ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 5

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.5. Выпуклые оболочки (продолжение)

2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств.

2.5. Выпуклые оболочки (продолжение) Из доказанной **теоремы 12** (Каратеодори) вытекает важное следствие.

Теорема 13. ***Пусть множество*** $U \subset R^n$ ***компактно. Тогда и множество*** coU ***компактно.***

Доказательство. Из ограниченности множества U следует существование шара $\bar{O}(0,R) = \left\{ u \in R^n \middle| \|u\| \le R \right\}$, содержащего множество U.

Выпуклость шара влечет за собой вложение $coU \subset O(0,R)$, которое означает ограниченность множества coU.

Докажем его замкнутость. Пусть v – предельная точка множества coU. Надо доказать $v \in coU$. По определению предельной точки существует последовательность точек $\{u_k\}$, $u_k \in coU$ таких, что

$$\lim_{k\to\infty} u_k = v. \qquad (3)$$

По **теореме 12** для всех номеров $k = 1, 2 \ldots$ найдутся точки $u_{ik} \in U$ и числа $\alpha_{ik}, i = 1, \ldots n+1$ такие, что

$$\overset{\in coU}{u_k} = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}\overset{\in U}{u_{ik}}, \quad \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik} = 1, \quad \alpha_{ik} \ge 0,\ i = 1,\dots, n+1,\ k = 1,2,\dots\ . \qquad (4)$$

Подробно

$$\begin{array}{lllll}
u_1 = & u_2 = & \cdots & u_k = & \cdots \\
= \alpha_{11}u_{11} + & = \alpha_{12}u_{12} + & \cdots & = \alpha_{1k}u_{1k} + & \cdots \\
+\alpha_{21}u_{21} + & +\alpha_{22}u_{22} + & \cdots & +\alpha_{2k}u_{2k} + & \cdots \\
+\dots + & +\dots + & \cdots & +\dots + & \cdots \\
+\alpha_{n1}u_{n1} + & +\alpha_{n2}u_{n2} + & \cdots & +\alpha_{nk}u_{nk} + & \cdots \\
+\alpha_{n+11}u_{n+11}, & +\alpha_{n+12}u_{n+12} & \cdots & +\alpha_{n+1k}u_{n+1k} & \cdots \\
\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i1} = 1, & \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i2} = 1, & \cdots & \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik} = 1, & \cdots \\
\alpha_{i1} \ge 0, & \alpha_{i2} \ge 0, & \cdots & \alpha_{ik} \ge 0, & \cdots \\
i = 1,\dots, n+1, & i = 1,\dots, n+1, & \cdots & i = 1,\dots, n+1, & \cdots
\end{array}$$

Компактность множества U влечет за собой возможность выбора из последовательности

$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k}, \dots$ подпоследовательности $u_{1j_1^{(1)}}, u_{1j_2^{(1)}}, \dots, u_{1j_k^{(1)}}, \dots \to u_{10} \in U,$

из последовательности $u_{2j_1^{(1)}}, u_{2j_2^{(1)}}, \cdots, u_{2j_k^{(1)}}, \ldots$ подпоследовательности

$$u_{2j_1^{(2)}}, u_{2j_2^{(2)}}, \cdots, u_{2j_k^{(2)}}, \ldots \to u_{20} \in U,$$

и т. д., из последовательности $u_{n+1\,j_1^{(n)}}, u_{n+1\,j_2^{(n)}}, \cdots, u_{n+1\,j_k^{(n)}}, \ldots$ подпоследовательности

$$u_{n+1\,j_1^{(n+1)}}, u_{n+1\,j_2^{(n+1)}}, \cdots, u_{n+1\,j_k^{(n+1)}}, \ldots \to u_{n+10} \in U.$$

В пространстве R^{n+1} рассмотрим компактное множество

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, n+1 \right\}.$$

В силу (4), $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} = 1, \alpha_{ik} \ge 0, \quad k = 1, 2, \cdots \quad (4)$ имеют место включения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1\,j_1^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1\,j_1^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} \alpha_{1\,j_2^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1\,j_2^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_{1\,j_k^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1\,j_k^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \cdots$$

Тогда из последовательности
$$\begin{pmatrix}\alpha_{1 j_1^{(n+1)}}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_1^{(n+1)}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_{1 j_2^{(n+1)}}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_2^{(n+1)}}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha_{1 j_k^{(n+1)}}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_k^{(n+1)}}\end{pmatrix}, \dots \in A$$

выделим сходящуюся подпоследовательность
$$\begin{pmatrix}\alpha_{1 j_1^*}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_1^*}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_{1 j_2^*}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_2^*}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha_{1 j_k^*}\\ \vdots \\ \alpha_{n+1\, j_k^*}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha_{10}\\ \vdots \\ \alpha_{n+10}\end{pmatrix} \in A \Rightarrow \begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i0} = 1\\ \alpha_{i0} \geq 0,\\ i = 1, \dots, n+1.\end{array}$$

Перенумеруем индексы
$$j_1^* = 1,\ j_2^* = 2, \dots, j_k^* = k, \dots$$

Тогда
$$\begin{array}{l} u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k}, \dots \to u_{10} \in U,\\ u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k}, \dots \to u_{20} \in U,\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ u_{n+1\,1}, u_{n+1\,2}, \dots, u_{n+1\,k}, \dots \to u_{n+10} \in U, \end{array} \qquad (5)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots\\ \alpha_{n+11}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \vdots\\ \alpha_{n+12}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \vdots\\ \alpha_{n+1k}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_{10}\\ \vdots\\ \alpha_{n+10}\end{pmatrix}\in A\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l}\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1k},\ldots\to\alpha_{10},\\ \alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2k},\ldots\to\alpha_{20},\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ \alpha_{n+11},\alpha_{n+12},\ldots,\alpha_{n+1k},\ldots\to\alpha_{n+10},\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i0}=1$$

$$\alpha_{i0}\geq 0,$$

$$i=1,\ldots,n+1. \qquad (6)$$

Вычислим предел в (3) $v=\lim\limits_{k\to\infty}u_k \quad (3).$ Надо доказать, что $v\in coU$

Действительно, в силу (5) $\lim\limits_{k\to\infty}u_{ik}=u_{i0} \quad (5)$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{ik}=\alpha_{i0} \quad (6)$ имеем

$$v=\lim_{k\to\infty}\overbrace{u_k}^{\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}u_{ik}}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ik}u_{ik}=\sum_{i=1}^{n+1}\overbrace{\left(\lim_{k\to\infty}\alpha_{ik}\right)}^{\alpha_{i0}\ (6)}\cdot\overbrace{\left(\lim_{k\to\infty}u_{ik}\right)}^{u_{i0}}=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i0}\overbrace{u_{i0}}^{\in U}\overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$v\in coU.$ Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать **Теорему 13** ***«Пусть множество $U \subset R^n$ компактно. Тогда и множество coU компактно.»*** (в части замкнутости) при $n = 1$.

Решение. Пусть v – предельная точка множества coU, и для последовательности точек $\{u_k\}$ выполнено $u_k \in coU$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = v$. Требуется доказать, что $v \in coU$. По **теореме 11** для всех номеров $k = 1,2\ldots$ найдутся точки $u_{1k}, u_{2k} \in U$ и числа α_{1k}, α_{2k} такие, что

$$u_k = \alpha_{1k}u_{1k} + \alpha_{2k}u_{2k}, \quad \alpha_{1k} + \alpha_{2k} = 1, \quad \alpha_{1k} \ge 0, \alpha_{2k} \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Распишем равенство (7) подробно

$$\begin{array}{lllll}
u_1 = & u_2 = & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & u_k = & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
= \alpha_{11}u_{11} + & = \alpha_{12}u_{12} + & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & = \alpha_{1k}u_{1k} + & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
+\alpha_{21}u_{21}, & +\alpha_{22}u_{22}, & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & +\alpha_{2k}u_{2k}, & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{array}$$

Компактность множества U влечет за собой возможность выбора из последовательности $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k}, \ldots$ подпоследовательности $u_{1j_1^{(1)}}, u_{1j_2^{(1)}}, \ldots, u_{1j_k^{(1)}}, \ldots \to u_{10} \in U,$

из последовательности $u_{2j_1^{(1)}}, u_{2j_2^{(1)}}, \ldots, u_{2j_k^{(1)}}, \ldots$ подпоследовательности

$$u_{2j_1^{(2)}}, u_{2j_2^{(2)}}, \ldots, u_{2j_k^{(2)}}, \ldots \to u_{20} \in U,$$

Множество A здесь имеет вид

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \ \alpha_i \geq 0, i = 1, 2 \right\}.$$

В силу (7)

$$u_k = \alpha_{1k} u_{1k} + \alpha_{2k} u_{2k}, \quad \alpha_{1k} + \alpha_{2k} = 1, \quad \alpha_{1k} \geq 0, \alpha_{2k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \quad (7)$$

имеют место включения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(2)}} \\ \alpha_{2j_1^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(2)}} \\ \alpha_{2j_2^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(2)}} \\ \alpha_{2j_k^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \ldots$$

Тогда из последовательности

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(2)}} \\ \alpha_{2j_1^{(2)}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(2)}} \\ \alpha_{2j_2^{(2)}} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(2)}} \\ \alpha_{2j_k^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \ldots$$

выделим сходящуюся подпоследовательность

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1j_1^*}\\ \alpha_{2j_1^*}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{1j_2^*}\\ \alpha_{2j_2^*}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_{1j_k^*}\\ \alpha_{2j_k^*}\end{pmatrix}\in A,\ldots\to\begin{pmatrix}\alpha_{10}\\ \alpha_{20}\end{pmatrix}\in A\Rightarrow\begin{matrix}\alpha_{10}+\alpha_{20}=1,\\ \alpha_{10}\geq 0,\alpha_{20}\geq 0.\end{matrix}$$

Перенумеруем индексы $j_1^*=1,\ j_2^*=2,\ldots,j_k^*=k,\ldots$ Тогда

$$u_{11},u_{12},\ldots,u_{1k},\ldots\to u_{10}\in U,$$

$$u_{21},u_{22},\ldots,u_{2k},\ldots\to u_{20}\in U,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_{13}\\ \alpha_{23}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_{10}\\ \alpha_{20}\end{pmatrix}\in A\to\begin{matrix}\alpha_{10}+\alpha_{20}=1\\ \alpha_{10}\geq 0,\alpha_{20}\geq 0.\end{matrix}$$

Вычислим предел в $v=\lim\limits_{k\to\infty}u_j$ Надо доказать, что $v\in coU.$ Действительно,

в силу $\lim\limits_{k\to\infty}u_{1k}=u_{10},\quad \lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=u_{20}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{ik}=\alpha_{i0}$ имеем

$$v = \lim_{k\to\infty} \overset{\alpha_{1k}u_{1k}+\alpha_{2k}u_{2k}}{u_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\alpha_{1k}u_{1k} + \alpha_{2k}u_{2k}\right) =$$

$$= \left(\overset{a_{10}}{\lim_{k\to\infty}\alpha_{1k}}\right)\cdot\left(\overset{u_{10}}{\lim_{k\to\infty}u_{1k}}\right) + \left(\overset{a_{20}}{\lim_{k\to\infty}\alpha_{2k}}\right)\cdot\left(\overset{u_{20}}{\lim_{k\to\infty}u_{2k}}\right) =$$

$$= a_{10}\overset{\in U}{u_{10}} + a_{20}\overset{\in U}{u_{20}} \overset{\substack{a_{10}\ge 0, a_{20}\ge 0,\\ a_{10}+a_{20}=1}}{\in} coU.$$

Теорема доказана.

2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств.

Теорема 14. ***Замыкание и внутренность выпуклых множеств выпуклы.***

Доказательство. Пусть множество $U \subset R^n$ выпукло и $v_1, v_2 \in \operatorname{int} U$.

По определению внутренних точек существует число $\varepsilon > 0$, что выполнены вложения

$$\overbrace{O(v_i, \varepsilon)}^{\{v_i\} + \varepsilon \cdot O(0,1)} \subset U,\ i = 1,2 \Rightarrow \{v_i\} + \varepsilon \cdot O(0,1) \subset U, \quad i = 1,2.$$

Тогда из выпуклости множества U для любого $\alpha \in [0,1]$ выводим

$$\alpha \Big[\overbrace{\{v_1\} + \varepsilon\, O(0,1)}^{\subset U} \Big] + (1-\alpha)\Big[\overbrace{\{v_2\} + \varepsilon\, O(0,1)}^{\subset U} \Big] \subset U \Rightarrow$$

$$\overbrace{\alpha \{v_1\} + (1-\alpha)\{v_2\}}^{\{\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2\}} + \overbrace{\varepsilon\, O(0,1) + (1-\alpha)\varepsilon\, O(0,1)}^{\text{Теорема } 7:\ (\alpha+\beta)\cdot U = \alpha U + \beta U,\ U - \text{выпукло}} \subset U \Rightarrow$$

$$\{\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2\} + \varepsilon(\alpha + 1 - \alpha) O(0,1) \subset U \Rightarrow$$

$$\overbrace{\{\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2\} + O(0, \varepsilon)}^{O(\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, \varepsilon)} \subset U \Rightarrow$$

$$O(\alpha v_1 + (1-\alpha) v_2, \varepsilon) \subset U \Rightarrow \alpha v_1 + (1-\alpha) v_2 \in \operatorname{int} U$$

Таким образом, произвольная выпуклая комбинация точек $v_1, v_2 \in \operatorname{int} U$ принадлежит этому множеству, что и доказывает его выпуклость.

Рассмотрим множество $\bar{U}$ – замыкание множества U. Если $v_1, v_2 \in \bar{U}$, то по определению предельных точек существуют последовательности точек

$$\{u_{1k}\} \to v_1,\ u_{1k} \in U, \qquad \{u_{2k}\} \to v_2,\ u_{2k} \in U,$$

В силу выпуклости множества U для всех номеров $k = 1,2,\ldots$ и чисел $\alpha \in [0,1]$ выполнено включение

$$\alpha \overbrace{u_{1k}}^{\in U} + (1-\alpha)\overbrace{u_{2k}}^{\in U} \in U.$$

С другой стороны

$$\lim_{k\to\infty}\left[\alpha u_{1k} + (1-\alpha)u_{2k}\right] = \alpha \overbrace{\lim_{k\to\infty} u_{1k}}^{v_1} + (1-\alpha)\overbrace{\lim_{k\to\infty} u_{2k}}^{v_2} = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \Rightarrow$$

$$\{\alpha u_{1k} + (1-\alpha)u_{2k}\} \to \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$$

Тогда $\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$ – предельная точка множества $U \Rightarrow \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in \bar{U}$.

Теорема доказана.