой точке $u \in \text{int } U$ функция I имеет производные по всем направлениям $e \in R^n$.

Доказательство. Требуется доказать существование конечного предела

$$\frac{dI}{de}(u) = \lim_{t \rightarrow +0} h(t), \quad h(t) = \frac{I(u + te) - I(u)}{t}.$$

Из включения $u \in \text{int } U$ следует существование числа $\delta > 0$ такого, что

$$u + U \in t, \quad ||| < \delta.$$

Пусть $t_0 \in (0, \delta)$.  Для $t \in (0, t_0]$ полагаем

$$\beta = \frac{t_0 - t}{t_0} \in (0, 1] \Rightarrow 1 - \beta = 1 - \frac{t_0 - t}{t_0} = \frac{t}{t_0}$$

Имеет место включение $\beta u + (1 - \beta)(u + t_0 e) \in U$. С другой стороны

$$\frac{t_0-t}{t_0} \beta u + \frac{t}{t_0} (1-\beta)(u+t_0 e) = \frac{t_0-t}{t_0} u + \frac{t}{t_0} (u+t_0 e) = u - \frac{t}{t_0} u + \frac{t}{t_0} u + te = u + te \Rightarrow$$

Тогда

$$u + te \in U, \quad t \in (0, t_0].$$

$$I \left(\begin{array}{c} \beta u + (1-\beta)(u+t_0 e) \\ u + te \end{array} \right) = I(\beta u + (1-\beta)(u+t_0 e)) \stackrel{\text{выпуклость } I}{\leq} \beta I(u) + (1-\beta) I(u+t_0 e) \Rightarrow$$

$$\leq \beta I(u) + (1-\beta) I(u+t_0 e)$$

$$h(t) = \frac{I(u+te) - I(u)}{t} \leq \frac{\beta I(u) + (1-\beta) I(u+t_0 e) - I(u)}{t} =$$

$$= \frac{(\beta-1)I(u) + (1-\beta)I(u+t_0 e)}{t} = \frac{(1-\beta)[I(u+t_0 e) - I(u)]}{t} =$$

$$= \frac{t \cdot [I(u+t_0 e) - I(u)]}{t_0 \cdot t} = \frac{I(u+t_0 e) - I(u)}{t_0} = h(t_0) \Rightarrow$$

$$t \leq t_0 \Rightarrow h(t) \leq h(t_0).$$

Таким образом, функция $h(t)$ монотонно убывает при $t \rightarrow +0$. Полагаем

$$\gamma = \frac{t_0}{t+t_0} \in (0,1] \Rightarrow 1-\gamma = \frac{t}{t+t_0}.$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \gamma (u+te) + (1-\gamma)(u-t_0e) &= \frac{t_0}{t+t_0}(u+te) + \frac{t}{t+t_0}(u-t_0e) = \\ &= \frac{t_0u + t_0 \cdot te + tu - t \cdot t_0e}{t+t_0} = \frac{t_0u + tu}{t+t_0} = u. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I\left(\gamma(u+te) + (1-\gamma)(u-t_0e)\right) &= I(u) \quad \text{выпуклость } I \\ &\leq \gamma I(u+te) + (1-\gamma)I(u-t_0e) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I(u) \leq \gamma I(u+te) + (1-\gamma)I(u-t_0e) \Rightarrow \gamma \cdot I(u+te) \geq I(u) - (1-\gamma)I(u-t_0e) \Rightarrow$$

$$I(u+te) \geq \frac{I(u) - (1-\gamma)I(u-t_0e)}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 I(u+te) &\geq \frac{I(u) - (1-\gamma)I(u-t_0e)}{\frac{t}{t+t_0}} = \frac{(t+t_0)I(u) - tI(u-t_0e)}{t_0} = \\
 &= \frac{tI(u) + t_0I(u) - tI(u-t_0e)}{t_0} = I(u) + \frac{t}{t_0}[I(u) - I(u-t_0e)] \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$I(u+te) \geq I(u) + \frac{t}{t_0}[I(u) - I(u-t_0e)] \Rightarrow$$

$$\frac{I(u+te) - I(u)}{t} \geq \frac{I(u) - I(u-t_0e)}{t_0} \Rightarrow h(t) \geq \frac{I(u) - I(u-t_0e)}{t_0}, \quad t \in (0, t_0],$$

т.е. функция $h(t)$ ограничена снизу при $t \rightarrow +0$. Существование конечного предела следует теперь из монотонного убывания функции $h(t)$. Теорема доказана.

Упражнение 1. Найти производную по направлению от функции $I(u) = \|u\|$.

Решение.

Функция нормы выпукла и конечна. Следовательно, ее производная по любому направлению существует. Для всех точек кроме $u = 0$ эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{dI}{de}(u) = \left\langle \frac{\|u\|}{u}, e \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{\langle u, u \rangle}}{u}, e \right\rangle = \left\langle \frac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}}, e \right\rangle = \frac{\langle u, e \rangle}{\|u\|}.$$

В точке $u = 0$ имеем

$$\frac{dI}{de}(u) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{I(u + te) - I(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|te\|}{t} = \|e\| = 1.$$



