ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 14

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

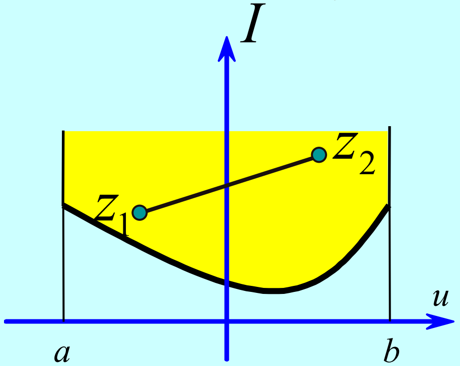
4.1. Надграфик выпуклой функции.

4.2. Множество Лебега выпуклой функции.

4.3. Опорная функция подмножества пространства R^n.

4.4. Опорные функции выпуклых оболочек подмножеств пространства R^n.

4.1. Надграфик выпуклой функции. Между выпуклыми функциями и выпуклыми множествами существует определенная связь.



Определение 1. ***Надграфиком (эпиграфом) функции*** I, ***определенной на множестве*** $U \subset R^n$, ***называется множество***

$$epi\, I = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix} \in R^{n+1} \,\middle|\, u \in U, \gamma \geq I(u) \right\}.$$

На рисунке закрашенное множество является надграфиком функции $I : [a,b] \to R^1$.

Теорема 1. ***Для того чтобы функция*** I, ***определенная на выпуклом множестве*** $U \subset R^n$, ***была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы ее надграфик был выпуклым множеством.***

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $I -$ выпуклая. Для любых двух точек $z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, z_1, z_2 \in epi\, I$ составим их выпуклую комбинацию

$$z_\alpha = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \\ \alpha \gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ \gamma_\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1].$$

Из выпуклости множества U следует, что $u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in U,$

а из выпуклости функции I вытекает неравенство

$$I(u_\alpha) = I(\alpha u_1 + (1-\alpha)\, u_2) \le \alpha \overset{\le \gamma_1}{I(u_1)} + (1-\alpha)\, \overset{\le \gamma_2}{I(u_2)} \le \alpha \gamma_1 + (1-\alpha)\, \gamma_2 = \gamma_\alpha$$

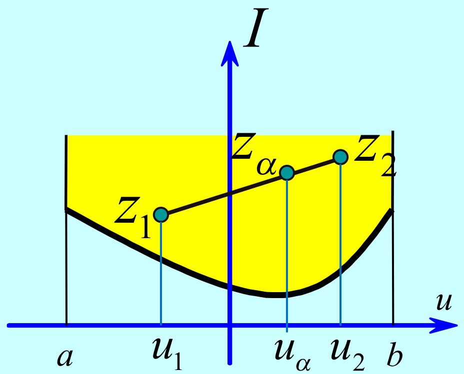
которое влечет за собой включение $z_\alpha = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ \gamma_\alpha \end{pmatrix} \in epi\, I. = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix} \in R^{n+1} \,\middle|\, u \in U, \gamma \ge I(u) \right\}$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество $epi\, I$ выпукло в R^{n+1} и $u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0,1].$

Тогда

$$z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ I(u_1) \end{pmatrix} \in epi\, I, \; z_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ I(u_2) \end{pmatrix} \in epi\, I \Rightarrow$$



$$\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \\ \alpha I(u_1) + (1-\alpha) I(u_2) \end{pmatrix} \in epi\, I,$$

Отсюда в силу определения множества $epi\, I$ следует

$$I(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) \le \alpha I(u_1) + (1-\alpha)\, I(u_2)$$

что и означает выпуклость функции $I.$ Теорема доказана.

Упражнение. Построить множество точек на плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x^2 + 4x - 3 \ge 0, \\ -x + y^2 - y - 2 \le 0, \end{cases}$$

и доказать, что это множество выпуклое.

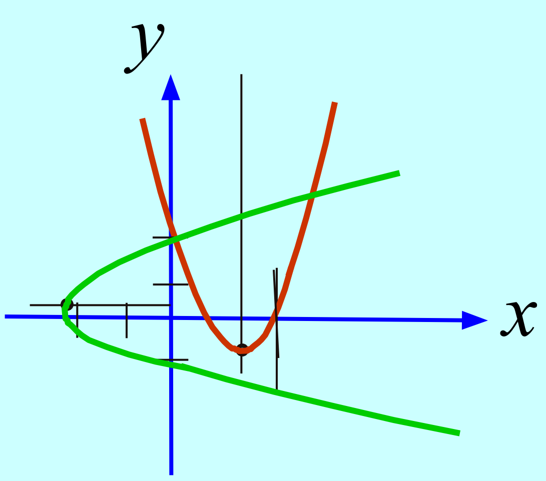
Решение.

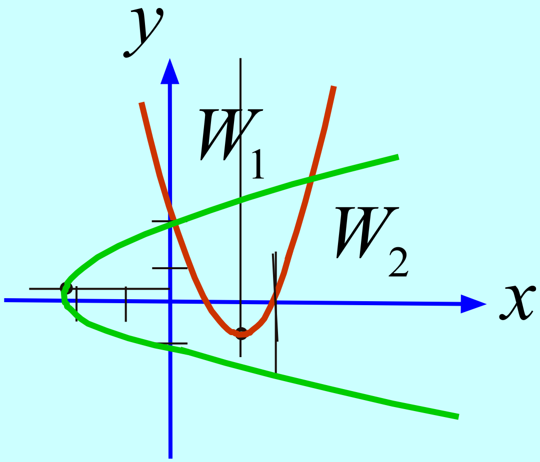
$$\begin{cases} y - x^2 + 4x - 3 \ge 0, \\ -x + y^2 - y - 2 \le 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge x^2 - 4x + 3, \\ x \ge y^2 - y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x - 4 = 0, \\ \dfrac{dx}{dy} = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_* = 2, \\ y_* = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x_*) = 4 - 8 + 3 = -1, \\ x(y_*) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4} \end{cases};$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3,$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 2$$





Искомое множество строится как пересечение двух множеств

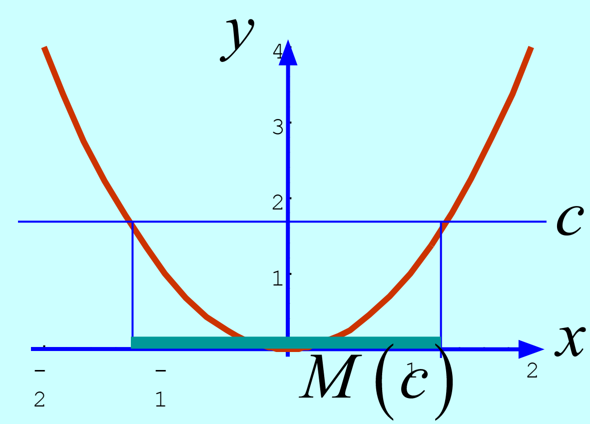
$$W_1 = \left\{ (x, y) \middle| \, y \geq -x^2 + 4x - 3 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ (x, y) \middle| \, x \geq y^2 - y - 2 \right\}.$$

Эти множество будем трактовать как надграфики соответствующих парабол (ветвями вверх). Очевидно, что они выпуклы. Тогда выпукло и их пересечение

4.2. Множество Лебега выпуклой функции.

Определение 2. ***Пусть задана функция*** $I : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$, ***и число*** $c \in R^1$. ***Множество*** $M(c) = \{ \ u \in U \ \mid \ I(u) \leq c \}$ ***будем называть множеством Лебега функции*** I.



Теорема 2. ***Пусть функция*** $I : U \to R^1$, ***где*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество, выпукла. Тогда ее множество Лебега выпукло при всех*** $c \in R^1$.

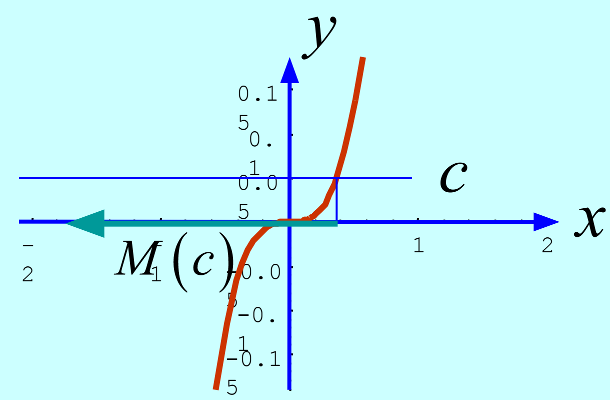
Доказательство. Для любых $u_1, u_2 \in M(c)$ и $\alpha \in [0,1]$ из выпуклости функции I и определения множества Лебега выводим

$$I\left(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\right) \le \alpha \overset{\le c}{I(u_1)} + (1-\alpha)\overset{\le c}{I(u_2)} \le \alpha c + (1-\alpha)c = c.$$

Таким образом, $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in M(c)$. Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение неверно: из выпуклости множеств Лебега при всех $c \in R^1$ вообще говоря, не следует выпуклость функции I. Например, функция $I(u) = u^3, u \in R^1$ не является выпуклой, а множества Лебега для нее

$$M(c) = \left(-\infty, \sqrt[3]{c}\,\right]$$ выпуклы при всех $c \in R^1$.



Заметим, что эти множества неограниченны.

Выведем условия, когда множества Лебега ограничены при всех $c \in R^1$. Для этого уточним некоторые свойства неограниченных множеств.

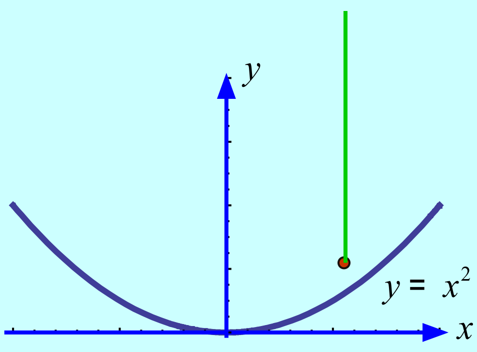
Определение 3. ***Пусть*** $M \subset R^n$ ***неограниченное множество. Направление*** $e \in R^n, e \neq 0$ ***будем называть рецессивным направлением этого множества, если*** $u + te \in M$ ***при всех*** $u \in M$ ***и*** $t \geq 0$.

Упражнение 1. Найти рецессивное направление для множества

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \middle| y \geq x^2, x \in (-\infty, +\infty) \right\} \subset R^2.$$

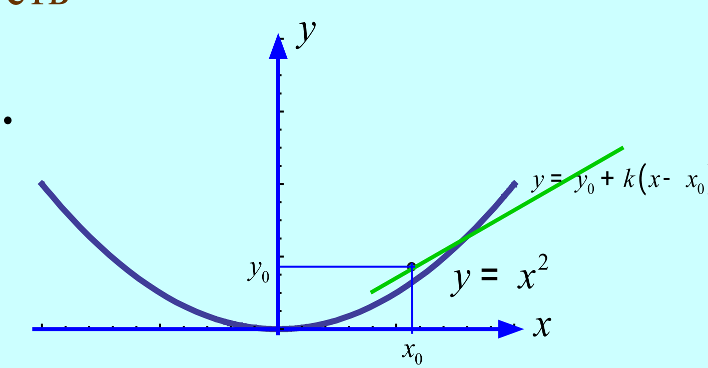
Показать, что это направление единственно.

Решение.



Рецессивным направлением является направление вдоль оси Oy. Покажем, что направление с угловым коэффициентом $k \neq \pm\infty$ не может быть рецессивным. Пусть

$$(x_0, y_0) \in M \Rightarrow y_0 \geq x_0^2.$$



Достаточно установить, что квадратное уравнение

$$x^2 = y_0 + k(x - x_0)$$

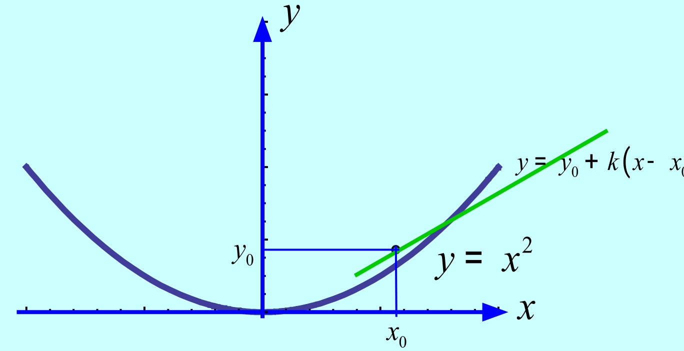
имеет действительные корни. Действительно,

$$x^2 = y_0 + k(x - x_0) \Rightarrow x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = k^2 - 4(kx_0 - y_0) = k^2 - 4kx_0 + 4\overset{\geq x_0^2}{y_0} \geq k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 =$$

$$= (k - 2x_0)^2 \geq 0 \Rightarrow D \geq 0.$$



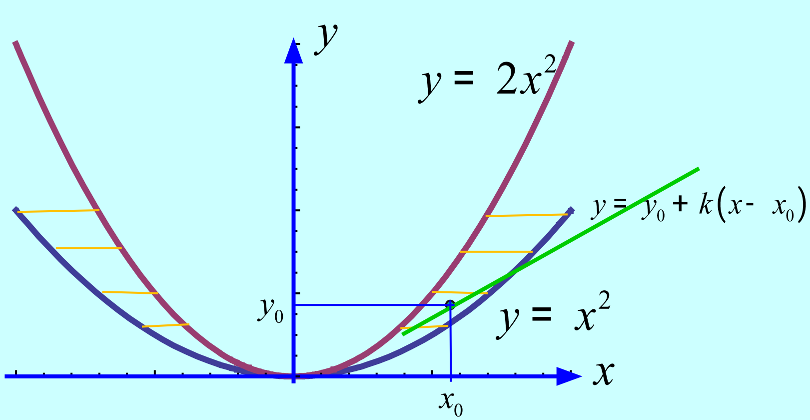
Установлено, что для любой точки $(x_0, y_0) \in M$

направление с любым угловым коэффициентом $k \neq \pm\infty$

пересекает границы множества M. В случае $D = 0 \Rightarrow y_0 = x_0^2, k = 2x_0.$

Секущая превращается в касательную и не является рецессивным направлением.

Покажем, что не всякое неограниченное множество имеет рецессивные направления.



Действительно, множество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \,\middle|\, x^2 \leq y \leq 2x^2 \right\} \subset R^n.$$

является таковым.

Лемма 1. ***Замкнутое неограниченное выпуклое множество имеет хотя бы одно рецессивное направление.***

Доказательство. Из неограниченности множества M следует существование последовательности $\{u_k\}$, $u_k \in M, k = 1, 2, \ldots$ такой, что $\|u_k\| \to \infty$.

Пусть $\bar{u} \in M$. Полагаем

$$e_k = \frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|} \Rightarrow \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Не теряя общности, будем считать, что $e_k \to e$, $\|e\| = 1$. Для произвольного $t \geq 0$ в силу $\|u_k\| \to \infty$ для достаточно больших номеров k справедливо неравенство $0 \leq \alpha = \dfrac{t}{\|u_k - \bar{u}\|} \leq 1$. Тогда из выпуклости множества M для достаточно больших номеров k имеем

$$\bar{u} + t \overbrace{e_k}^{\frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|}} = \bar{u} + t \frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|} = \bar{u} + \overbrace{\frac{t}{\|u_k - \bar{u}\|}}^{= \alpha \in [0,1]} (u_k - \bar{u}) =$$

$$\left(\bar{u}+te_k\right) = \bar{u} + \underbrace{\frac{t}{\left\|u_k-\bar{u}\right\|}}_{}\!\!\!\overset{\alpha\in[0,1]}{}\left(u_k-\bar{u}\right) =$$

$$= \bar{u}+\alpha\left(u_k-\bar{u}\right) = \alpha u_k + \left(1-\alpha\right)\bar{u} \in M \Rightarrow \bar{u}+t\overset{\to e}{e_k} \in M.$$

В последнем соотношении перейдем к пределу при $k\to\infty$. В силу замкнутости множества M получим $\bar{u}+te\in M,\ t\geq 0.$

Покажем, что для направления e включение $u+te\in M,\ t\geq 0$ выполняется для всех точек $u\in M$. Действительно по доказанному, $\bar{u}+\mu e\in M, \mu\geq 0$. Пусть число $\mu\geq 0$ столь велико, что имеет место $\frac{t}{\mu}\in\left[0,1\right]$. Из выпуклости множества M для произвольной точки $u\in M$ следует включение

$$\overbrace{\underbrace{\frac{t}{\mu}}_{\in[0,1]}\underbrace{\left(\bar{u}+\mu e\right)}_{\in M}+\left(1-\overbrace{\frac{t}{\mu}}^{\in[0,1]}\right)\overset{\in M}{u}}^{\in M} = \frac{t}{\mu}\bar{u}+te+u-\frac{t}{\mu}u =$$

$$= \frac{t}{m}\bar{u} + te + u - \frac{t}{m}u = \quad u + te + \frac{t}{m}(\bar{u} - u) \in M. \qquad (1)$$

Устремляя μ в бесконечность, с учетом замкнутости множества M в пределе из (1) получим $u + te \in M$. Лемма доказана.

Теорема 3. ***Пусть*** $I : R^n \Rightarrow R^1$ ***выпуклая функция. Для ограниченности множеств*** $M(c) \subset R^n$ ***при любых значениях*** $c \in R^1$ ***достаточно существования хотя бы одного числа*** $a \in R^1$, ***при котором множество*** $M(a) \neq \varnothing$ ***ограниченно.***

Доказательство. Пусть множество $M(a) \neq \varnothing$ ограниченно. Для $c \leq a$ справедливо включение $M(c) = \{u \in U \mid I(u) \leq c\} \subset \{u \in U \mid I(u) \leq a\} = M(a)$.

Остается рассмотреть лишь случай $c > a$. Предположим, что при некотором значении $c > a$ множество $M(c)$ неограниченно. Заметим, что в силу непрерывности выпуклой функции I это множество замкнуто, а по **теореме 2** и выпукло.

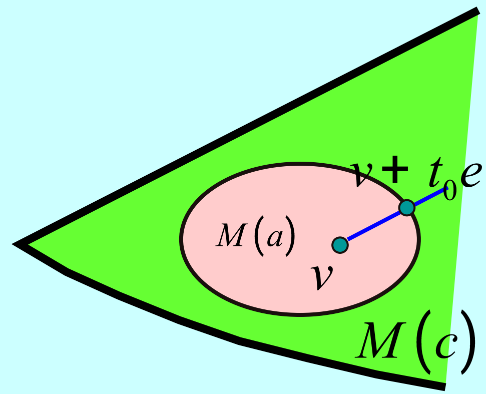
Зафиксируем точку $v \in M(a) \subset M(c)$ $\left(c > a,\ M(a) \neq \varnothing\right)$. В силу **леммы 1** существует рецессивное направление $e \in R^n$ для множества $M(c)$. Тогда имеет место включение $v + te \in M(c),\ t \geq 0.$ Из ограниченности множества $M(a)$ вытекает существование числа $t_0 = \sup\left\{t \mid v + te \in M(a)\right\} < +\infty$.
Тогда

$$t > t_0 \Rightarrow \quad c \overset{v+te\in M(c)}{\geq} I(v+te) \overset{v+te\notin M(a)}{>} a \overset{v\in M(a)}{\geq} I(v). \quad (2)$$

Заметим, что для всех $\lambda \in (0,1)$ имеет место

$$\overbrace{v}^{\lambda v+(1-\lambda)v} + te = \lambda v + (1-\lambda)v + te =$$

$$= \lambda\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) + (1-\lambda)v.$$

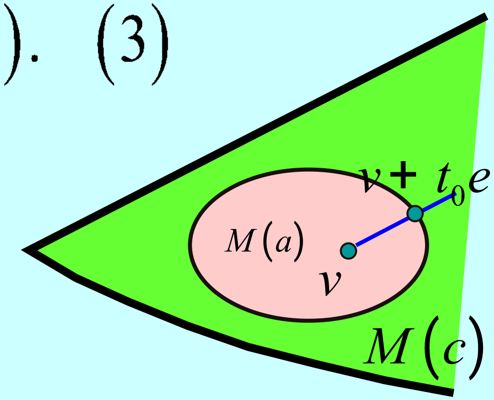


Из выпуклости функции I отсюда выводим

$$I(v+te) = I\left(\lambda\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) + (1-\lambda)v\right) \leq \lambda I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) + (1-\lambda)I(v) \Rightarrow$$

$$I(v+te)\le \lambda I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)+(1-\lambda)I(v)\Rightarrow \qquad \lambda I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)\ge I(v+te)-I(v)+\lambda I(v)\Rightarrow$$

$$I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)\ge \frac{\overbrace{I(v+te)}^{v+te\notin M(a)\Rightarrow I(v+te)>a}-\overbrace{I(v)}^{v\in M(a)\Rightarrow I(v)\le a}}{\lambda}+I(v). \quad (3)$$



В (3) устремим $\overset{\lambda\in(0,1)}{\lambda\to+0}$. В силу неравенства (2)

$I(v+te)>I(v)$ (2) получим

$$\frac{\overbrace{I(v+te)-I(v)}^{>0}}{\underset{\to 0}{\lambda}}\to+\infty \overset{(3)}{\Rightarrow} I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)\to+\infty.$$

Тогда найдется число $\overset{\lambda\in(0,1)}{\lambda_0}>0$, что $I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)>c$ при всех $\lambda\in(0,\lambda_0)$.

С другой стороны, по построению вектора e (рецессивное направление) имеем

$$v+\frac{t}{\lambda}e\in M(c)\Rightarrow I\left(v+\frac{t}{\lambda}e\right)\le c \quad \forall\lambda\in(0,1).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

4.3. Опорная функция подмножества пространства R^n. Пусть $U \subset R^n$ компактное множество.

Определение 4. ***Функция*** $\chi_U : R^n \Rightarrow R^1$, ***определенная формулой***

$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle, \; v \in R^n, \qquad (1)$$

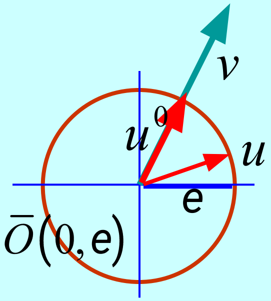
называется опорной функцией множества U.

Максимум в правой части (1) действительно достигается в силу компактности множества U и непрерывности скалярного произведения.

Упражнение. Вычислить опорную функцию шара $\bar{O}(0, \varepsilon) \subset R^n$.

Решение. Максимум в (1) достигается на векторе $u^0 = \dfrac{\varepsilon v}{\|v\|}$. Тогда

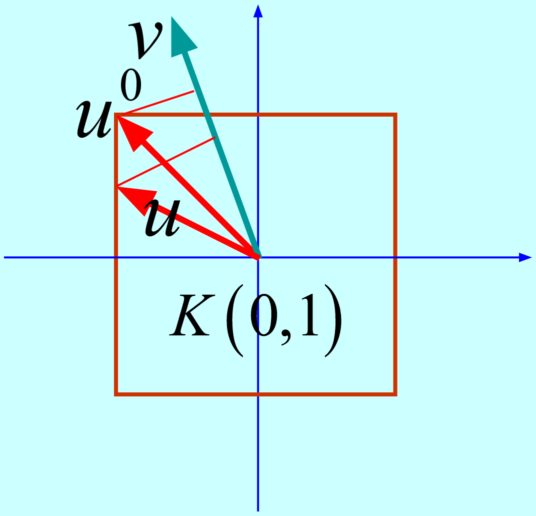
$$\chi_U(v) = \left\langle v, \frac{\varepsilon v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{\varepsilon \|v\|^2}{\|v\|} = \varepsilon \|v\|.$$



Упражнение. Вычислить опорную функцию квадрата

$$K(0,1) = \left\{ u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2 \;\middle|\; |u^1| \le 1, |u^2| \le 1 \right\}.$$

Решение.



$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle = \max_{|u^1| \le 1, |u^2| \le 1} \left(u^1 v^1 + u^2 v^2 \right) =$$

$$= \max_{|u^1| \le 1} \left(u^1 \cdot v^1 \right) + \max_{|u^2| \le 1} \left(u^2 \cdot v^2 \right) =$$

$$= \left(\begin{cases} -1, & v^1 < 0, \\ \forall u^1 \in [0,1], & v^1 = 0, \\ 1, & v^1 > 0 \end{cases} \right) \cdot v^1 + \left(\begin{cases} -1, & v^2 < 0, \\ \forall u^2 \in [0,1], & v^2 = 0, \\ 1, & v^2 > 0 \end{cases} \right) \cdot v^2 =$$

$$= \overbrace{\left(\begin{cases} -v^1, & v^1 < 0, \\ 0, & v^1 = 0, \\ v^1, & v^1 > 0 \end{cases} \right)}^{|v^1|} + \overbrace{\left(\begin{cases} -v^2, & v^2 < 0, \\ 0, & v^2 = 0, \\ v^2, & v^2 > 0 \end{cases} \right)}^{|v^2|} = |v^1| + |v^2|.$$

Свойство 1. ***Опорная функция является положительно однородной.***

Доказательство.

$$\chi_U\Big(\overset{\ge 0}{\lambda}\cdot v\Big)=\max_{u\in U}\Big\langle u,\overset{\ge 0}{\lambda}\cdot v\Big\rangle=\lambda\cdot\overbrace{\max_{u\in U}\langle u,v\rangle}^{\chi_U(v)}=\lambda\cdot\chi_U(v),\quad v\in R^n,\lambda\ge 0.$$

Свойство 2. ***Для любых*** $v_1,v_2\in R^n$ ***справедливо неравенство***

$$\chi_U(v_1+v_2)\le\chi_U(v_1)+\chi_U(v_2).$$

Доказательство.

$$\chi_U(v_1+v_2)=\max_{u\in U}\langle u,v_1+v_2\rangle\le\overbrace{\max_{u\in U}\langle u,v_1\rangle}^{\chi_U(v_1)}+\overbrace{\max_{u\in U}\langle u,v_2\rangle}^{\chi_U(v_2)}=\chi_U(v_1)+\chi_U(v_2).$$

Свойство 3. ***Опорная функция является выпуклой функцией.***

Доказательство. По **свойству 1 и 2** имеем

$$\chi_U\big(\alpha v_1+(1-\alpha)v_2\big)\overset{\text{свойство 2}}{\le}\chi_U(\alpha v_1)+\chi_U\big((1-\alpha)v_2\big)\overset{\text{свойство 1}}{=}$$

$$\overset{\text{свойство 1}}{=}\alpha\chi_U(v_1)+(1-\alpha)\chi_U(v_2),\quad v_1,v_2\in R^n,\alpha\in[0,1].$$

Свойство 4. ***Пусть*** $U, W \subset R^n$. ***Тогда***

$$\chi_{U+W}(v) = \chi_U(v) + \chi_W(v).$$

Доказательство.

$$\chi_{U+W}(v) = \max_{z \in U+W} \left\langle \overset{u+w}{z}, v \right\rangle = \max_{u \in U, w \in W} \langle u+w, v \rangle = \max_{u \in U, w \in W} \left[\langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle \right] =$$

$$= \overbrace{\max_{u \in U} \langle u, v \rangle}^{\chi_U(v)} + \overbrace{\max_{w \in W} \langle w, v \rangle}^{\chi_W(v)} = \chi_U(v) + \chi_W(v).$$

Следствие. ***Справедливо равенство***

$$\chi_{\overline{U^\varepsilon}}(v) = \chi_{\bar{U}}(v) + \varepsilon \|v\|.$$

Доказательство.

$$\overline{U^\varepsilon} = \bar{U} + \bar{O}(0, \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\chi_{\overline{U^\varepsilon}}(v) = \chi_{\bar{U}}(v) + \chi_{\bar{O}(0,\varepsilon)}(v) = \chi_{\bar{U}}(v) + \varepsilon \|v\|.$$

Пример 3. Вычислить опорную функцию шара $\bar{O}(u_0, R) \subset R^n$.

Решение. В силу представления $\overline{O}(u_0, R) = \{u_0\} + \overline{O}(0, R)$ **и свойства 4** опорной функции находим

$$\chi_{\bar{O}(u_0,R)}(v) = \chi_{\{u_0\}+\bar{O}(0,R)}(v) = \underbrace{\chi_{\{u_0\}}(v)}_{}\overset{\langle u_0,\, v\rangle}{} + \chi_{\bar{O}(0,R)}(v) \overset{\text{пример1: } R\|v\|}{=} \langle u_0, v\rangle + R\|v\|.$$

Пусть A квадратная матрица $n-$ го порядка. Полагаем $AU = \{v = Au \mid u \in U\}$.

Свойство 5. ***Справедливо равенство*** $\chi_{AU}(v) = \chi_U(A^T v)$.

Доказательство.

$$\chi_{AU}(v) = \max_{z \in AU} \langle \overset{Au}{z}, v \rangle = \max_{u \in U} \langle Au, v \rangle = \max_{u \in U} \langle u, A^T v \rangle = \chi_U(A^T v). \quad (2)$$

Следствие 1. ***Имеет место равенство*** $\chi_{\lambda U}(v) = \chi_U(\lambda v)$.

Доказательство. Вытекает из **свойства 5** при $A = \lambda E$. Действительно,

$$\chi_{\lambda U}(v) = \chi_{(\lambda E)U}(v) \overset{\text{свойство 5}}{=} \chi_U\left((\lambda E)^T v\right) =$$

$$= \chi_U\left((\lambda E)v\right) = \chi_U(\lambda v).$$

Следствие 2. ***Опорная функция является положительно однородной по аргументу***

$$U \subset R^n, \quad \textit{т.е.}\ \chi_{\lambda U}(v) = \lambda\, \chi_U(v),\ \lambda \geq 0.$$

Доказательство. Вытекает из предыдущего **следствия** и **свойства 1.** Действительно,

$$\chi_{\overset{\geq 0}{\lambda} U}(v) \overset{\text{следствие 1}}{=} \chi_U\left(\overset{\geq 0}{\lambda} v\right) \overset{\textit{свойство 1}}{=} \lambda \chi_U(v).$$

Свойство 6. ***Пусть*** $U, W \subset R^n$, $U \subset W$ – ***компактные множества. Тогда***

$$\chi_U(v) \leq \chi_W(v),\ v \in \forall R^n.$$

Доказательство.

$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle \overset{U \subset W}{\leq} \max_{w \in W} \langle w, v \rangle = \chi_W(v),\ \forall v \in R^n.$$