ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 3

1. ПРОСРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ) R^n

1. ПРОСРАНСТВО ПОДМНОЖЕСТВ R^n.

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств R^n.
(продолжение)

1.4. Расстояние Хаусдорфа.

1.3. Алгебраические линейные комбинации подмножеств (продолжение)

Теорема 3. ***Пусть множества*** $A_1, \ldots, A_m \subset R^n$ ***компактны. Тогда их любая алгебраическая комбинация*** $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = \left\{ a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \,\middle|\, a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, m \right\}$ ***является компактным множеством.***

Доказательство. Докажем ограниченность множества A. Действительно, имеют место включения $A_i \subset \bar{O}\left(0, |A_i|\right),\ i = 1, \ldots, m.$ Из компактности множеств $A_1, \ldots, A_m \subset R^n$ следует их ограниченность и конечность величин $\overset{\max\limits_{u \in A_i} \|u\|}{|A_i|},\ i = 1, \ldots, m.$

Тогда для всех $a \in A$ справедливо неравенство

$$\|a\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overset{\in A_i}{a_i} \right\| \le \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \overset{\le \max\limits_{u \in A_i} \|u\| = |A_i|}{\|a_i\|} \le \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \cdot |A_i| \Rightarrow A \subset \bar{O}\left(0, \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \cdot |A_i|\right)$$

что и означает ограниченность множества $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i$. Докажем замкнутость множества A. Пусть последовательность $\{x_j\},\ x_j \in A,\ j = 1, 2, \ldots$ сходится к x. Надо доказать, что $x \in A$. Действительно, справедливо представление

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{a_{ij}}_{\in A_i}, \quad a_{ij} \in A_i,\ i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, .$$

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_j, \quad \ldots \to x$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{i1} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_m a_{m1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{i2} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{m2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \ldots + \lambda_m a_{mj}$$

$$\in A_1, \quad \in A_2, \quad \ldots \quad \in A_m$$

Из компактности множеств A_i для всех $i = 1, \ldots, m$ можно считать, что

$\{a_{ij}\} \to a_{i0} \in A_i, \quad i = 1, \ldots, m.$ Действительно,

$$\underbrace{a_{11}}_{\in A_1}, \quad \underbrace{a_{12}}_{\in A_1}, \quad \ldots \quad \underbrace{a_{1j}}_{\in A_1}, \quad \ldots \in A_1,$$

$$\underbrace{a_{1k_1^{(1)}}}_{\in A_1}, \quad \underbrace{a_{1k_2^{(1)}}}_{\in A_1}, \quad \ldots \quad \underbrace{a_{1k_j^{(1)}}}_{\in A_1}, \quad \ldots \to a_{10} \in A_1,$$

$$\underbrace{a_{2k_1^{(1)}}}_{\in A_2}, \quad \underbrace{a_{2k_2^{(1)}}}_{\in A_2}, \quad \ldots, \quad \underbrace{a_{2k_j^{(1)}}}_{\in A_2} \quad \ldots \in A_2$$

$$\underbrace{a_{2k_1^{(2)}}}_{\in A_2}, \quad \underbrace{a_{2k_2^{(2)}}}_{\in A_2}, \quad \ldots \quad \underbrace{a_{2k_j^{(2)}}}_{\in A_2}, \quad \ldots \to a_{20} \in A_2,$$

$$\underbrace{a_{3k_1^{(2)}}}_{\in A_3},\ \underbrace{a_{3k_2^{(2)}}}_{\in A_3},\ \ldots,\ \underbrace{a_{3k_j^{(2)}}}_{\in A_3}\ \ldots \in A_3,$$

$$\underbrace{a_{mk_1^{(m)}}}_{\in A_m},\ \underbrace{a_{mk_2^{(m)}}}_{\in A_m},\ \ldots\ \underbrace{a_{mk_j^{(m)}}}_{\in A_m},\ \ldots \to a_{m0} \in A_m$$

Переобозначим $k_1^{(m)} \div 1,\ k_2^{(m)} \div 2, \ldots,\ k_j^{(m)} \div j, \ldots$ Тогда

предел берется по переобозначенным номерам j

$$x = \lim_{j\to\infty} \left(\overbrace{x_j}^{=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}} \right) = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \overbrace{\lim_{j\to\infty}\left(a_{ij}\right)}^{a_{i0}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i \overbrace{a_{i0}}^{\in A_i} \in \sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_i = A.$$

И так. Доказано, что если $x -$ предельная точка множества $A = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_i,$ то она принадлежит этому множеству. Отсюда следует замкнутость множества A и его компактность. Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать **теорему 3** при $m = 2.$

Теорема 3. ***Пусть множества*** $A_1, A_2 \subset R^n$ ***компактны. Тогда их любая алгебраическая комбинация*** $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ ***является компактным множеством.***

Доказательство. ***Ограниченность.*** Для всех $a \in A$ справедливо неравенство

$$\|a\| = \Big\|\lambda_1 \overset{\in A_1}{a_1} + \lambda_2 \overset{\in A_2}{a_2}\Big\| \le |\lambda_1| \overset{\le \max\limits_{u\in A_1}\|u\| = |A_i|}{\|a_1\|} + |\lambda_2| \overset{\le \max\limits_{u\in A_2}\|u\| = |A_2|}{\|a_2\|} \le |\lambda_1|\cdot|A_1| + |\lambda_2|\cdot|A_2| \Rightarrow$$

$A \subset \bar{O}\big(0, |\lambda_1|\cdot|A_1| + |\lambda_2|\cdot|A_2|\big),$ что и доказывает ограниченность множества $A.$

Доказательство замкнутости.

Пусть последовательность $\{x_j\},\ x_j \in A,\ j = 1, 2, \ldots$ сходится к $x \in R^n.$ Надо доказать, что $x \in A.$ Действительно, справедливо представление

$$\underset{\substack{=\lambda_1 a_{11}+\\ +\lambda_2 a_{21}+}}{x_1},\ \underset{\substack{=\lambda_1 a_{12}+\\ +\lambda_2 a_{22}}}{x_2} \ldots \underset{\substack{=\lambda_1 a_{1j}+\\ +\lambda_2 a_{2j}}}{x_j} \ldots \to \underset{\substack{\in A_1\\ \in A_2}}{x}$$

Из последовательности $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j}, \dots \in A_1$ в силу компактности множества A_1

можно выделить подпоследовательность

$$a_{1k_1^{(1)}}, a_{1k_2^{(1)}}, \dots, a_{1k_j^{(1)}}, \dots \to a_{10} \in A_1.$$

Из последовательности $a_{2k_1^{(1)}}, a_{2k_2^{(1)}}, \dots, a_{2k_j^{(1)}}, \dots \in A_2$ в силу компактности множества A_2 можно выделить подпоследовательность

$$a_{2k_1^{(2)}}, a_{2k_2^{(2)}}, \dots, a_{2k_1^{(2)}}, \dots \to a_{20} \in A_2.$$

Переобозначим $k_1^{(2)} \div 1, k_2^{(2)} \div 2, \dots, k_j^{2} \div j, \dots$ Тогда

предел берется по переобозначеным номерам j

$$x = \lim_{j\to\infty}\left(x_j\right) = \lim_{j\to\infty}\left(\overbrace{x_j}^{\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j}}\right) = \lim_{j\to\infty}\left(\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j}\right) =$$

$$= \lambda_1 \lim_{j\to\infty}\left(a_{1j}\right) + \lambda_2 \lim_{j\to\infty}\left(a_{2j}\right) = \lambda_1 \overset{\in A_1}{a_{10}} + \lambda_2 \overset{\in A_2}{a_{20}} \in \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = A.$$

И так. Доказано, что если $x-$ предельная точка множества $A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2$, то она принадлежит этому множеству. Отсюда следует замкнутость множества A и его компактность. Теорема доказана.

Непосредственно проверяется, что для любых чисел α, β и любых множеств $U, V \subset R^n$ выполняются следующие свойства.

1) $\alpha(\beta U)=(\alpha\beta)U;$

2) $1\cdot U=U;$

3) $\alpha(U+V)=\alpha U+\alpha V.$

Эти свойства являются следствием соответствующих свойств векторов из пространства R^n. Однако пространство подмножеств R^n нельзя считать линейным пространством, хотя бы потому, что не всегда выполняется равенство

$$(\alpha+\beta)\cdot U=\alpha U+\beta U. \qquad (2)$$

Пример 3. Пусть $U=\bar{O}(0,1), \alpha=1, \beta=-1.$ Тогда с одной стороны

$$\alpha U=1\cdot\bar{O}(0,1)=\bar{O}(0,1),$$

$$\beta U = (-1)\cdot \bar{O}(0,1) \overset{\text{Теорема 2}}{=} \bar{O}(0,|-1|\cdot 1) = \bar{O}(0,1) \Rightarrow$$

$$\alpha U + \beta U = \bar{O}(0,1) + \bar{O}(0,1) \overset{\text{Теорема 1}}{=} \bar{O}(0,2),$$

а с другой

$$\left(\overset{1}{\alpha} + \overset{-1}{\beta}\right)\cdot U = (1-1)\cdot \bar{O}(0,1) = \{0\} \neq \bar{O}(0,2).$$

Вместо равенства (2) $(\alpha+\beta)\cdot U = \alpha U + \beta U \quad (2)$ в общем случае справедливо лишь одностороннее вложение

$$(\alpha+\beta)\cdot U \subset \alpha U + \beta U.$$

Действительно, пусть $u \in (\alpha+\beta)\cdot U$. Тогда существует $u^{(0)} \in U$ такой, что $u = (\alpha+\beta)u^{(0)}$. Отсюда следует

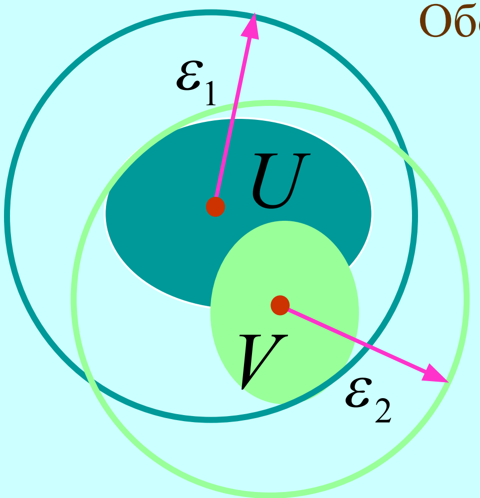
$$u = (\alpha+\beta)u^{(0)} = \alpha u^{(0)} + \beta u^{(0)} \in \alpha U + \beta U.$$

1.4. Расстояние Хаусдорфа. Пусть $U, V \subset R^n$ - компактные множества.

Определение 17. ***Величина***

$$\rho(U,V) = \min\left\{\varepsilon \ge 0 \,\middle|\, \overline{U^\varepsilon} \supset V, \overline{V^\varepsilon} \supset U\right\}$$

называется расстоянием Хаусдорфа между множествами U **и** V.



Обозначим

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon \ge 0 \,\middle|\, \overline{U^\varepsilon} \supset V\right\},$$

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\varepsilon \ge 0 \,\middle|\, V^\varepsilon \supset U\right\}.$$

Тогда $\rho(U,V) = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$

Покажем, что введенное понятие действительно является расстоянием, т.е. что для любых множеств $U, V, W \subset R^n$ справедливо

1) $\rho(U,V) \ge 0;$ **2)** $\rho(U,V) = 0 \Leftrightarrow U = V;$

3) $\rho(U,V) = \rho(V,U);$ **4)** $\rho(U,W) \le \rho(U,V) + \rho(V,W)$

Подробного доказательства требует лишь пункт **4).** Приведем его. Пусть

$$\alpha = \rho(U,V), \qquad \beta = \rho(V,W).$$

Тогда
$$\rho(V,W)=\beta \Rightarrow \quad V\subset W+\bar{O}(0,\beta),$$

$$\rho(U,V)=\alpha \Rightarrow U\subset \overbrace{V}^{\subset W+\bar{O}(0,\beta)} +\bar{O}(0,\alpha)\Rightarrow$$

$$U\subset W+\bar{O}(0,\beta)+\bar{O}(0,\alpha) =W+\bar{O}(0,\alpha+\beta)\Rightarrow$$

$$U\subset W+\bar{O}(0,\alpha+\beta), \qquad (3)$$

$$\rho(U,V)=\alpha \Rightarrow V\subset U+\bar{O}(0,\alpha),$$

$$\rho(V,W)=\beta \Rightarrow W\subset \overbrace{V}^{\subset U+\bar{O}(0,\alpha)} +\bar{O}(0,\beta)\Rightarrow$$

$$W\subset U+\bar{O}(0,\beta)+\bar{O}(0,\alpha) =U+\bar{O}(0,\alpha+\beta)\Rightarrow$$

$$W\subset U+\bar{O}(0,\alpha+\beta). \qquad (4)$$

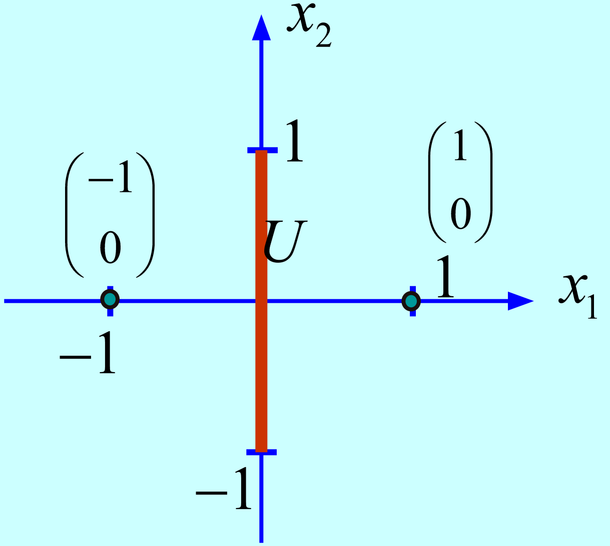
Из (3) и (4) выводим

$$\rho(U,W)\le\alpha+\beta=\rho(U,V)+\rho(V,W),$$

что и доказывает требуемое свойство.

Упражнение 2. Найти расстояние Хаусдорфа между множествами

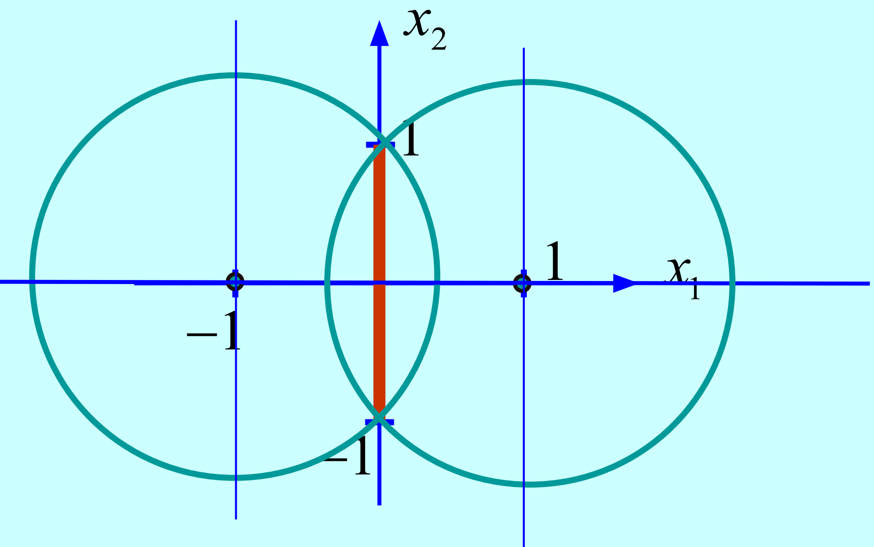
$$U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\middle|\, x_1=0,\ x_2\in[-1,1]\right\},\ \text{и}\ V=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

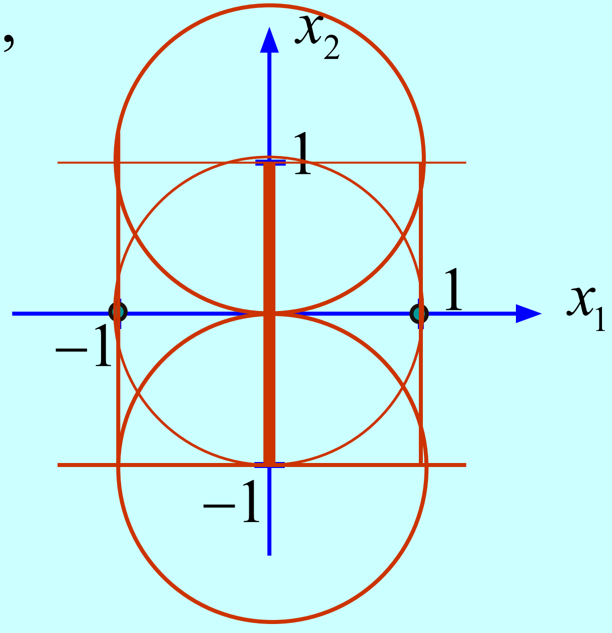


Решение.

$$\varepsilon_1=$$
$$=\min\left\{\varepsilon\ge 0\,\middle|\,U\subset V+\bar{O}(0,\varepsilon)\right\}=$$
$$=\sqrt{2},$$

$$\varepsilon_2=$$
$$=\min\left\{\varepsilon\ge 0\,\middle|\,V\subset U+\bar{O}(0,\varepsilon)\right\}=$$
$$=1,$$





Таким образом,

$$\rho(U,V)=\max\{R_1,R_2\}=\max\left\{\sqrt{2},1\right\}=\sqrt{2}.$$

Упражнение 3. Найти расстояние Хаусдорфа между шарами

$$\bar{O}(u_1,\alpha)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \|u-u_1\|\le\alpha\right\},\quad \bar{O}(u_2,\beta)=\left\{u\in R^n \,\middle|\, \|u-u_2\|\le\beta\right\}$$

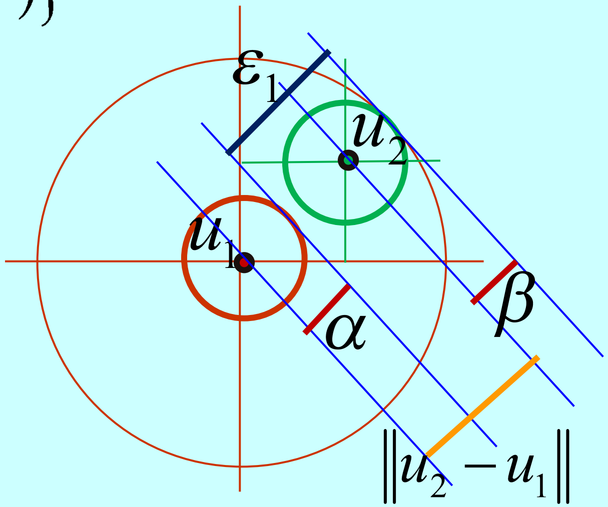
Решение.

$$\varepsilon_1=\min\left\{\varepsilon\ge 0 \,\middle|\, \bar{O}(u_2,\beta)\subset\bar{O}(u_1,\alpha)+\bar{O}(0,\varepsilon)\right\}=$$

$$=\min\left\{\varepsilon\ge 0 \,\middle|\, \bar{O}(u_2,\beta)\subset\bar{O}(u_1,\alpha+\varepsilon)\right\}$$

$$\alpha+\|u_2-u_1\|+\beta=\alpha+\varepsilon_1\Rightarrow$$

$$\varepsilon_1=\beta+\|u_2-u_1\|$$



Аналогично

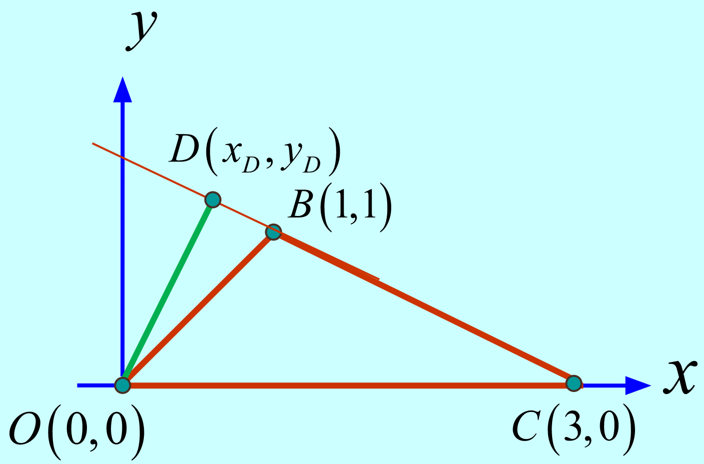
$$\varepsilon_2 = \min\left\{\varepsilon \geq 0 \,\middle|\, \bar{O}(u_1,\alpha) \subset \bar{O}(u_2,\beta) + \bar{O}(0,\varepsilon)\right\} =$$

$$= \min\left\{\varepsilon \geq 0 \,\middle|\, \bar{O}(u_1,\alpha) \subset \bar{O}(u_2,\beta+\varepsilon)\right\} = \alpha + \|u_2 - u_1\|$$

$$\rho\left(\bar{O}(u_1,\alpha),\bar{O}(u_2,\beta)\right) = \max\{R_1,R_2\} =$$

$$= \max\left\{\beta + \|u_2-u_1\|, \alpha + \|u_2-u_1\|\right\} = \max\{\beta,\alpha\} + \|u_2-u_1\|.$$

Упражнение 4. Дан треугольник ΔOBC координатами своих вершин $O(0,0)$, $B(1,1)$, $C(3,0)$. Найти расстояние Хаусдорфа между этим треугольником и точкой D, являющейся пересечением высоты, опущенной из вершины O на сторону BC с этой стороной.



Решение.

Уравнение стороны $BC: y-1 = \dfrac{1-0}{1-3}(x-1) \Rightarrow$

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \quad k_{BC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad k_{BD} = 2.$$

Уравнение высоты $BD: \quad y - 0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$

Координаты точки $D:\quad \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \quad 2x=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow \quad \frac{5}{2}x=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$x_D=\frac{3}{5} \Rightarrow \quad y_D=\frac{6}{5}.$

$$\rho\left(\Delta OBC,\left\{D\right\}\right)=DC=\sqrt{\left(\frac{3}{5}-3\right)^2+\left(\frac{6}{5}-0\right)^2}=\frac{6\cdot\sqrt{5}}{5}$$