ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 9

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.8. Выпуклые конусы.

2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность.

2.10. Многокритериальная оптимизация.

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.8. Выпуклые конусы. Выпуклый конус – один из основных объектов изучения теории экстремальных задач.

Определение 13. ***Множество*** $K \subset R^n$ ***называется конусом, если из*** $u \in K$ ***и*** $\lambda \geq 0$ ***следует, что*** $\lambda u \in K.$

Если множество K выпукло, то конус называется выпуклым, если замкнуто – замкнутым, если открыто – открытым.

Пример 10. Множества

$$K_1 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \langle a, u \rangle = 0 \right\}, \quad K_2 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \langle a, u \rangle \leq 0 \right\},$$

$$K_3 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \langle a, u \rangle < 0 \right\}, \quad K_4 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, u \geq 0 \right\}$$

являются выпуклыми конусами, при этом множества K_1, K_2, K_4 замкнутые, а множество K_3 - открытое.

Здесь и далее запись $u \geq (\leq, >, <) 0$ означает, что каждая координата вектора $u\,(\leq, >, <)\,0.$

Пример 11. Угол на плоскости раствора, меньшего чем π является выпуклым конусом.

Упражнение 1. Доказать, что пересечение выпуклых конусов является выпуклым конусом.

Решение.

Ранее было установлено, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Докажем, что пересечение конусов—конус.

Пусть $K \subset R^n$ и $L \subset R^n$ конусы. Полагаем $M = K \cap L$. Требуется доказать, что M – конус. Пусть $u \in M$ и $\lambda > 0$. Имеем

$$u \in K, u \in L \quad \Rightarrow \lambda u \in K, \lambda u \in L \quad \Rightarrow \lambda u \in K \cap L = M$$

Утверждение доказано.

В частности, пересечение множеств типа $K_2 = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \left\langle a, u \right\rangle \le 0 \right\}$, называют многогранным углом.

Приведем некоторые свойства выпуклых конусов.

Теорема 19. ***Пусть*** $K \subset R^n$ ***выпуклый конус.*** ***Если*** $u_1, \ldots, u_m \in K$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$, ***то*** $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in K$.

Доказательство. Положим $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ и будем считать, что $\lambda \neq 0$. Очевидно, что

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{\frac{\lambda_i}{\lambda}}{\beta_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}^{=\lambda}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

Тогда в силу выпуклости множества K справедливо включение $\sum_{i=1}^{m} \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)}^{\beta_i} u_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \in K$. С другой стороны по определению конуса имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = \overset{>0}{\lambda} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)}^{\beta_i} u_i \right] = \overset{>0}{\lambda} \cdot \overbrace{\left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i \right]}^{\in K} \in K.$$

Теорема доказана.

Приведем важный пример конуса.

Упражнение 1. Пусть $U \subset R^n$. Доказать, что множество

$$conU = \{u = \alpha v \mid v \in U,\ \alpha > 0\}$$

(конусная оболочка) является конусом.

Решение.

Пусть $u \in conU$. Тогда $u = \alpha v$, где $\alpha > 0, v \in U$. Для всех $\lambda > 0$ имеем

$$\lambda u = \overset{>0}{(\alpha\lambda)}\overset{\in U}{v} \in conU.$$

Таким образом, $conU$ - конус.

Теорема 20. ***Если множество*** $U \subset R^n$ ***выпукло, то*** $conU$ - ***выпуклый конус, причем если*** $v \in \operatorname{int} U,\ \alpha > 0,$ ***то*** $u = \alpha v \in \operatorname{int}(conU)$.

Доказательство. Возьмем произвольные точки $u_1, u_2 \in conU$. Тогда

$$u_1 = \alpha_1 v_1, u_2 = \alpha_2 v_2,\ \ v_1, v_2 \in U,\ \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Покажем, что для любых $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполнено включение

$$\lambda_1 \overset{\alpha_1 v_1}{u_1} + \lambda_2 \overset{\alpha_2 v_2}{u_2} = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 \in conU.$$

Из условия $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ следует $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 > 0.$

Тогда

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=\alpha_1\lambda_1 v_1+\alpha_2\lambda_2 v_2=\overbrace{\left(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2\right)}^{>0}\cdot\left[\overbrace{\frac{\alpha_1\lambda_1}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}}^{\ge 0}\overset{\in U}{v_1}+\overbrace{\frac{\alpha_2\lambda_2}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}}^{\ge 0}\overset{\in U}{v_2}\right].$$

Из выпуклости U и равенства $\frac{\alpha_1\lambda_1}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}=1$ выводим

$$\frac{\alpha_1\lambda_1}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}v_1+\frac{\alpha_2\lambda_2}{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}v_2\in U\Rightarrow\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2\in\overbrace{\left(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2\right)}^{>0}\cdot U\subset conU.$$

Выпуклость множества $conU$ доказана.

Далее пусть $u=\alpha v,\ \ \alpha>0,\ v\in\operatorname{int}U$. Для малых $\varepsilon>0$ имеем

$$\left\{\overset{\alpha v}{u}\right\}+O(0,\alpha\varepsilon)=\{\alpha v\}+O(0,\alpha\varepsilon)=\alpha\cdot\overbrace{\left(\left\{\overset{\in\operatorname{int}U}{v}\right\}+O(0,\varepsilon)\right)}^{\subset U}\subset\overset{>0}{\alpha}\,U=$$

$$=\left\{u=\overset{>0}{\alpha}w\,\middle|\,w\in U\right\}\subset\left\{u=\beta w\in R^n\,\middle|\,\beta>0,w\in U\right\}=conU\Rightarrow$$

$$u\in\operatorname{int}\left(conU\right).$$

Теорема доказана.

2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность. Используя понятие выпуклого конуса в пространстве R^n можно ввести частичный порядок его элементов, т.е. ввести отношение «больше».

Определение 14. ***Пусть*** $K \subset R^n$ ***– выпуклый конус. Будем говорить, что*** $u \in R^n$ ***не меньше (строго больше)*** $v \in R^n$, ***если*** $u - v \in K$ $\left(u - v \in \operatorname{int} K\right)$. ***В этом случае будем писать*** $u \overset{K}{\geq} v \left(u \overset{K}{>} v \right)$.

Когда ясно, о каком конусе идет речь, писать будем просто $"\geq", \ ">"$.

Принимаем также, что отношение $u \geq v \quad \left(u > v\right)$ эквивалентно отношению $v \leq u \quad \left(v < u\right)$. Заметим, что если $u \in K \quad \left(u \in \operatorname{int} K\right)$, то $u \overset{K}{\geq} 0 \quad \left(u \overset{K}{>} 0 \right)$.

Перечислим и докажем ряд свойств введенного отношения, присущие обычным неравенствам.

Теоремы 18. ***Пусть*** $K \subset R^n$ ***выпуклый конус. Если*** $u_1, \ldots, u_m \in K$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$, ***то*** $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in K$.

1. Из $u \ge v$ следует, что $\alpha u \ge \alpha v$ при $\alpha \ge 0.$

Неравенство $u \ge v$ означает, что $u - v \in K \Rightarrow \alpha \overset{\in K}{(u - v)} = \alpha u - \alpha v \in K \Rightarrow$ $\alpha u \ge \alpha v.$

2. Если $u_1 \ge v_1$ и $u_2 \ge v_2$, то $u_1 + u_2 \ge v_1 + v_2.$

Справедливы включения $u_1 - v_1 \in K, u_2 - v_2 \in K.$ В силу **теоремы 18** имеем

$$\overset{\in K}{(u_1 - v_1)} + \overset{\in K}{(u_2 - v_2)} \in K \Rightarrow u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) \in K \Rightarrow$$

$$u_1 + u_2 \ge v_1 + v_2.$$

3. Если $u \ge v, v \ge w,$ то $u \ge w.$

Из включений $(u - v), (v - w) \in K$ в силу **теоремы 18** выводим

$$\overset{\in K}{(u - v)} + \overset{\in K}{(v - w)} \in K \Rightarrow (u - v) + (v - w) = u - w \in K \Rightarrow u \ge w.$$

В случае, когда конус K замкнутый, справедливо еще одно свойство

4. Если $\{u_k\} \to u_0, \{v_k\} \to v_0, u_k \ge v_k, k = 1, 2, \ldots$, то $u_0 \ge v_0.$

Для всех номеров $k = 1,2,\ldots$ справедливо включение $\overset{\to u_0}{u_k} - \overset{\to v_0}{v_k} \in K.$ Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$ в силу замкнутости конуса K получим $u_0 - v_0 \in K \Rightarrow$ $u_0 \geq v_0$.

Упражнение. Какую упорядоченность вводит конус

$$K = \{u \in R^1 \,|\, u \geq 0\}$$

в пространстве R^1 – множестве действительных чисел, а конус

$$K_n = \{u = (u^1, \ldots, u^n) \in R^n \,|\, u^i \geq 0, i = 1, \ldots, n\} -$$

в пространстве R^n – множестве n – мерных векторов.

Решение. Конус $K = \{u \in R^1 \,|\, u \geq 0\}$ вводит естественную упорядоченность на множестве действительных чисел.

Конус $K_n = \{u = (u^1, \ldots, u^n) \in R^n \,|\, u^i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ частично упорядочивает n – мерные вектора по признаку: вектор u больше либо равен вектора v, если каждая координата вектора u больше либо равна соответствующей координаты вектора v.

2.10. Многокритериальная оптимизация. Пусть $F_i : \Sigma \to R^1, i = 1,\ldots,n$ набор из n функций, определенных на множестве Σ произвольной природы. Задача состоит в том, чтобы выбором элемента $\sigma \in \Sigma$ минимизировать каждую из этих функций. Такую задачу обычно называют задачей оптимизации с векторным критерием. В общем случае эта задача, очевидно, решения не имеет. Однако можно искать оптимум в смысле частичной упорядоченности значений векторного критерия, задаваемой некоторым выпуклым конусом.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации $F_i(u) \to \min, u \in U \subset R^n, i = 1,\ldots,r,$ где U -компактное множество, а $F_i \in C(U)$. В пространстве R^r - значений критериев введем частичную упорядоченность. Будем говорить, что точка

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ \ldots \\ F_i^{(1)} \\ \ldots \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix} \text{ меньше точки } F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ \ldots \\ F_i^{(2)} \\ \ldots \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix}, \text{ если } F_j^{(1)} \le F_j^{(2)}$$

для всех $j \in \{1,\ldots,r\}$ и существует номер $i \in \{1,\ldots,r\}$, что $F_i^{(1)} < F_i^{(2)}$.

Упражнение 1. Построить выпуклый конус K_F, который будет определять введенную частичную упорядоченность.

Решение. $$K_F = \left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} \in R^r \;\middle|\; F_i \ge 0,\ \forall\, i \in \{1,\ldots,r\},\ \ \exists\, j \in \{1,\ldots,r\} : F_j > 0 \right\}.$$

Докажем, что конус K_F выпуклый. Пусть

$$F^{(1)}, F^{(2)} \in K_F, \quad F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \ge 0 \\ \vdots \\ F_i^{(1)} > 0 \\ \vdots \\ F_j^{(1)} \ge 0 \\ \vdots \\ F_r^{(1)} \ge 0 \end{pmatrix}, \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \ge 0 \\ \vdots \\ F_i^{(2)} \ge 0 \\ \vdots \\ F_j^{(2)} > 0 \\ \vdots \\ F_r^{(2)} \ge 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

Тогда

$$\lambda F^{(1)} + (1-\lambda)F^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda F_1^{(1)} + (1-\lambda)F_1^{(2)} \geq 0 \\ \ldots \\ \underbrace{\lambda F_i^{(1)} + (1-\lambda)F_i^{(2)} > 0}_{>0,\ \lambda \neq 0} \\ \ldots \\ \overbrace{\lambda F_j^{(1)} + (1-\lambda)F_j^{(2)} >}^{>0,\ \lambda \neq 1} \\ \ldots \\ \lambda F_r^{(1)} + (1-\lambda)F_r^{(2)} \geq 0 \end{pmatrix} \in K_F$$

Определение 15. ***Точка*** u_*, ***оптимальная в смысле конуса*** K_F ***называется оптимальной по Парето, т. е. не существует такой точки*** $u \in U$, ***для которой выполнялось бы*** $F_i(u) \leq F_i(u_*)\ \forall i = 1,\ldots k$ ***и*** $\exists j \in \{1,\ldots k\} : F_j(u) < F_j(u_*)$.

Множество оптимальных по Парето точек обычно содержит более одной точки.

Полагаем

$$F(u,\lambda_1,\ldots \lambda_r) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i F_i(u), \quad u \in U, \lambda_i > 0, i = 1,\ldots ,r.$$

Теорема 21. ***Пусть точка*** $u_* \in U$ ***такова, что***

$$F(u_*) = \min_{u \in U} F(u, \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \quad \lambda_i > 0, i = 1, \ldots, r. \qquad (1)$$

Тогда точка u_* - ***оптимальна по Парето.***

Доказательство. От противного приходим к существованию точки $u_{**} \in U$ для которой

$$F_i(u_{**}) \le F_i(u_*), \quad \forall i = 1, \ldots, r,$$

$$\exists j \in \{1, \ldots, r\} : F_j(u_{**}) < F_j(u_*).$$

Тогда

$$F(u_{**}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \overset{>0}{\lambda_1} \overset{\le F_1(u_*)}{F_1(u_{**})} + \ldots + \overbrace{\overset{>0}{\lambda_j} F_j(u_{**})}^{< F_j(u_*)} + \ldots + \overset{>0}{\lambda_r} \overset{F_r(u_*) \le}{F_r(u_{**})} <$$

$$< \lambda_1 F_1(u_*) + \ldots + \lambda_j F_j(u_*) + \ldots + \lambda_{1r} F_r(u_*) = F(u_*, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \Rightarrow$$

$$F(u_{**}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) < F(u_*, \lambda_1, \ldots, \lambda_r).$$

Последнее неравенство противоречит (1). Теорема доказана.

Упражнение 2. Найти все точки Парето в задачи векторной оптимизации

$$F_1(u) = (u - 1)^2 \to \min, \qquad u \in U = [0,3]$$
$$F_2(u) = (u - 3)^2 \to \min,$$

Решение. Полагаем

$$F(u,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_1(u - 1)^2 + \lambda_2(u - 3)^2 \to \min, \quad u \in R^1, \quad \lambda_1,\lambda_2 > 0$$

$$F'(u) = 2\lambda_1(u - 1) + 2\lambda_2(u - 3) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)u - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$u_* = \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Покажем, что $u_* \in (0,3)$. Неравенство $u_* > 0$ очевидно. Проверим неравенство $u_* < 3$. Имеем

$$\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} < 3 \Rightarrow \overset{>0}{\lambda_1} + 3\lambda_2 < 3\overset{>0}{\lambda_1} + 3\lambda_2 \Rightarrow 1 < 3$$

Таким образом, точка u_* является внутренней точкой множества U. При этом

$F''(u) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 > 0.$ Тогда u_* - точка минимума функции F и она

оптимальна по Парето. Построим область вех таких точек.

$$u_* = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+3}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+1} = \frac{t+3}{t+1} = 1 + \frac{2}{t+1}, \quad \lambda_1,\lambda_2 \in (0,+\infty) \Rightarrow \ t \in (0,+\infty) \Rightarrow$$

$$u_* \in (1,3) \Rightarrow \quad U_* = [1,3].$$