ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 4

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

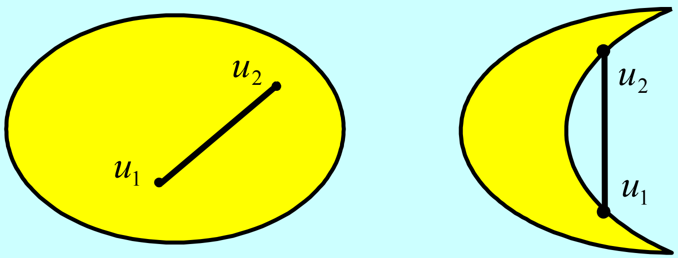
2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Определение выпуклого множества. Примеры.

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Определение выпуклого множества. Примеры.

Геометрический смысл выпуклости множества состоит в том, что выпуклое множество вместе с любыми двумя точками содержит и отрезок, их соединяющий. Например, левое множество на рисунке выпукло, а правое нет.



Дадим формальное определение выпуклого множества.

Определение 1. ***Множество*** $U \subset R^n$ ***называется выпуклым, если для всех*** $u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0,1]$ ***справедливо включение*** $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U$. ***Пустое и одноточечное множества принимаются выпуклыми по определению.***

Приведем примеры выпуклых множеств.

Пример 1. Замкнутая (открытая) окрестность точки $u_0 \in R^n$ радиуса R множество

$$\bar{O}(u_0, R) = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \|u - u_0\| \le R \right\},\ u_0 \in R^n,\ R \ge 0$$

$$\left(O(u_0, R) = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \|u - u_0\| < R \right\},\ u_0 \in R^n,\ R \ge 0 \right)$$

является выпуклым множеством. Действительно для всех $\alpha \in [0,1]$ и

$u_1, u_2 \in \bar{O}(u_0, R)$ справедливо

$$\left\| \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \overbrace{u_0}^{\alpha u_0 + (1-\alpha) u_0} \right\| =$$

$$= \left\| \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \alpha u_0 - (1-\alpha) u_0 \right\| =$$

$$= \left\| \alpha (u_1 - u_0) + (1-\alpha)(u_2 - u_0) \right\| \le$$

$$\le \alpha \overbrace{\|u_1 - u_0\|}^{\le R} + (1-\alpha) \overbrace{\|u_2 - u_0\|}^{\le R} \le$$

$$\le \alpha \overbrace{\|u_1 - u_0\|}^{\le R} + (1-\alpha)\overbrace{\|u_2 - u_0\|}^{\le R} \le$$

$$\le \alpha R + (1-\alpha) R = R \Rightarrow \quad \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in \bar{O}(u_0, R).$$

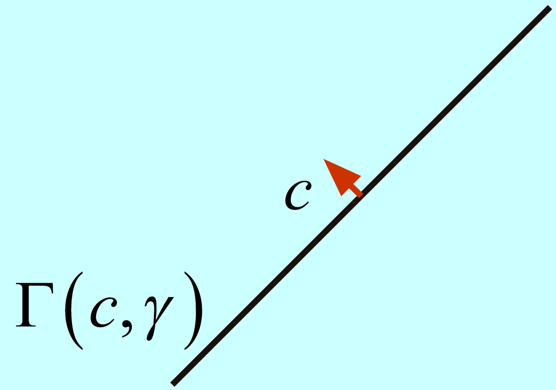
Доказательство для открытой окрестности аналогично.

Пример 2. Множество точек

$$\Gamma(c,\gamma) = \{\, u \in R^n \mid \langle c, u \rangle = \gamma \,\}$$

$$, c \in R^n, c \ne 0, \gamma \in R^1,$$

называемое гиперплоскостью в R^n, выпукло.



Действительно, для всех $\alpha \in [0,1]$

и $u_1, u_2 \in \Gamma(c,\gamma)$ справедливо

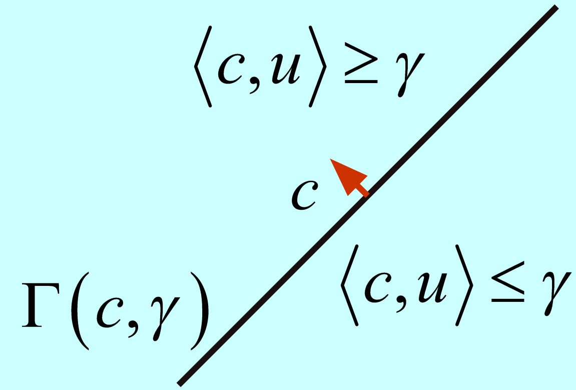
$$\langle c, \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \rangle = \quad \alpha \overbrace{\langle c, u_1 \rangle}^{=\gamma} + (1-\alpha) \overbrace{\langle c, u_2 \rangle}^{=\gamma} =$$

$$= \alpha \gamma + (1-\alpha)\gamma = \gamma \Rightarrow \quad \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in \Gamma(c,\gamma).$$

Гиперплоскости $\Gamma(c,\gamma)$ поставим в соответствие множества

$$\overline{\Gamma}^{+}(c,\gamma)=\left\{ u\in R^{n} \,\middle|\, \langle c,u\rangle \geq \gamma \right\},$$

$$\overline{\Gamma}^{-}(c,\gamma)=\left\{ u\in R^{n} \,\middle|\, \langle c,u\rangle \leq \gamma \right\}$$



которые называются замкнутыми полупространствами, и множества

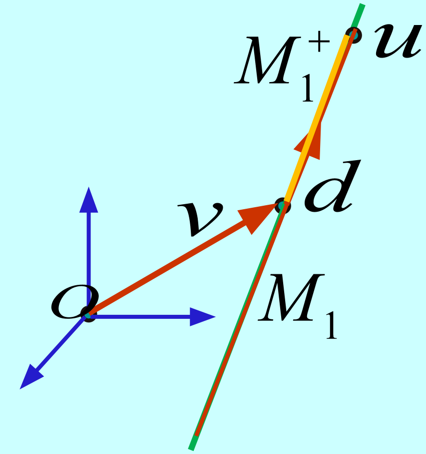
$$\Gamma^{+}(c,\gamma)=\left\{ u\in R^{n} \,\middle|\, \langle c,u\rangle > \gamma \right\}, \quad \Gamma^{-}(c,\gamma)=\left\{ u\in R^{n} \,\middle|\, \langle c,u\rangle < \gamma \right\}$$

которые называются открытыми полупространствами.

Пример 3. Множества $\overline{\Gamma}^{+}(c,\gamma), \overline{\Gamma}^{-}(c,\gamma), \Gamma^{+}(c,\gamma), \Gamma^{-}(c,\gamma)$ выпуклы.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству выпуклости множества $\Gamma(c,\gamma)$ в предыдущем примере.

Векторам $v, d \in R^n, d \neq 0$ поставим в соответствие множества



$$M_1 = \left\{ u = v + td \,\middle|\, t \in (-\infty, +\infty) \right\},$$

$$M_1^+ = \left\{ u = v + td \,\middle|\, t \in [0, +\infty) \right\}$$

которые будем называть, соответственно, прямой и лучом

проходящими через точку v в направлении вектора d.

Пример 4. Множества M_1, M_1^+ выпуклы. Действительно, для всех

$$\alpha \in [0,1] \text{ и } u_1 = v + t_1 d, u_2 = v + t_2 d, \quad t_1, t_2 \in R^1 \ \left(t_1, t_2 \geq 0 \right)$$

справедливо

$$w_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 = \alpha \left(v + t_1 d \right) + (1-\alpha)\left(v + t_2 d \right) =$$

v $\quad$ $t_\alpha \in (-\infty, +\infty)$

$$= \alpha v + (1-\alpha) v + \left[\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2 \right] d = v + t_\alpha d.$$

В силу $t_\alpha \in R^1$ $\left(t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq 0\right)$ отсюда следует требуемое включение

$$w_\alpha \in M_1 \quad \left(w_\alpha \in M_1^+\right).$$

Теорема 1. ***Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.***

Доказательство. Пусть $U_\beta,\ \beta \in B,$ выпуклые в R^n множества, где B – множество произвольной мощности, Покажем, что множество $U = \bigcap_{\beta \in B} U_\beta$ является выпуклым.

Пусть $v_1, v_2 \in U$. Тогда $v_1, v_2 \in U_\beta$ для всех $\beta \in B$. В силу того, что каждое из множеств $U_\beta,\ \beta \in B$ является выпуклым, имеет место включение

$$v_\lambda = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in U_\beta, \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \beta \in B.$$

$v_\lambda \in U_\beta$

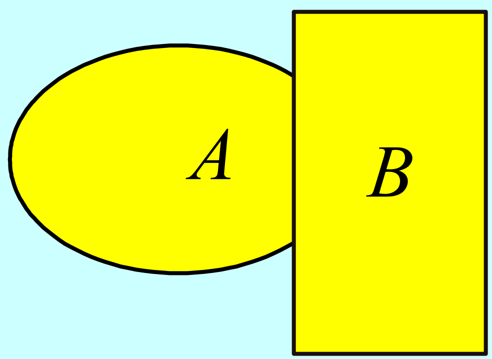
Отсюда $v_\lambda \in \bigcap_{\beta \in B} U_\beta = U$ и множество U является выпуклым.

Теорема доказана.

Из **теоремы 1**, в частности, следует, что множество

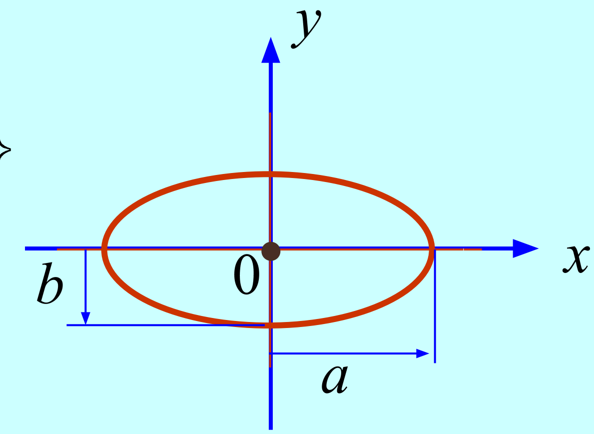
$$U = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, Au \le b;\ \overline{A}u = \overline{b};\ u^k \ge 0,\ k \in K \subset \{1, \ldots, n\} \right\} \quad (1)$$

являющееся областью допустимых значений оптимизирующих параметров в общей задаче линейного программирования, выпукло. Справедливость этого утверждения вытекает из того обстоятельства, что формула (1) определяет множество U как пересечение гиперплоскостей и полупространств в R^n. Заметим, что объединение выпуклых множеств не обязательно выпукло.



Упражнение 1. Доказать выпуклость эллипса

$$U=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\overset{=\frac{1}{a^2}}{a_1^2}\,x^2+\overset{=\frac{1}{b^2}}{b_1^2}\,y^2\le 1\right\}$$



Решение.

Пусть $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\in U,\quad \alpha\in[0,1].$ Надо доказать, что

$$\begin{pmatrix}x_\alpha\\ y_\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\\ \alpha y_1+(1-\alpha)y_2\end{pmatrix}\in U,$$

т. е., что

$$a_1^2\left[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right]^2+b_1^2\left[\alpha y_1+(1-\alpha)y_2\right]^2\le 1.$$

Справедливо неравенство

$$\left[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right]^2=\ \alpha^2x_1^2+\alpha(1-\alpha)\overset{\le x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}+(1-\alpha)^2x_2^2\le$$

$$\alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)\overset{\le x_1^2+x_2^2}{\boxed{2x_1x_2}} + (1-\alpha)^2 x_2^2 \le \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)\left[\alpha\left(x_1^2+x_2^2\right) + (1-\alpha)x_2^2\right] =$$

$$= \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)\left(\alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_2^2 - \alpha x_2^2\right) = \; = \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)\left(\alpha x_1^2 + x_2^2\right) =$$

$$= \alpha^2 x_1^2 + \alpha x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 x_1^2 - \alpha x_2^2 = \; \alpha x_1^2 - \alpha x_2^2 + x_2^2 = \; \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \Rightarrow$$

$$\left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right]^2 \le \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2$$

Аналогично

$$\left[\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2\right]^2 \le \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2.$$

Тогда

$$a_1^2 \overbrace{\left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right]^2}^{\le \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2} + b_1^2 \overbrace{\left[\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2\right]^2}^{\le \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2} \le$$

$$\le a_1^2\left[\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2\right] + b_1^2\left[\alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2\right] =$$

$$\le \alpha\overset{\le 1}{\left(a_1^2 x_1^2 + b_1^2 y_1^2\right)} + (1-\alpha)\overset{\le 1}{\left(a_1^2 x_2^2 + b_1^2 y_2^2\right)} \le \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Упражнение 2. Рассмотрим задачу математического программирования

$$I(u) \to \min, \quad u \in U \subset R^n,$$

$$g_1(u) \le 0, \ldots, g_m(u) \le 0, \qquad U - \text{ выпуклое множество.}$$

$$g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_s(u) = 0,$$

Пусть u_* – ее решение. Полагаем $B_* = \left\{ i \in \{1, \ldots, m\} \,\middle|\, g_i(u_*) = 0 \right\}$.

Доказать выпуклость множества

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ \{a^i, i \in B_* \\ a^{m+1} \\ \vdots \\ a^s \end{pmatrix} \in R^{1+k+s-m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists u \in U : \\ a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ a^i = \langle g_i'(u_*), u - u_* \rangle, \\ \quad i \in B_* \cup \{m+1, \ldots, s\} \end{array} \right\},$$

где $k \le m$ – число элементов в множестве B_*.

Рассмотреть случай $m = 2, s = 3.$

Тогда
$$I(u) \to \min, \quad u \in U \subset R^n,$$
$$g_1(u) \le 0,\ g_2(u) \le 0,\ g_3(u) = 0,$$
$U \subset R^n$ – выпуклое множество.

Пусть u_* – ее решение и $g_1(u_*) = 0,\ g_2(u_*) < 0,\ g_3(u_*) = 0.$

Тогда $B_* = \left\{ i \in \{1,2\} \middle| g_1(u_*) = 0 \right\} = \{1\}, \quad \{m+1, \ldots, s\} = \{3\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^3 \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists u \in U: \\ a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ a^1 = \langle g_1'(u_*), u - u_* \rangle, \\ a^3 = \langle g_3'(u_*), u - u_* \rangle \end{array} \right\},$$

Решение.

Пусть $a_j = \begin{pmatrix} a_j^0 \\ a_j^1 \\ a_j^3 \end{pmatrix} \in A,\ j = 1,2$ и $\alpha \in [0,1]$. Требуется показать, что точка

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} a_\alpha^0 \\ a_\alpha^1 \\ a_\alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_1^1 \\ a_1^3 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} a_2^0 \\ a_2^1 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 \\ \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 \\ \alpha a_1^3 + (1-\alpha) a_2^3 \end{pmatrix} \in A.$$

В силу определения множества A

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^3 \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; \begin{aligned} &\exists u \in U: \\ &a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ &a^1 = \langle g_1'(u_*), u - u_* \rangle, \\ &a^3 = \langle g_3'(u_*), u - u_* \rangle \end{aligned} \right\},$$

для этого требуется подобрать такое $u_\alpha \in U$, чтобы выполнялись равенства

$$a_\alpha^0 = \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 = \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (1)$$

$$a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (2)$$

$$a_\alpha^3 = \alpha a_3^1 + (1-\alpha) a_3^1 = \langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (3)$$

Из включений $a_1 = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_1^1 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \in A,\ a_2 = \begin{pmatrix} a_2^0 \\ a_2^1 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \in A$ следует существование точек

$u_j \in U,\ j = 1, 2$ таких, что

$$a_1^0 = \langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (4)$$

$$a_1^1 = \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (5)$$

$$a_1^3 = \langle g_3'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (6)$$

$$a_2^0 = \langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

$$a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

$$a_2^3 = \langle g_3'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

В силу выпуклости множества U справедливо включение

$$u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 \in U.$$

Эта точка является именно той, существование которой требуется для установления включения

$$a_\alpha = \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 \in A.$$

Действительно, докажем равенства (1)-(3))

$$a_\alpha^0 = \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 = \left\langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \right\rangle, \quad (1)$$

$$a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = \left\langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \right\rangle, \quad (2)$$

$$a_\alpha^3 = \alpha a_1^3 + (1-\alpha) a_2^3 = \left\langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_* \right\rangle. \quad (3)$$

Имеем

$$\left\langle I'(u_*), \overset{\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2}{u_\alpha} - u_* \right\rangle = \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \overset{\alpha u_* + (1-\alpha) u_*}{u_*} \right\rangle =$$

$$= \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \alpha u_* - (1-\alpha) u_* \right\rangle =$$

$$= \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 - \alpha u_* \right\rangle + \left\langle I'(u_*), (1-\alpha) u_2 - (1-\alpha) u_* \right\rangle =$$

$$= \langle I'(u_*), \alpha u_1 - \alpha u_* \rangle + \langle I'(u_*), (1-\alpha) u_2 - (1-\alpha) u_* \rangle =$$

$$= \alpha \overbrace{\langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle}^{a_1^0 = \langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle \ (4)} + (1-\alpha) \overbrace{\langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle}^{a_2^0 = \langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle \ (4)} =$$

$$= \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 = a_\alpha^0 \ \left(= \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle\right).$$

Равенство (1) $a_\alpha^0 = \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$ доказано.

Установим справедливость (2) $a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (2)$

Имеем

$$\left\langle g_1'(u_*), \overbrace{u_\alpha}^{\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2} - u_* \right\rangle = \left\langle g_1'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \overbrace{u_*}^{-\alpha u_* - (1-\alpha) u_*} \right\rangle =$$

$$= \langle g_1'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2 - \alpha u_* - (1-\alpha) u_* \rangle =$$

$$= \alpha \overbrace{\langle g_i'(u_*), u_1 - u_* \rangle}^{a_1^1 = \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle \ (5)} + (1-\alpha) \overbrace{\langle g_i'(u_*), u_2 - u_* \rangle}^{a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle \ (5)} =$$

$$a_1^1 = \langle g_1'(u_*), u_1 - u_*\rangle \quad (5) \qquad\qquad a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_2 - u_*\rangle \quad (5)$$

$$= \alpha \langle g_i'(u_*), u_1 - u_*\rangle + (1-\alpha)\langle g_i'(u_*), u_2 - u_*\rangle =$$

$$= \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = a_\alpha^1 \left(= \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_*\rangle \right) \Rightarrow$$

Равенство (2) $a_\alpha^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_*\rangle \quad (2)$ доказано. Аналогично устанавливается справедливость равенства (3). $a_\alpha^3 = \langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_*\rangle. \quad (3)$ Таким образом, множество A выпукло.