ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 2

1. ПРОСРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$R^n$$

1. ПРОСРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ R^n.

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств R^n.

1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств R^n. Пусть

$$A_1, \ldots, A_m \subset R^n \qquad \text{и} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R^1.$$

Определение 15. ***Множество***

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = \left\{ a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \,\middle|\, a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

будем называть алгебраической линейной комбинацией множеств $A_1, \ldots, A_m$

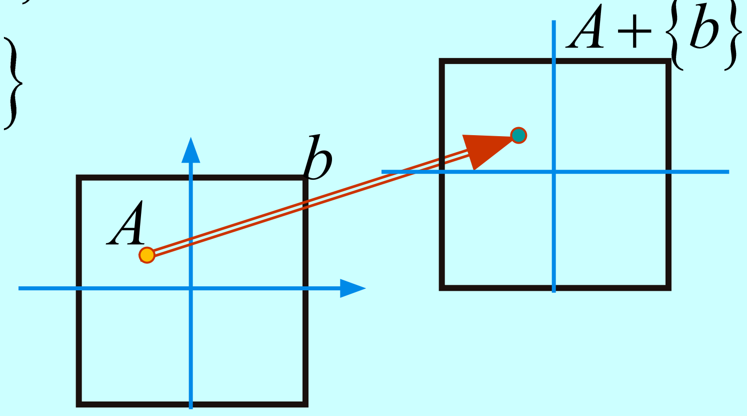
с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R^1$.

В частности, если $A \subset R^n,\ B = \{b\} \subset R^n$, ***то множество***

$$A + B = \left\{ u = a + b \,\middle|\, a \in A \right\}$$

называется сдвигом множества A

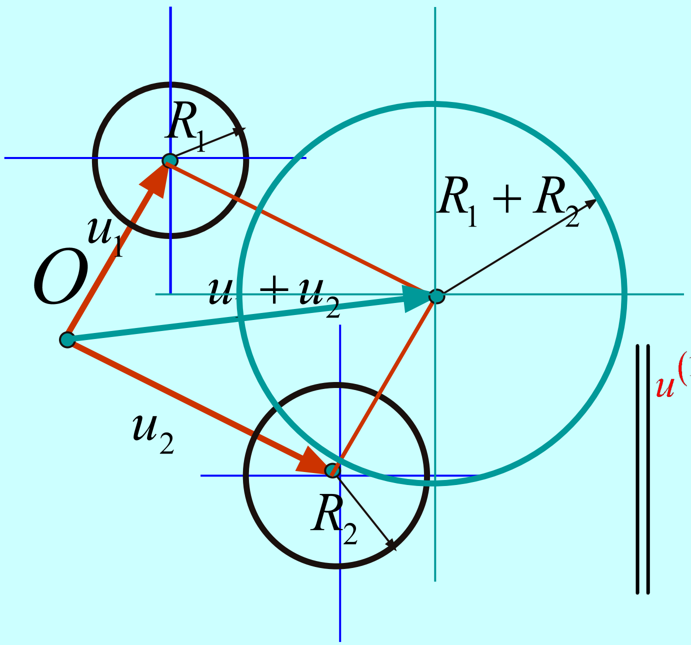
на вектор b.



Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) = \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $u \in \bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2)$. Тогда



$$u = \overbrace{u^{(1)}}^{\in \bar{O}(u_1, R_1)} + \overbrace{u^{(2)}}^{\in \bar{O}(u_2, R_2)},$$

$$\left\|u_1 - u^{(1)}\right\| \le R_1, \left\|u_2 - u^{(2)}\right\| \le R_2 \Rightarrow$$

$$\Big\|\overbrace{u}^{u^{(1)}+u^{(2)}} - (u_1 + u_2)\Big\| = \left\|u^{(1)} + u^{(2)} - (u_1 + u_2)\right\| =$$

$$= \left\|\left(u^{(1)} - u_1\right) + \left(u^{(2)} - u_2\right)\right\| \le \underbrace{\left\|u^{(1)} - u_1\right\|}_{\le R_1} + \underbrace{\left\|u^{(2)} - u_2\right\|}_{\le R_2} \le R_1 + R_2 \Rightarrow$$

$$u \in \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2).$$

Доказано, что

$$\bar{O}(u_1, R_1) + \bar{O}(u_2, R_2) \subset \bar{O}(u_1 + u_2, R_1 + R_2).$$

Докажем обратное вложение. Пусть $u \in \bar{O}\left(u_1 + u_2, R_1 + R_2\right)$. Тогда

$$0 \le \underbrace{\left\| u - \left(u_1 + u_2\right) \right\|}_{\lambda} = \lambda \le R_1 + R_2.$$

Если $\lambda = 0,$ то

$$u - \left(u_1 + u_2\right) = 0 \Rightarrow u = \overset{\in \bar{O}(u_1, R_1)}{u_1} + \overset{\in \bar{O}(u_2, R_2)}{u_2} \in \bar{O}\left(u_1, R_1\right) + \bar{O}\left(u_2, R_2\right).$$

Пусть теперь $\lambda > 0.$ Тогда возможно представление

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\le R_1 + R_2\right), \quad 0 < \lambda_i \le R_i, \ i = 1, 2.$$

Обозначим

$$u^{(1)} = u_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}\left(u - u_1 - u_2\right), \qquad u^{(2)} = u_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda}\left(u - u_1 - u_2\right).$$

Тогда

$$u^{(1)} + u^{(2)} = \left[u_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}\left(u - u_1 - u_2\right)\right] + \left[u_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda}\left(u - u_1 - u_2\right)\right] =$$

$$= u_1 + u_2 + \overbrace{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda}}^{=1}\left(u - u_1 - u_2\right) = u_1 + u_2 + u - u_1 - u_2 = u \Rightarrow$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

Заметим, что

$$u^{(i)} = u_i + \frac{\lambda_i}{\lambda}\left(u - u_1 - u_2\right) \Rightarrow$$

$$\left\| u^{(i)} - u_i \right\| = \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \underbrace{\left\| u - u_1 - u_2 \right\|}_{=\lambda} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda = \lambda_i \le R_i,\ i = 1, 2.$$

$$\left\| u^{(i)} - u_i \right\| \le R_i \Rightarrow\ u^{(i)} \in \bar{O}\left(u_i, R_i\right), i = 1, 2$$

Таким образом,

$$u = \overset{\in \bar{O}(u_1, R_1)}{u^{(1)}} + \overset{\in \bar{O}(u_2, R_2)}{u^{(2)}} \in \bar{O}\left(u_1, R_1\right) + \bar{O}\left(u_2, R_2\right) \Rightarrow$$

$$\bar{O}\left(u_1 + u_2, R_1 + R_2\right) \subset \bar{O}\left(u_1, R_1\right) + \bar{O}\left(u_2, R_2\right),$$

и равенство (1) $\bar{O}\left(u_1, R_1\right) + \bar{O}\left(u_2, R_2\right) = \bar{O}\left(u_1 + u_2, R_1 + R_2\right). \quad (1)$ доказано.

Теорема 2. ***Имеет место равенство***

$$k \cdot \bar{O}\left(0, R\right) = \bar{O}\left(0, |k| R\right).$$

Доказательство. При $k = 0$ справедливость доказываемого равенства очевидна.

Пусть $k \neq 0$ и $u \in k \cdot \bar{O}(0, R)$. Тогда

$$u = ku^{(0)},\ u^{(0)} \in \bar{O}(0, R) \Rightarrow \left\| \overbrace{u}^{ku^{(0)}} \right\| = \left\| ku^{(0)} \right\| = |k| \overbrace{\left\| u^{(0)} \right\|}^{\le R} \le |k| R \Rightarrow$$

$$u \in \bar{O}(0, |k| R) \Rightarrow k \cdot \bar{O}(0, R) \subset \bar{O}(0, |k| R).$$

Обратно, если $u \in \bar{O}(0, |k| R) \Rightarrow \|u\| \le |k| R,$ то полагаем $v = \dfrac{1}{k} u \Rightarrow$

$$\left\| \overbrace{v}^{\frac{1}{k}u} \right\| = \left\| \frac{1}{k} u \right\| = \frac{1}{|k|} \overbrace{\|u\|}^{\le |k| R} \le \frac{|k| R}{|k|} = R \Rightarrow v \in \bar{O}(0, R) \Rightarrow u = k \overbrace{v}^{\in \bar{O}(0,R)} \Rightarrow$$

$$u \in k \cdot \bar{O}(0, R) \Rightarrow \bar{O}(0, |k| R) \subset k \cdot \bar{O}(0, R).$$ Теорема доказана.

Из **теорем 1,2** следует, что любой шар $\bar{O}(u_0, R)$ можно представить в виде

$$\bar{O}(u_0, R) = \overbrace{\bar{O}(u_0, 0)}^{\{u_0\}} + \bar{O}(0, R) = \{u_0\} + \bar{O}(0, R).$$

Упражнение 1. Пусть

$$P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,\left|x-x_1\right|\le a_1,\left|y-y_1\right|\le b_1\right\}$$

$$P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,\left|x-x_2\right|\le a_2,\left|y-y_2\right|\le b_2\right\}$$

Доказать, что

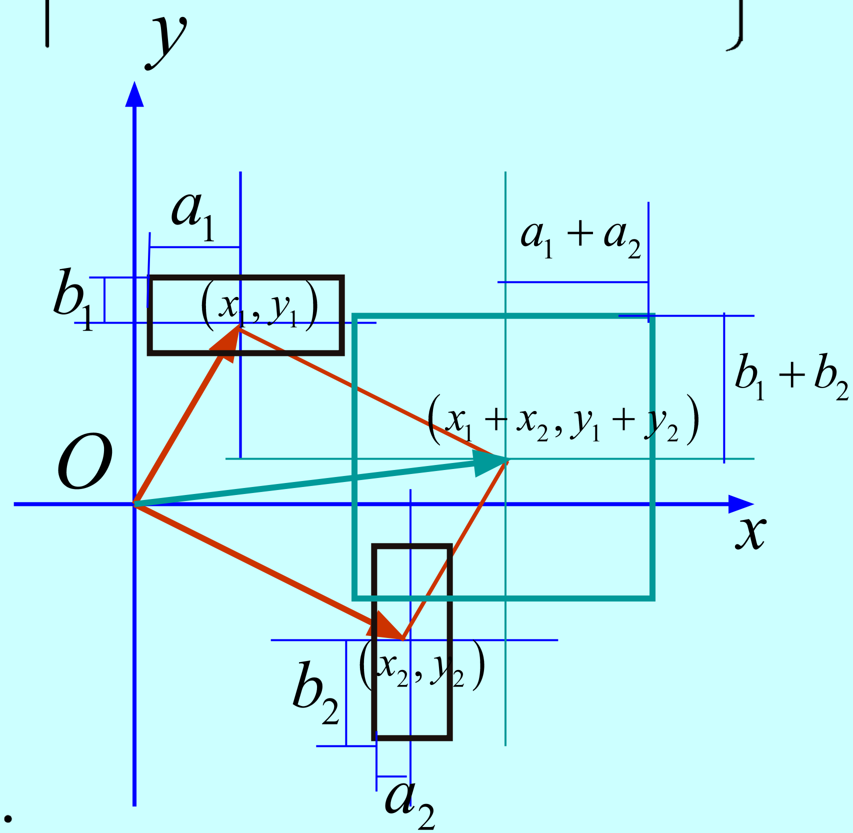
$$P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+$$

$$+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right)=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,\left|x-\left(x_1+x_2\right)\right|\le a_1+a_2,\right.$$

$$\left.\left|y-\left(y_1+y_2\right)\right|\le b_1+b_2\right\}=$$

$$=P\left(x_1+x_2,y_1+y_2,a_1+a_2,b_1+b_2\right).$$



Решение.

Докажем вложение

$$P^{(1)}\left(x_1, y_1, a_1, b_1\right) + P^{(2)}\left(x_2, y_2, a_2, b_2\right) \subset P\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2\right).$$

Пусть $u \in P^{(1)}\left(x_1, y_1, a_1, b_1\right) + P^{(2)}\left(x_2, y_2, a_2, b_2\right)$. Тогда

$$u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_u = x^{(1)} + x^{(2)}, \\ y_u = y^{(1)} + y^{(2)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} \in P^{(1)}\left(x_1, y_1, a_1, b_1\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \middle| \left|x - x_1\right| \le a_1, \left|y - y_1\right| \le b_1 \right\},$$

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \in P^{(2)}\left(x_2, y_2, a_2, b_2\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \middle| \left|x - x_2\right| \le a_2, \left|y - y_2\right| \le b_2 \right\}$$

Имеет место неравенство

$$\left|x_u - \left(x_1 + x_2\right)\right| = \left|x^{(1)} + x^{(2)} - x_1 - x_2\right| = \left|x^{(1)} - x_1 + x^{(2)} - x_2\right| \le$$

$$\le \left|x^{(1)} - x_1\right| + \left|x^{(2)} - x_2\right| \le a_1 + a_2 \Rightarrow$$

$$\left|x_u-\left(x_1+x_2\right)\right|\le a_1+a_2.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\left|y_u-\left(y_1+y_2\right)\right|\le b_1+b_2.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \,\middle|\, \left|x-\left(x_1+x_2\right)\right|\le a_1+a_2, \left|y-\left(y_1+y_2\right)\right|\le b_1+b_2 \right\}$$

и вложение

$$P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right)\subset P\left(x_1+x_2,y_1+y_2,a_1+a_2,b_1+b_2\right).$$

доказано. Установим обратное вложение.

$$P\left(x_1+x_2,y_1+y_2,a_1+a_2,b_1+b_2\right)\subset P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right).$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \,\middle|\, \left|x-\left(x_1+x_2\right)\right|\le a_1+a_2, \left|y-\left(y_1+y_2\right)\right|\le b_1+b_2 \right\}.$$

Тогда $0 \le \lambda_x = \left| x_u - \left(x_1 + x_2 \right) \right|.$ Пусть $\lambda_x > 0.$ Сделаем представление

$$\lambda_x = \lambda_{1x} + \lambda_{2x}, \ 0 < \lambda_{xi} \le a_i, i = 1, 2.$$

Обозначим

$$x^{(1)} = x_1 + \frac{\lambda_{1x}}{\lambda_x}\left(x_u - x_1 - x_2 \right), \qquad x^{(2)} = x_2 + \frac{\lambda_{2x}}{\lambda_x}\left(x_u - x_1 - x_2 \right).$$

Очевидно, что

$$x^{(1)} + x^{(2)} = x_1 + \frac{\lambda_{1x}}{\lambda_x}\left(x_u - x_1 - x_2 \right) + x_2 + \frac{\lambda_{2x}}{\lambda_x}\left(x_u - x_1 - x_2 \right) =$$

$$= x_1 + x_2 + \left(x_u - x_1 - x_2 \right) = x_u,$$

С другой стороны

$$\left| x^{(i)} - x_i \right| = \left| x_i + \frac{\lambda_{ix}}{\lambda_x}\overbrace{\left(x_u - x_1 - x_2 \right)}^{\left| x_u - x_1 - x_2 \right| = \lambda_x} - x_i \right| = \frac{\lambda_{ix}}{\lambda_x} \cdot \lambda_x = \lambda_{ix} \le a_i, i = 1, 2,$$

Таким образом,

$$x_u = x^{(1)} + x^{(2)}, \quad \left| x^{(1)} - x_1 \right| \le a_1, \quad \left| x^{(2)} - x_2 \right| \le a_2 \quad (2).$$

Если $0=\lambda_x=\left|x_{и}-\left(x_1+x_2\right)\right|,$ то $x_{и}=x_1+x_2$ и равенство (2)

$$x_{и}=x^{(1)}+x^{(2)},\quad \left|\overset{=x_1}{x^{(1)}}-x_1\right|\le a_1,\quad \left|\overset{=x_2}{x^{(2)}}-x_2\right|\le a_2 \quad (2)$$ снова имеет место.

Аналогично, устанавливаем, что

$$y_{и}=\overset{\left|y^{(1)}-y_1\right|\le b_1}{y^{(1)}}+\overset{\left|y^{(2)}-y_2\right|\le b_2}{y^{(2)}} \qquad (3).$$

Из (2) и (3) следует

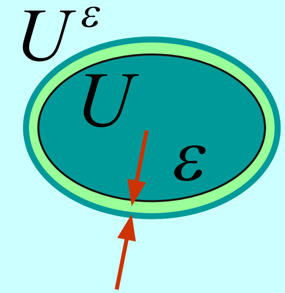
$$\begin{pmatrix}x_{и}\\ y_{и}\end{pmatrix}=\overset{P^{(1)}(x_1,y_1,a_1,b_1)}{\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix}}+\overset{P^{(2)}(x_2,y_2,a_2,b_2)}{\begin{pmatrix}x^{(2)}\\ y^{(2)}\end{pmatrix}}\in P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right).$$

Вложение $P\left(x_1+x_2,y_1+y_2,a_1+a_2,b_1+b_2\right)\subset P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right).$

доказано, а значит и равенство

$$P^{(1)}\left(x_1,y_1,a_1,b_1\right)+P^{(2)}\left(x_2,y_2,a_2,b_2\right)=P\left(x_1+x_2,y_1+y_2,a_1+a_2,b_1+b_2\right).$$

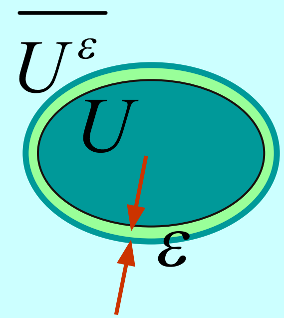
Определение 16. *Множество*



$$U^{\varepsilon} = \left\{ v \in R^n \,\middle|\, \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon, \right\}.$$

называется открытой ε — ***окрестностью множества*** U.

Множество



$$\overline{U^{\varepsilon}} = \left\{ v \in R^n \,\middle|\, \|v - u\| \le \varepsilon, u \in U \right\}$$

называется замкнутой ε — ***окрестностью множества*** U.

Упражнение 2. Доказать равенство

$$U^{\varepsilon} = U + O(0, \varepsilon),$$

где
$$U^{\varepsilon} = \left\{ v \in R^n \,\middle|\, \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon, \right\}.$$

Решение.

Пусть $v \in U^{\varepsilon} \Rightarrow \exists u \in U : \|v - u\| < \varepsilon.$ Полагаем $w = v - u \Rightarrow$

$$\|w\| = \|v - u\| < \varepsilon \Rightarrow w \in O(0, \varepsilon) \qquad v = \overset{\in O(0,\varepsilon)}{w} + \overset{\in U}{u} \in O(0, \varepsilon) + U \Rightarrow$$

$$U^{\varepsilon} \subset U + O(0, \varepsilon).$$

Обратно, пусть $v \in U + O(0,\varepsilon) \Rightarrow v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in O(0,\varepsilon)}{w} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w = v - u \Rightarrow \|v-u\| = \|w\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\exists u \in U : v = u + w, \|w\| \le \varepsilon \Rightarrow U + O(0,\varepsilon) \subset U^{\varepsilon}.$$

Упражнение 3. Пусть

$$\overline{K(O,a)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \middle| |x| \le a, |y| \le a \right\},$$

$$\overline{O(O,r)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \middle| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \le r \right\}$$

Построить множество

$$\overline{K(O,a)} + \overline{O(O,r)}.$$

Решение.