5.6.2. Метод потенциалов

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отправляясь от некоторого опорного решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций.

Алгоритм метода потенциалов состоит в следующем. После построения опорного плана все переменные транспортной задачи разбиваются на две группы:

x_{kl} - базисные переменные (заполненные клетки);

x_{ij} - свободные переменные (незаполненные клетки).

Функция стоимости перевозок выражается через свободные переменные следующим образом

$$f_{t+1} = f_t + \sum \Delta_{ij} x_{ij} \qquad (5.8)$$

здесь t – номер итерации $(t = 0, 1, \ldots)$.

Для нахождения коэффициентов Δ_{ij} каждому пункту оправления A_i ставится величина $u_i, (i = \overline{1, m})$, которая называется потенциалом пункта A_i.

Каждому пункту B_j ставится величина $v_j, (j = \overline{1, n})$ - потенциал пункта B_j.

Для каждой заполненной клетки составляется уравнение $u_k + v_l = c_{kl}$,

где c_{kl} - стоимость перевозки единицы груза из пункта A_k в пункт B_l.

Так как всех потенциалов u_k и v_l $m+n$, а заполненных клеток $m+n-1$, то необходимо решить неопределенную систему из $m+n-1$ уравнений $u_k + v_l = c_{kl}$ с $m+n$ неизвестными.

Одному из этих неизвестных можно дать произвольное значение, и тогда $m+n-1$ неизвестных определяются однозначно.

Далее для каждой свободной клетки находим относительные оценки

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Если все величины Δ_{ij} будут неотрицательны, то исходное решение является оптимальным.

Если среди величин Δ_{ij} есть отрицательные, то значение целевой функции (5.8) может быть уменьшено путем перехода к новому базису. Для этого рассматривают свободные клетки, для которых $\Delta_{ij} < 0$ и среди данных чисел *выбирают минимальное.*

Клетку, которой это число соответствует, *следует заполнить.*

Заполняя выбранную клетку необходимо перераспределить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной *так называемым циклом.*

Циклом в таблице транспортной задачи, называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья - вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

Будем отмечать знаком « + » те вершины цикла, *в которых перевозки необходимо увеличить*, а знаком « - », те вершины, *в которых перевозки необходимо уменьшить*.

Цикл с отмеченными вершинами называется *означенным.*

Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу, это значит *увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла*, на это количество единиц, *а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на то же количество*.

Полученный новый опорный план транспортной задачи снова проверяют на оптимальность.

Пример 5.8. Составить план перевозок грузов с наименьшей стоимостью от трех поставщиков $A_i \ (i = 1,2,3)$ соответственно в количествах 100, 400 и 600 ед. к четырем потребителям $B_j \ (j = 1,2,3,4)$ соответственно в количествах 300, 500, 100 и 200 ед.

Стоимости перевозок единицы груза приведены в таблице.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	6	5	1	100
A_2	1	4	3	2	400
A_3	4	3	1	2	600
Потребности	300	500	100	200	1100

1. Определение исходного плана перевозов.

Для составления исходного плана перевозок используем метод северо-западного угла.

Общее число базисных клеток равно

$$m + n - 1 = 6.$$

		v_1	v_2	v_3	v_4	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
u_1	A_1	3 100	6	5	1	100
u_2	A_2	1 200	4 200	3	2	400
u_3	A_3	4	3 300	1 100	2 200	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_0 = 100 \cdot 3 + 200 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 300 \cdot 3 + 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 = 2700 \text{ (ед.)}$$

2. Исследование базисного решения на оптимальность.

2.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j

Исходя из базисных переменных. Для их нахождения используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$u_1 + v_1 = 3,$$
$$u_2 + v_1 = 1,$$
$$u_2 + v_2 = 4,$$
$$u_3 + v_2 = 3,$$
$$u_3 + v_3 = 1,$$
$$u_3 + v_4 = 2.$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -2, \quad u_3 = -3,$$

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 4, \quad v_4 = 5.$$

2.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 6 = 0\,,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 4 = 1,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 1 - 5 = -4\,,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 2 = 1,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 2 - 3 = -1,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 0 = 4\,.$$

	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
		$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	
$u_1 = 0$	A_1	3 - 100	6	5	1 + λ	100
$u_2 = -2$	A_2	1 + 200	4 - 200	3	2	400
$u_3 = -3$	A_3	4	3 + 300	1 100	2 - 200	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

3. Определение нового базисного решения.

Минимальной разностью является $\Delta_{14} = -4$ для клетки (1,4). Отрицательная оценка показывает, что при включении в данную свободную клетку каждой единицы груза общая стоимость уменьшается на 4 единицы.

Для определения количества груза λ, подлежащего распределению, построим замкнутый цикл (указан пунктиром в табл.).

Одна из вершин цикла находится в незанятой клетке (1,4), которую отмечаем знаком «+». Все остальные вершины цикла находятся в базисных клетках, с чередующимися знаками «-» и «+».

Найдем значение

$$\lambda = \min(100, 200, 200) = 100,$$

равное наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла.

Значение λ записываем в незанятую клетку. Далее двигаясь по означенному циклу, вычитаем λ из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые обозначены знаком «-», и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Элементы таблицы не входящие в цикл, остаются без изменений.

В результате получаем новую таблицу.

		$v_1 = -1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	3	6	5	1 100	100
$u_2 = 2$	A_2	1 300	- 4 100	3	+ 2 λ	400
$u_3 = 1$	A_3	4	+ 3 400	1 100	2 100 -	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_1 = f_0 + \Delta_{14}\lambda = 2700 - 4 \cdot 100 = 2300 \text{ (ед.)}$$

4. Исследование базисного решения на оптимальность.

4.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_4 &= 1,\\
u_2 + v_1 &= 1,\\
u_2 + v_2 &= 4,\\
u_3 + v_2 &= 3,\\
u_3 + v_3 &= 1,\\
u_3 + v_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 1,$$

$$v_1 = -1,\ v_2 = 2,\ v_3 = 0,\ v_4 = 1.$$

4.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 + 1 = 4,$$

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 2 = 4,$$

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 5 = 0,$$

$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 2 = 1,$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 2 - 3 = -1,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 0 = 4.$$

Условие оптимальности плана перевозок $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполняется, так как одна из оценок $\Delta_{24} = -1$ отрицательна, поэтому построим замкнутый цикл пересчета и определим величины перераспределения груза.

5. Определение нового базисного решения.

Построим цикл пересчета для свободной клетки (2,4), для которой не выполняется неравенство, и перераспределим поставки согласно этому означенному циклу.

В клетку (2,4) поместим груз.

$$\lambda = \min(100, 100) = 100.$$

Замечание. *Так как одновременно в двух вершинах цикла (2,2) и (3,4) поставки становятся равными нулю, то лишь одну из них можно объявить свободной, например, (2,2), а другая (3,4) остается базисной с нулевой поставкой. Этим сохраняется количество базисных клеток* $m+n-1=6.$

После преобразований получаем новый план перевозок.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$		
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	3	6	5	1 100	100
$u_2 = 1$	A_2	1 300	4	3	2 100	400
$u_3 = 1$	A_3	4	3 500	1 100	2 **0**	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_2 = f_1 + \Delta_{24}\lambda = 2300 - 1 \cdot 100 = 2200 \text{ (ед.)}$$

6. Исследование базисного решения на оптимальность.

6.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_4 &= 1, \\
u_2 + v_1 &= 1, \\
u_2 + v_4 &= 2, \\
u_3 + v_2 &= 3, \\
u_3 + v_3 &= 1, \\
u_3 + v_4 &= 2.
\end{aligned}
$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 1,$$
$$v_1 = 0, \; v_2 = 2, \; v_3 = 0, \; v_4 = 1.$$

6.1. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 - 0 = 3,$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 2 = 4,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 0 = 5,$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 4 - 3 = 1,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 1 = 2,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 1 = 3.$$

Так как для всех свободных клеток таблицы неравенство $\Delta_{ij} \geq 0$ выполняется, то полученное решение

$$x_{14} = 100,\ x_{21} = 300,\ x_{24} = 100,$$
$$x_{32} = 500,\ x_{33} = 100,$$

$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{22} = x_{23} = x_{31} = x_{34} = 0$$

будет оптимальным.

При таком плане перевозок затраты на перевозку будут наименьшими и составят

$$f_{\min} = f_2 = 2200 \text{ (ед.)}.$$

5.6.3. Задачи с нарушенным балансом

а) Транспортная задача с избытком запасов.

Транспортную задачу такого типа можно свести к закрытой модели, если ввести фиктивный пункт назначения B_{n+1}, которому требуется

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

единиц груза.

Стоимость перевозок между фиктивным пунктом назначения и пунктами отправления принимаются равными нулю.

Пример 5.9.

Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	6	4	5	500
A_2	8	3	2	300
A_3	7	5	6	500
A_4	5	2	2	200
Потребности	300	400	300	1000<1500

Модель задачи открытая. У поставщиков имеется 1500-1000=500 единиц лишнего груза, который запланируем фиктивному потребителю B_4.

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	6	4	5	0	500
A_2	8	3	2	0	300
A_3	7	5	6	0	500
A_4	5	2	2	0	200
Потребности	300	400	300	500	1500

Из таблицы видно, что получилась закрытая транспортная задача, которая может быть решена методом потенциалов.

б)Транспортная задача с недостатком запасов.

Транспортную задачу такого типа можно свести к закрытой модели, если ввести фиктивный пункт отправления A_{m+1}, которому требуется

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

единиц груза.

Стоимость перевозок между фиктивным пунктом отправления и пунктами назначения принимаются равными нулю.

Пример 5.10.

Решить транспортную задачу, заданную матрицей перевозок

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
Потребности	25	15	40/30

Модель задачи открытая. У поставщиков не хватает 40-30=10 единиц груза, которые запланируем фиктивному поставщику A_3.

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
A_3	0	0	10
Потребности	25	15	40

Из таблицы видно, что получилась закрытая транспортная задача, которая может быть решена методом потенциалов