Индивидуальная олимпиада по информатике и программированию. Очный тур

Разбор задач

27 марта 2011 года

Москва, Новосибирск, Санкт-Петербург,

Саратов, Челябинск

Задача А.
Ситха джедай против

Авторы

- Идея задачи – Антон Банных
- Условие задачи – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Подготовка разбора – Антон Банных

Постановка задачи

- Два адепта Силы
- n умений
- Познания по каждому умению растут по линейному закону
- Найти день, в который познания по каждому умению у джедая будут не хуже, чем у ситха

Упрощение постановки задачи

- Рассмотрим каждое умение в отдельности
- Условие того, что в день *x* познания джедая в этом уменнии будут не хуже, чем у ситха: $j_i + xl_i \geq s_i + xd_i$
- Пусть $a_i = s_i - j_i$ и $b_i = l_i - d_i$
- Неравенство приобрело вид $xb_i \geq a_i$

Решение для одного умения

- $b_i > 0 \Rightarrow x \geq \left\lceil \frac{a_i}{b_i} \right\rceil$
- $b_i < 0 \Rightarrow x \leq \left\lfloor \frac{a_i}{b_i} \right\rfloor$
- $b_i < 0, a_i > 0 \Rightarrow$ нет решения

Решение

- Поддерживаем интервал, на котором джедай не хуже ситха
- Добавляем умения по одному
- Каждый раз нужно пересечь два интервала
- $O(n)$

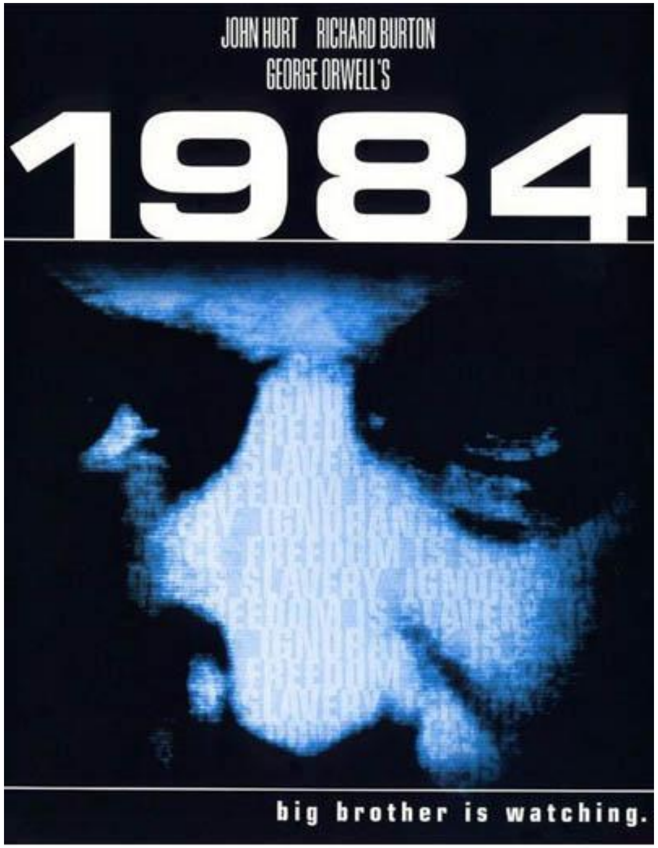
Тонкости

- И числитель и знаменатель дроби может быть как положительным, так и отрицательным
- Деление с округлением требует разбора нескольких случаев при реализации в целых числах
- Лучше делить в вещественных числах, а затем округлять в нужную сторону

Простое решение

- Все ограничения на *x* не превосходят *1000*, поэтому если решение есть, то оно находится на отрезке *[0, 1000]*
- Переберем *1001* день и для каждого дня проверим, подходит ли он
- *O(nC)*, где *C* — ограничение сверху на начальные умения и ежедневные приросты

Задача В. Министерство правды



Авторы

- Идея задачи – Андрей Комаров, Павел Кротков
- Условие задачи – Антон Банных
- Подготовка тестов – Сергей Мельников
- Подготовка разбора–Сергей Мельников

Формальная постановка задачи

- Дан массив целых чисел
- Необходимо разбить его на три не пустые части, с суммами чисел *S1*, *S2*, *S3*
- Минимизировать разность максимального и минимального из этих чисел

Идея

- Подсчитаем частичные суммы на префиксе.

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} t_i$$

- Теперь можно быстро находить сумму на отрезке с *a* до *b*

$$\sum_{i=a}^{b} t_i = S_b - S_{a-1}$$

Решение за N^2

- Переберем длины первой и второй частей
- Вычислим *S1*, *S2*, *S3* при помощи частичных сумм
- Выберем лучший результат

Решение за *NlogN*

- Переберем длину первого отрезка
- Разобьём оставшийся отрезок на две примерно равные части.
- Рассмотрим два варианта $S2 > S3$ и $S2 <= S3$ и выберем лучший результат

Решение за *NlogN* (2)

- Докажем что разбивать второй отрезок не пополам не выгодно
  - Если *S1* минимальное, то разбивая не пополам мы увеличиваем максимальное число
  - Если *S1* максимальное, то разбивая не пополам мы уменьшаем минимальное число
  - Если *S1* не максимальное и не минимальное, то это очевидно не выгодно

Решение за *NlogN* (3)

- Точку разбиения будем искать двоичным поиском
- Пусть длина первого отрезка *A*
- Найдем двоичным поиском максимальное такое *B*, что $S_{A+B} - S_A \le S_n - S_{A+B}$
- Надо проверить длины второго отрезка *B* и *B+1*

Решение за *NlogN*

- Точку разбиения будем искать двоичным поиском

```
  l := 1;
  r := n - a;
  while l < r - 1 do begin
    b := (l + r) div 2;
    if (s[a + b] - s[a] <= s[n] - s[a + b]) then
 l := b
 else
        r := b;
  end;
```

Решение за *N*

- Заметим что при увеличении *A*, величина *A*+*B* в оптимальном ответе не может уменьшится
- Применим метод двух указателей
  - будем перебирать *A* и при этом поддерживать *B*
  - при каждом увеличении *A* увеличивать *B* пока не будет выполняться условие оптимальности

Задача C. Йою Ньерк

Авторы

- Идея задачи – Антон Ахи
- Условие задачи – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Сергей Поромов
- Подготовка разбора – Сергей Поромов

Постановка задачи

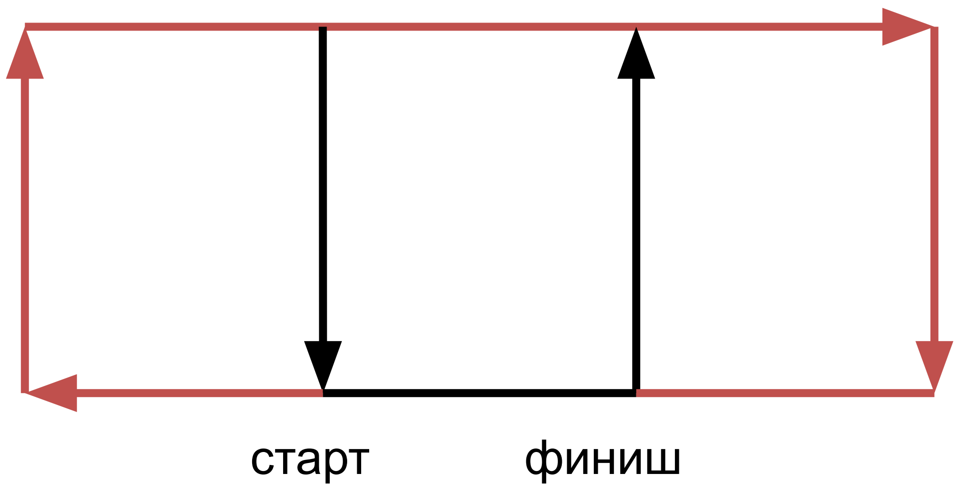
- Есть прямоугольное поле из улиц и авеню
- Каждая улица и авеню односторонняя
- Необходимо найти кратчайший путь от одного перекрестка до другого, из таких следует выбрать с минимальным числом поворотов, а уже из таких с максимумом минимального отрезка пути

Частичные случаи

- Все улицы направлены в одну сторону и все авеню тоже в одну сторону – *30* баллов. Ответ или не существует или из *1* или *2* отрезков.
- Все авеню направлены в одну сторону – *50* баллов. Несложный разбор случаев – количество отрезков пути не более *3*.

Идея решения

- Количество отрезков пути не превышает *5*



Идея решения

- Для нахождения кратчайшего пути использовать обход в ширину
- Для выбора кратчайших путей с минимальным числом поворотов также использовать обход в ширину на *0-1* графе кратчайших путей

Как максимизировать минимальный отрезок?

- Двоичный поиск по длине минимального отрезка
- В графе кратчайших путей с минимальным числом поворотов искать путь от старта до финиша обходом в глубину
- Обход в глубину делает шаг либо вперед в том же направлении на единичный отрезок, либо с поворотом на длину минимального отрезка

Восстановление ответа

- Для каждого перекрестка и направления, с которого приехали, запоминать длину последнего отрезка пути
- Восстанавливать ответ с конца

Время работы

- Обходы в ширину - $O(nm)$, двоичный поиск + обход в глубину суммарно $O(nm \cdot \log(\max(n, m)))$
- Решения за время порядка $O(n^3)$ получают около 80 баллов

Задача D. Обратный кузнечик

Авторы

- Идея задачи – Владимир Ульянцев
- Условие задачи – Владимир Ульянцев
- Подготовка тестов – Антон Ахи
- Подготовка разбора – Антон Ахи

Постановка задачи

- Кузнечик прыгает на одну или две травинки вперед
- Кузнечик не может находится на сломанной травинке
- Найти такую конфигурацию целых и сломанных травинок, чтобы число различных путей кузнечика было ровно k

Решение «прямой» задачи

- Если все *n* травинок целы, то число путей — *n*-ое число Фибоначчи
- Когда отрезки из целых травинок разделены одной сломанной, число путей является произведением соответствующих чисел Фибоначчи

Идея «обратной» задачи

- Число путей всегда является произведением чисел Фибоначчи
- Требуется представить *k* в виде произведения чисел Фибоначчи

Решение «обратной» задачи

- Чисел Фибоначчи, которые делят *k*, очень мало
- Чисел, которые представимы произведениями этих чисел и являются делителями *k*, тоже мало
- Будем перебирать на какое число Фибоначчи поделить *k*, после чего решать задачу для нового меньшего *k*

Решение «обратной» задачи

- Для каждого *k* будем вычислять наименьшее число травинок необходимых, чтобы его получить
- Вычисления для каждого *k* можно проводить один раз, запоминая результат

Восстановление ответа

- Зная минимальное необходимо число травинок, можно его увеличивать, добавляя к последовательности либо `0 1`, либо `0 1 1`
- Таким образом, если *m* — минимальное число травинок и *n* и *m* имеют разную четность, то необходимо добавить в конец `0 1 1`
- Далее добавлять в конец `0 1`, пока это необходимо

Тонкости решения

- Если $m > n$ или m и n имеют разную четность и $m + 3 > n$, то ответ «`Impossible`»
- Интересный случай: `2 1`
- $k = 0$ — особый случай: если $n < 4$, то ответ «`Impossible`», иначе ответом может быть, например, последовательность из нулей с единицами на концах
- Важно понимать, что сломанных травинок используется на одну меньше, чем чисел Фибоначчи

Альтернативные подходы

- Не перебирать делители *k*, а выстраивать произведения чисел Фибоначчи, аналогично задаче о рюкзаке
- Пытаться жадно делить *k* на числа Фибоначчи (неверное решение ~*70* баллов)
- Перебирать все возможные конфигурации травинок и решать «прямую» задачу (*40* баллов)

Спасибо за внимание! Вопросы?

http://neerc.ifmo.ru/school/ioip