

ЗЛП и Word

Доцент каф. ВМ и М, к.т.н. Каменских А.
А.

Задачи линейного программирования (оптимизация)

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача отыскания экстремума (максимума или минимума) линейной функции от нескольких переменных при линейных ограничениях на эти переменные.

Найти максимальное значение целевой функции

$$F(x_1; x_2) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

при следующих ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 127, \\ 7x_1 - x_2 \leq 83, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{– система ограничений}$$

x_1, x_2 – параметры оптимизации

Рассмотрим следующую задачу.

Фирма изготавливает два вида красок для наружных (A) и внутренних (B) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в следующей таблице.

Исходный продукт	Затраты ресурса на ед. Товара, Р		Суточный запас, т
	Краска А	Краска В	
Пигмент	1	2	6
Олифа	2	3	12
Прибыль, ден.ед., с _i	2	3	

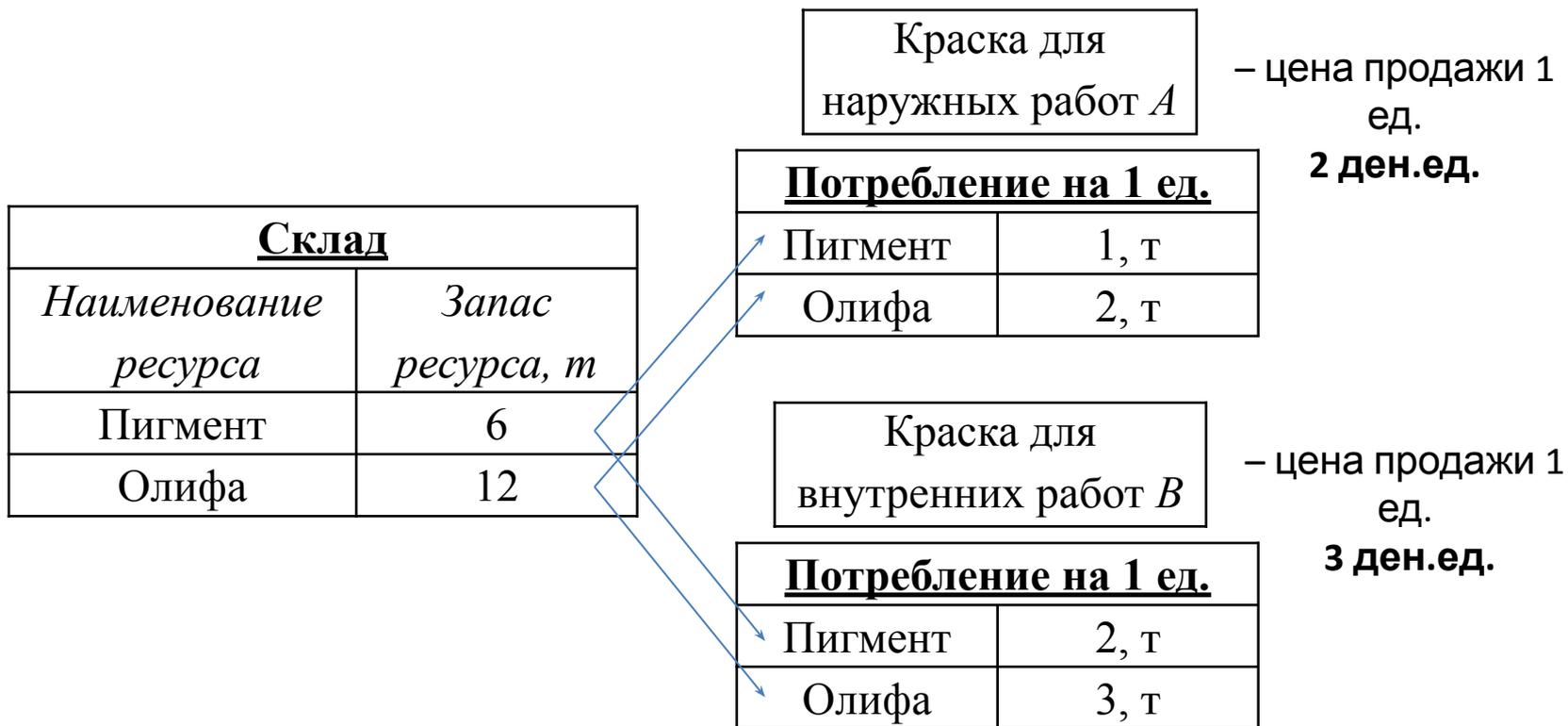
Изучение рынка сбыта показало, что спрос на краску для внутренних A работ никогда не превышает 4т. в сутки. Цена продажи 1т. краски для наружных A работ – 2 ден.ед., для внутренних B работ – 3 ден.ед. Определить какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Итак, цель задачи – получение максимальной прибыли.

В качестве параметров, характеризующих процесс планирования производства выберем x_1 – количество краски A и x_2 – количество краски B (тон).

Построение математических моделей ЗЛП

Задача планирования производства продукции



**Неизвестны
е
параметры
оптимизаци
и**

x_1 – количество краски *A*, ед.
 x_2 – количество краски *B*, ед.

Математическая модель

Суммарная прибыль фирмы от продажи краски:

$$F(\bar{X}) = F(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad \text{– целевая функция}$$

Ограничения будут двух сортов. Первый – это не превышение расхода исходных продуктов для изготовления краски их суточных запасов. Второй – это не превышение продажи краски для наружных работ А ее суточного спроса.

Кроме указанных ограничений должно в обязательном порядке (и это определяется постановкой самой экономической задачи) должно выполняться условие неотрицательности производства краски. Итак, получаем полную систему ограничений для нашей задачи:

Система ограничений

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 \leq 6, & \text{– ограничение по запасам} \\ & \text{Пигмента} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & \text{– ограничение по запасам} \\ & \text{Олифы} \\ x_1 \leq 4, & \text{– ограничение по производству краски} \\ & \text{А} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & \text{– нельзя производить отрицательное кол-во} \\ & \text{краски} \end{array} \right.$$

Задача о составлении оптимального

<u>рациона</u> <u>Требуется в сутки</u>	
<i>Наименование</i>	<i>Не менее чем</i>
Кормовые ед.	16,1 кг.
Перевариваемый протеин	1816 г.

Содержание питательных веществ в 1 кг корма и себестоимость кормов

<u>Показатель</u>	Комбикорм	Сено	Силос
Кормовые единицы, кг	1	0,5	0,2
Переваримый протеин, г	160	60	30
Себестоимость 1 кг корма, руб.	4,2	0,9	0,6

Согласно физиологическим особенностям животных в рационе должно содержаться не менее 31% комбикормов и не более 26% сена от общей потребности в кормовых единицах.

Математическая модель

Целевая функция – общая стоимость суточного рациона кормления:

$$F(\bar{X}) = 4,2x_1 + 0,9x_2 + 0,6x_3 \rightarrow \min$$

Составим систему

ограничений:

1) условие по содержанию кормовых единиц в рационе:

$$x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 \geq 16,1$$

2) условие по содержанию перевариваемого протеина в рационе:

$$160x_1 + 60x_2 + 30x_3 \geq 1819$$

3) условие по содержанию комбикорма в рационе (не менее 31%) :

$$x_1 \geq 4,991$$

4) условие по содержанию сена в рационе (не более 26%)

$$0,5x_2 \leq 4,186$$

5) условие неотрицательности количества корма каждого вида:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Пример решения в MS EXCEL

Постановка задачи

Используемое сырьё	Расход сырья на изготовление одного изделия		Кол-во сырья в распоряжении фабрики
	1 типа	2 типа	
Доски, м	2	4	440
Обивочная ткань, м	0,5	0,25	65
Рабочее время, чел./час	2	2,5	320
Стоимость, руб.	80	120	max

x_1 – число изготовленных стульев

x_2 – число изготовленных кресел

$F(\bar{X}) = 80x_1 + 120x_2 \rightarrow \max$ – целевая функция
прибыли

Система

ограничений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 440, \\ 0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 65, \\ 2x_1 + 2,5x_2 \leq 320, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 440, \\ 0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 65, \\ 2x_1 + 2,5x_2 \leq 320, \\ -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0. \end{array} \right.$$

Пример решения задачи в MS EXCEL

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Используемое сырьё	Расход сырья		Кол-во сырья		
3		1 типа	2 типа			Ограничения
4	Доски, м	2	4	440		0
5	Обивочная ткань, м	0,5	0,25	65		0
6	Рабочее время, чел./час	2	2,5	320		0
7	Стоимость, руб.	80	120	max		
8						
9		x1	x2		Целевая	
10	Изменяемые ячейки	0	0		0	

СУММПРОИЗВ(B4:C4; \$B\$10:\$C\$10)

СУММПРОИЗВ(B7:C7; B10:C10)

Использование Надстройки «Поиск решения»

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Выполнить

Закреть

Параметры

Добавить

Изменить

Удалить

Восстановить

Справка

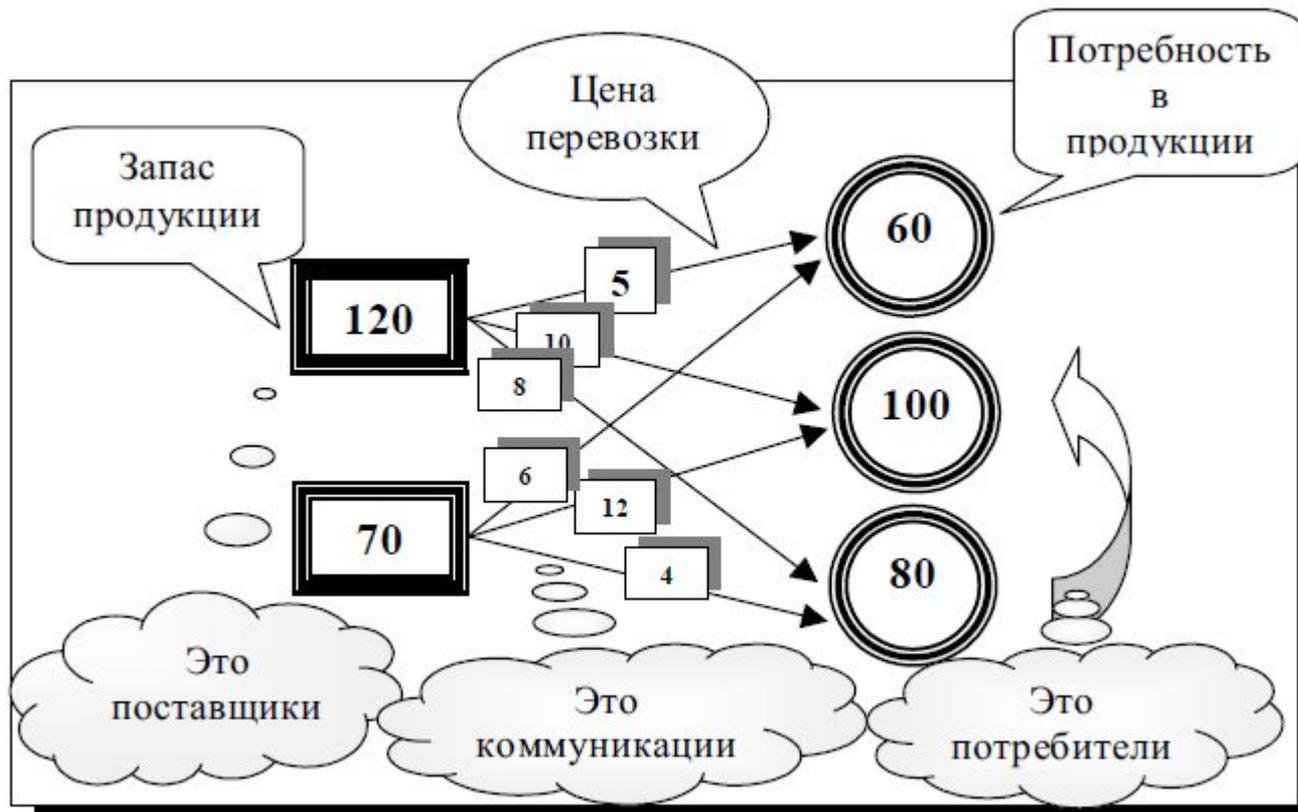
Результаты решения в MS EXCEL

The screenshot shows the MS Excel interface with the 'Данные' (Data) ribbon selected. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Используемое сырьё	Расход сырья		Кол-во сырья		
3		1 типа	2 типа			Ограничения
4	Доски, м	2	4	440		440
5	Обивочная ткань, м	0,5	0,25	65		50
6	Рабочее время, чел./час	2	2,5	320		320
7	Стоимость, руб.	80	120	max		
8						
9		x1	x2		Целевая	
10	Изменяемые ячейки	60	80		14400	
11						

Транспортная задача

Транспортная задача — математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов от поставщика к потребителю с минимизацией затрат на перемещение.



Цель – минимизация суммарных расходов на все перевозки

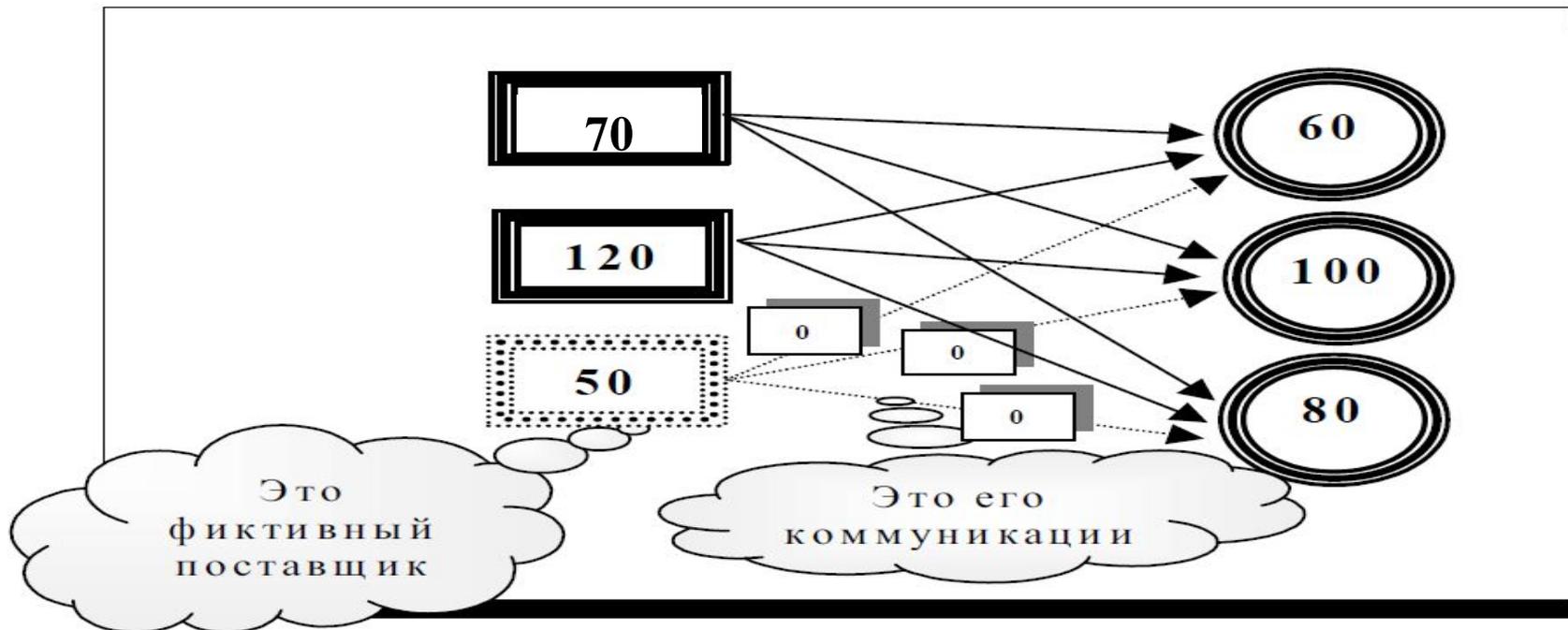
Транспортная задача открытого типа

Транспортная задача называется открытой, если не соблюдается баланс между объемом спроса и объемом предложения. Например, если запасы на всех складах меньше или больше потребностей всех магазинов - потребителей, то имеем дело с открытой транспортной моделью.

Чтобы привести открытую транспортную задачу к закрытому (замкнутому) виду, добавляем столбец (строку) с нулевыми стоимостями.

Если превышают запасы - добавляем фиктивного потребителя (столбец)

Если превышает спрос - добавляем фиктивного поставщика (строку)



Математическая модель

x_{ij} – количество перевозимой продукции от поставщика номер i к потребителю номер j

$$\bar{X} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})$$

Целевая функция – общая стоимость всех перевозок:

$$F(\bar{X}) = 5x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33} \rightarrow \min$$

Общий вид целевой функции

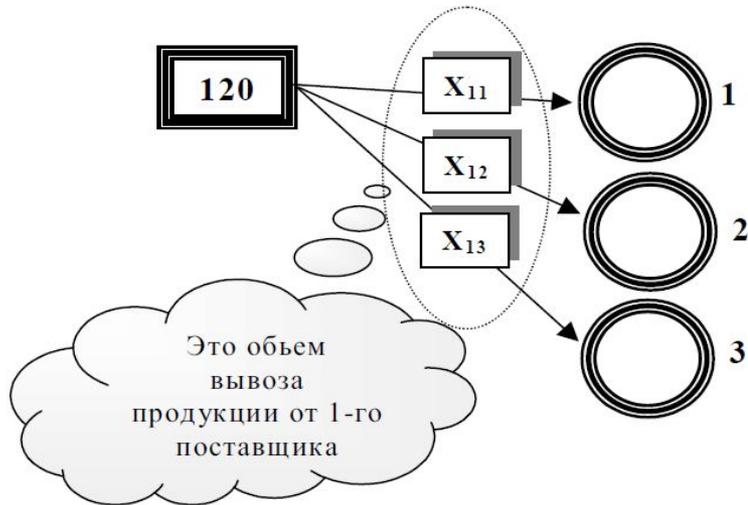
$$F(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

c_{ij} – элементы матрица стоимостей перевозок

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Система ограничений

**ВЫВОЗ ПРОДУКЦИИ ОТ
ПОСТАВЩИКА = ЗАПАСУ**



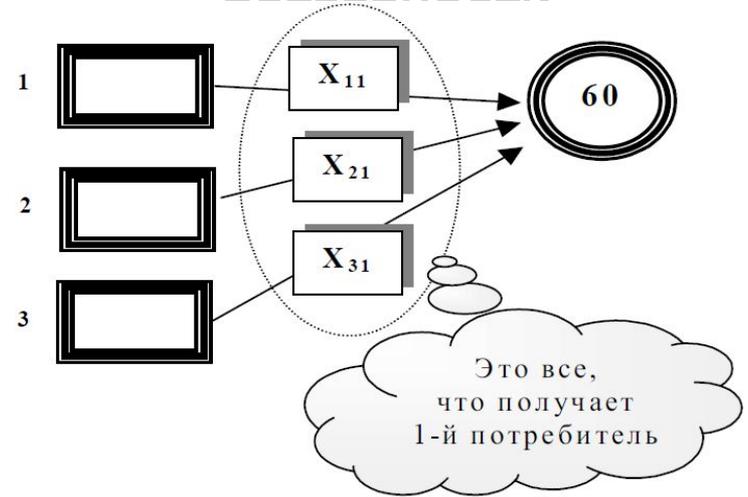
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120$$

Аналогично для остальных поставщиков:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

**ПРИВОЗ ПРОДУКЦИИ К
ПОТРЕБИТЕЛЮ =**



$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$$

Аналогично для остальных потребителей:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$$

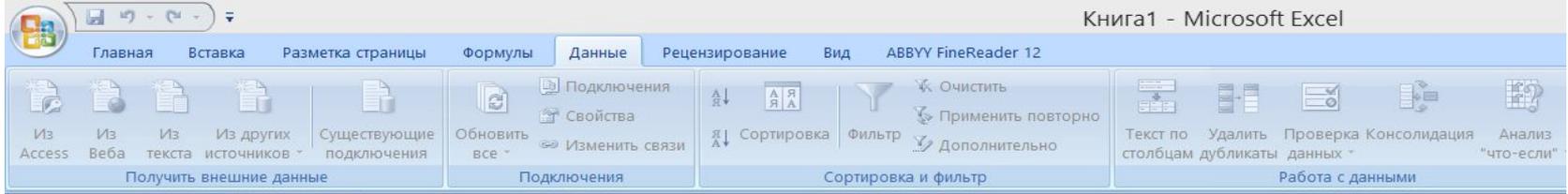
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$$

Пример решения транспортной задачи в MS

EXCEL

В хозяйстве за время уборки при заготовке силоса необходимо перевезти 3000т зелёной массы с четырех полей к четырём фермам, в том числе с первого поля 1000т, второго – 600т, третьего – 800т, четвертого – 600т. Для первой фермы требуется 600т зелёной массы, второй – 800т, третьей – 1000т и четвертой – 1000т. Стоимость перевозки 1 т зелёной массы с полей к фермам приведена в таблице ниже. Требуется составить такой план перевозки массы, чтобы транспортные затраты были минимальны.

Пункты отправления (поля)	Пункты назначения (фермы)				Запасы a_i , т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	6	5	1	1000
A_2	5	4	4	6	600
A_3	7	1	5	4	800
A_4	5	2	3	5	600
Заявки b_j , т	600	800	1000	1000	



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1			Потребители							Решение		Потребители			
2	Поставщики	B1	B2	B3	B4	Запас			Поставщики	B1	B2	B3	B4	Запас	
3	A1	3	6	5	1	1000			A1					0	
4	A2	5	4	4	6	600			A2					0	
5	A3	7	1	5	4	800			A3					0	
6	A4	5	2	3	5	600			A4					0	
7	Потребность	600	800	1000	1000				Потребность	0	0	0	0		
8															
9															
10								Стоимость перевозки						0	

СУММПРОИЗВ(B3:E6;J3:M6)

СУММ(J3:J6)

СУММ(J3:M3)

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-

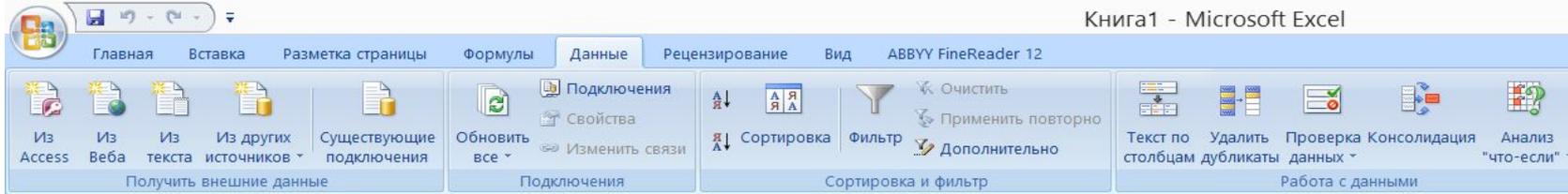
Результаты поиска решения

Поиск не может найти подходящего решения.

Тип отчета

- Сохранить найденное решение
- Восстановить исходные значения

!!!Запас меньше потребности!!!



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1		Потребители								Решение	Потребители				
2	Поставщики	B1	B2	B3	B4	Запас			Поставщики	B1	B2	B3	B4	Запас	
3	A1	3	6	5	1	1000			A1	0	0	0	1000	1000	
4	A2	5	4	4	6	600			A2	0	0	600	0	600	
5	A3	7	1	5	4	800			A3	0	800	0	0	800	
6	A4	5	2	3	5	600			A4	200	0	400	0	600	
7	A5	0	0	0	0	400			A5	400	0	0	0	400	
8	Потребность	600	800	1000	1000				Потребность	600	800	1000	1000		
9															
10								Стоимость перевозки	6400						

СУММПРОИЗВ(B3:E7;J3:M7)

СУММ(J3:J7)

СУММ(J3:M3)

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета:

Сохранить найденное решение Восстановить исходные значения

	Решение	Потребители				
	Поставщики	B1	B2	B3	B4	Запас
	A1	0	0	0	1000	1000
	A2	0	0	600	0	600
	A3	0	800	0	0	800
	A4	200	0	400	0	600
	A5	400	0	0	0	400
	Потребность	600	800	1000	1000	

Стоимость перевозки: