

Изменение размера массива

Стек: изменение размера массива

- Проблема. От клиента требуется указывать размер стека
- Как увеличивать и уменьшать размер массива?
- Первый подход
 - `push()`: увеличивать размер массива `s[]` на 1
 - `pop()`: уменьшать размер массива `s[]` на 1
- Стоимость
 - Требуется копировать все элементы в новый массив

Стоимость операции `pop()` — $O(N)$. Элементы: 1, 2, 3, ..., N

Стек: изменение размера массива

- Если массив полон, то создать новый массив в два раза больше и копировать элементы

```
public ResizingArrayStackOfStrings()
{ s = new String[1]; }

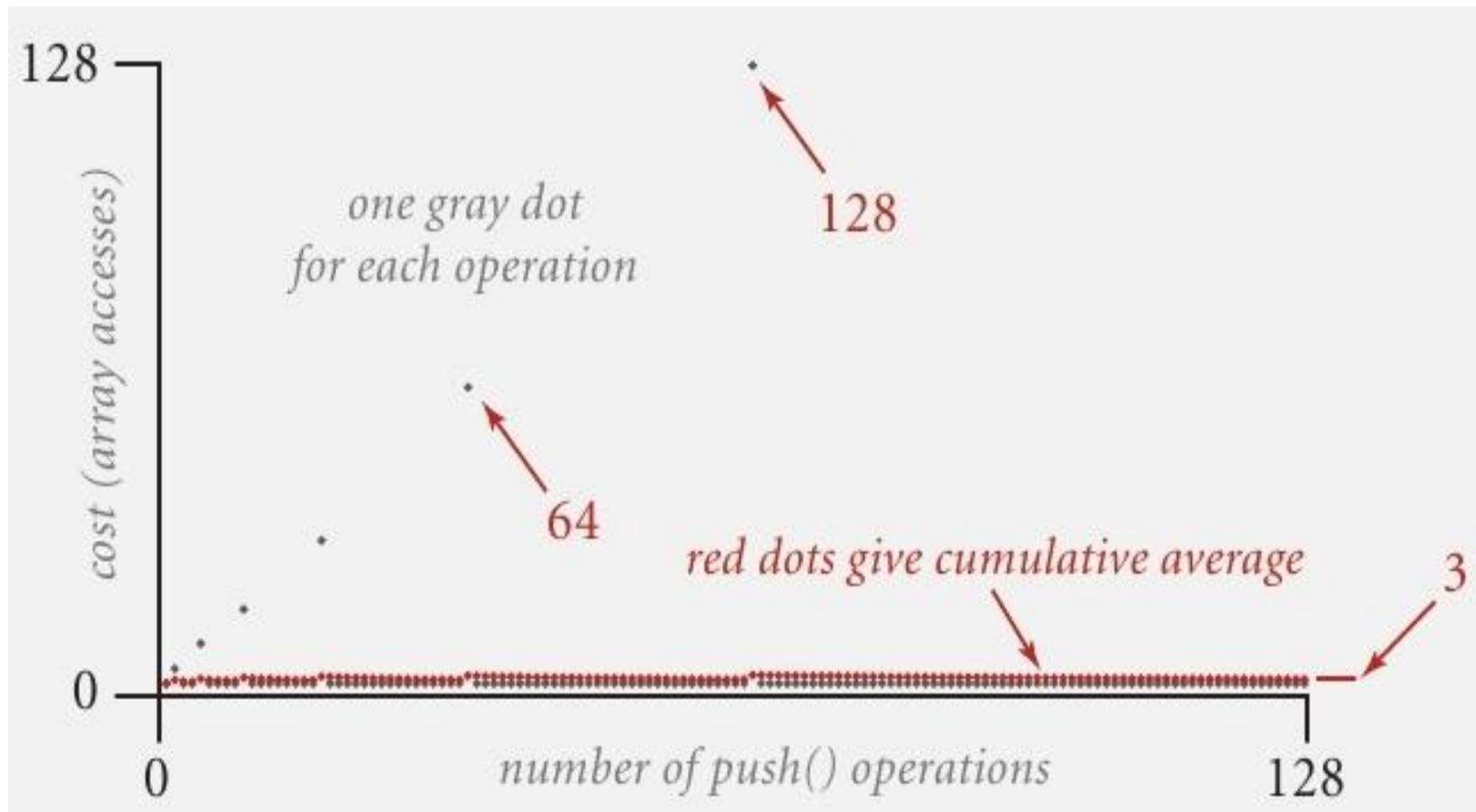
public void push(String item)
{
    if (N == s.length) resize(2 * s.length);
    s[N++] = item;
}

private void resize(int capacity)
{
    String[] copy = new String[capacity];
    for (int i = 0; i < N; i++)
        copy[i] = s[i];
    s = copy;
}
```

- Стоимость. Сложность вставки первых N элементов пропорциональна N

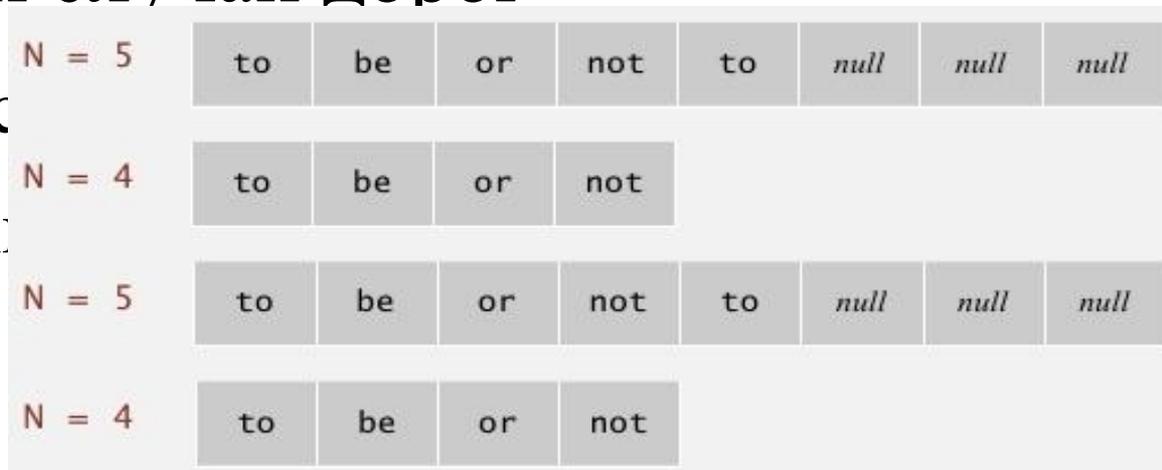
Стек: амортизированная стоимость добавления в стек

- Стоимость добавления первых N элементов: $N + (2 + 4 + 8 + \dots + N) \sim 3N$



Стек: изменение размера массива

- Как изменять размер массива?
- Первый подход
 - `push()`: увеличивать размер массива `s[]` в два раза, когда массив полон
 - `pop()`: уменьшать размер массива `s[]` в два раза, когда массив на половину пуст
- Худший случай дорог



массив полон

альна N

Стек: изменение размера массива

- Эффективный подход
 - `push()`: увеличивать размер массива `s[]` в два раза, когда массив полон
 - `pop()`: уменьшать размер массива `s[]` в два раза, когда массив заполнен на четверть

```
public String pop()
{
    String item = s[--N];
    s[N] = null;
    if (N > 0 && N == s.length/4) resize(s.length/2);
    return item;
}
```

- Массив заполнен от 25% до 100%

Стек: изменение размера массива

push()	pop()	N	a.length	a[]											
				0	1	2	3	4	5	6	7				
		0	1	<i>null</i>											
to		1	1	to											
be		2	2	to									be		
or		3	4	to									be	or	<i>null</i>
not		4	4	to									be	or	not
to		5	8	to	be	or	not	to	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
-	to	4	8	to	be	or	not	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
be		5	8	to	be	or	not	be	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
-	be	4	8	to	be	or	not	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
-	not	3	8	to	be	or	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
that		4	8	to	be	or	that	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
-	that	3	8	to	be	or	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>	<i>null</i>			
-	or	2	4	to	be	<i>null</i>	<i>null</i>								
-	be	1	2	to	<i>null</i>										
is		2		to	is										

Trace of array resizing during a sequence of push() and pop() operations

Стек: амортизированный анализ

- Предположение. Начиная с пустого стека, последовательность из M push/pop операций занимает время пропорциональное M

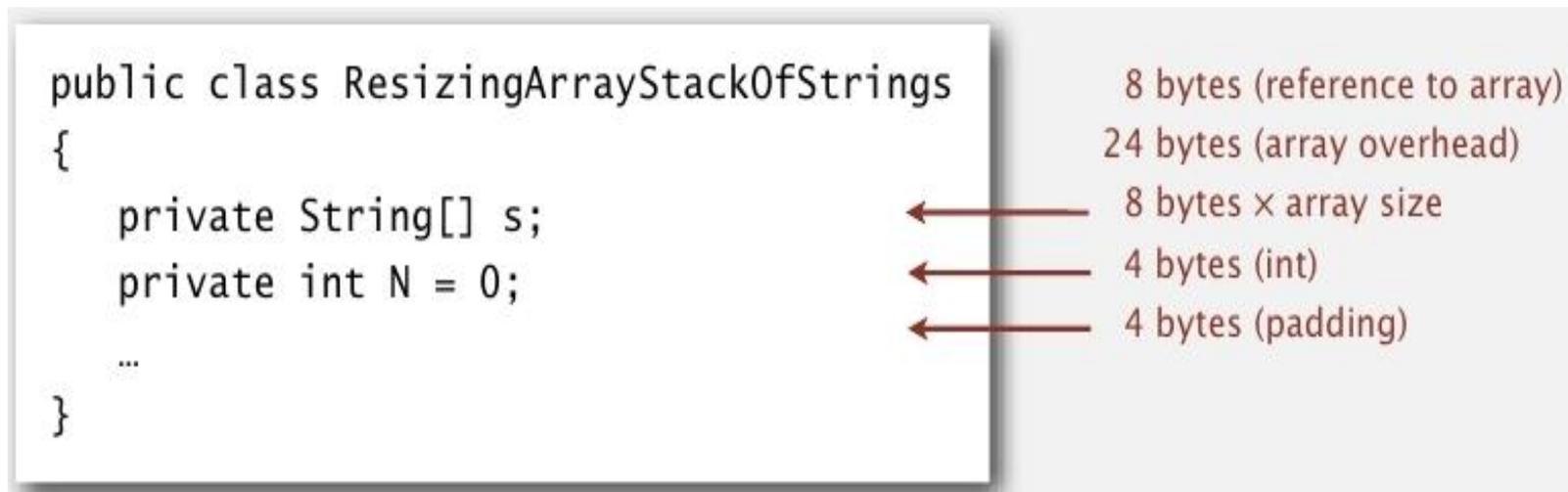
	best	worst	amortized
construct	1	1	1
push	1	N	1
pop	1	N	1
size	1	1	1

doubling and halving operations

order of growth of running time for resizing stack with N items

Стек: использование памяти

- Предположение. Используется от $\sim 8N$ до $\sim 32N$ байт для стека из N элементов
 - $\sim 8N$ когда стек полон
 - $\sim 32N$ когда стек заполнен на четверть



- Учитывается память, занимаемая самим стеком, но не данными

Очередь с приоритетом (Priority Queue)

Очередь с приоритетом

- **Коллекции.** Вставка и удаление элементов. Какой элемент удалять?
- **Стек.** LIFO
- **Очередь.** FIFO
- **Рандомизированная очередь.** Удаляется случайный элемент
- **Очередь с приоритетом.** Удаляется самый большой (или маленький) элемент

<i>operation</i>	<i>argument</i>	<i>return value</i>
<i>insert</i>	P	
<i>insert</i>	Q	
<i>insert</i>	E	
<i>remove max</i>		Q
<i>insert</i>	X	
<i>insert</i>	A	
<i>insert</i>	M	
<i>remove max</i>		X
<i>insert</i>	P	
<i>insert</i>	L	
<i>insert</i>	E	
<i>remove max</i>		P

удаляется

удаляется самый
элемент

API очереди с приоритетом

- **Требование.** Элементы должны быть сравнимы

Key must be Comparable
(bounded type parameter)



```
public class MaxPQ<Key extends Comparable<Key>>
```

```
    MaxPQ() create an empty priority queue
```

```
    MaxPQ(Key[] a) create a priority queue with given keys
```

```
    void insert(Key v) insert a key into the priority queue
```

```
    Key delMax() return and remove the largest key
```

```
    boolean isEmpty() is the priority queue empty?
```

```
    Key max() return the largest key
```

```
    int size() number of entries in the priority queue
```

Использование очереди с приоритетам

- Event-driven simulation. [customers in a line, colliding particles]
- Numerical computation. [reducing roundoff error]
- Data compression. [Huffman codes]
- Graph searching. [Dijkstra's algorithm, Prim's algorithm]
- Number theory. [sum of powers]
- Artificial intelligence. [A* search]
- Statistics. [maintain largest M values in a sequence]
- Operating systems. [load balancing, interrupt handling]
- Discrete optimization. [bin packing, scheduling]
- Spam filtering. [Bayesian spam filter]

Пример очереди с приоритетом

- **Задача.** Найти наибольшие M элементов в потоке из N элементов
 - Отслеживание транзакций

```
% more tinyBatch.txt
Turing      6/17/1990    644.08
vonNeumann  3/26/2002   4121.85
Dijkstra    8/22/2007   2678.40
vonNeumann  1/11/1999   4409.74
Dijkstra    11/18/1995   837.42
Hoare       5/10/1993   3229.27
vonNeumann  2/12/1994   4732.35
Hoare       8/18/1992   4381.21
Turing      1/11/2002    66.10
Thompson    2/27/2000   4747.08
Turing      2/11/1991   2156.86
Hoare       8/12/2003   1025.70
vonNeumann  10/13/1993  2520.97
Dijkstra    9/10/2000   708.95
Turing      10/12/1993  3532.36
Hoare       2/10/2005   4050.20
```

```
% java TopM 5 < tinyBatch.txt
Thompson    2/27/2000   4747.08
vonNeumann  2/12/1994   4732.35
vonNeumann  1/11/1999   4409.74
Hoare       8/18/1992   4381.21
vonNeumann  3/26/2002   4121.85
```

↑
sort key

Пример очереди с приоритетом

- **Задача.** Найти наибольшие M элементов в потоке из N элементов
 - Отслеживание транзакций
 - Поиск файлов и директорий

```
MinPQ<Transaction> pq = new MinPQ<Transaction>();  
  
while (StdIn.hasNextLine())  
{  
    String line = StdIn.readLine();  
    Transaction item = new Transaction(line);  
    pq.insert(item);  
    if (pq.size() > M)  
        pq.delMin();  
}
```

use a min-oriented pq

Transaction data type is Comparable (ordered by \$\$)

pq contains largest M items

Пример очереди с приоритетом

- **Задача.** Найти наибольшие M элементов в потоке из N элементов

order of growth of finding the largest M in a stream of N items

implementation	time	space
sort	$N \log N$	N
elementary PQ	$M N$	M
binary heap	$N \log M$	M
best in theory	N	M

Очередь с приоритетом: неупорядоченная и упорядоченная реализация

<i>operation</i>	<i>argument</i>	<i>return value</i>	<i>size</i>	<i>contents (unordered)</i>						<i>contents (ordered)</i>								
<i>insert</i>	P		1	P						P								
<i>insert</i>	Q		2	P	Q					P	Q							
<i>insert</i>	E		3	P	Q	E				E	P	Q						
<i>remove max</i>		Q	2	P	E					E	P							
<i>insert</i>	X		3	P	E	X				E	P	X						
<i>insert</i>	A		4	P	E	X	A			A	E	P	X					
<i>insert</i>	M		5	P	E	X	A	M		A	E	M	P	X				
<i>remove max</i>		X	4	P	E	M	A			A	E	M	P					
<i>insert</i>	P		5	P	E	M	A	P		A	E	M	P	P				
<i>insert</i>	L		6	P	E	M	A	P	L		A	E	L	M	P	P		
<i>insert</i>	E		7	P	E	M	A	P	L	E		A	E	E	L	M	P	P
<i>remove max</i>		P	6	E	M	A	P	L	E			A	E	E	L	M	P	

A sequence of operations on a priority queue

Очередь с приоритетом: неупорядоченная реализация

```
public class UnorderedMaxPQ<Key extends Comparable<Key>>
{
    private Key[] pq;    // pq[i] = ith element on pq
    private int N;      // number of elements on pq

    public UnorderedMaxPQ(int capacity)
    { pq = (Key[]) new Comparable[capacity]; }

    public boolean isEmpty()
    { return N == 0; }

    public void insert(Key x)
    { pq[N++] = x; }

    public Key delMax()
    {
        int max = 0;
        for (int i = 1; i < N; i++)
            if (less(max, i)) max = i;
        exch(max, N-1);
        return pq[--N];
    }
}
```

no generic
array creation

less() and exch()
similar to sorting methods

null out entry
to prevent loitering

Пример очереди с приоритетом

- **Задача.** Все операции эффективны

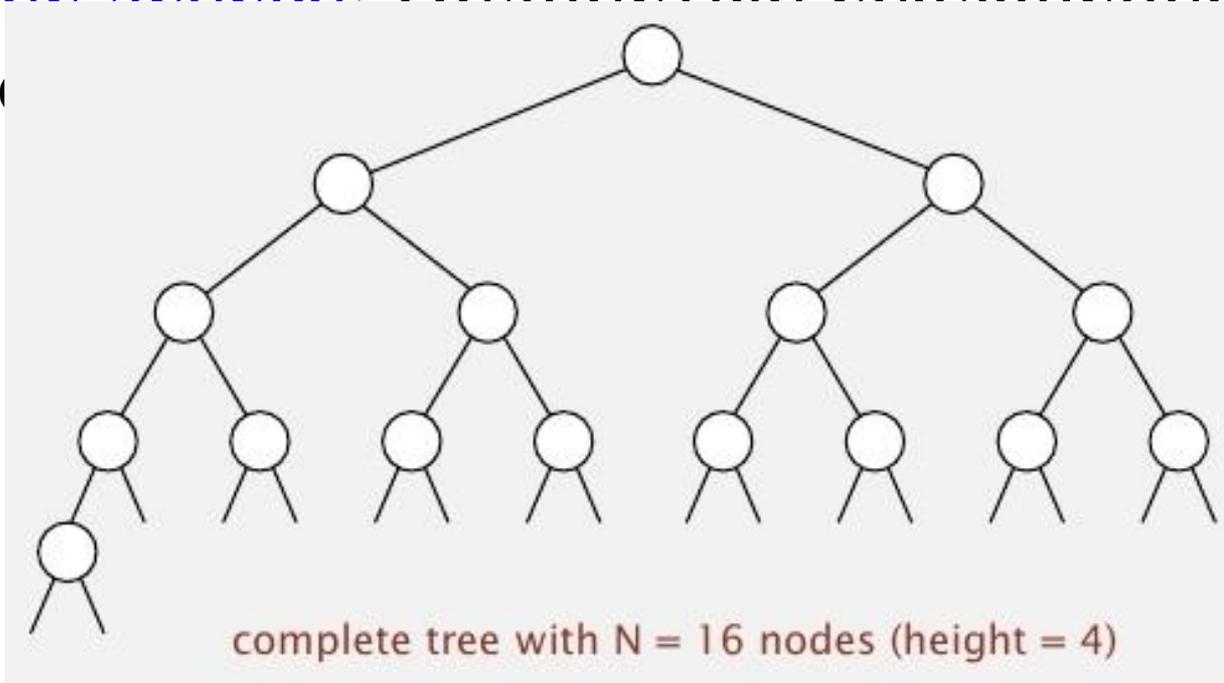
order of growth of running time for priority queue with N items

implementation	insert	del max	max
unordered array	1	N	N
ordered array	N	1	1
goal	log N	log N	log N

Бинарная пирамида (Binary Heaps)

Полное бинарное дерево

- **Бинарное дерево.** Пустота или узел с левым и правым бинарным поддеревом
- **Полное дерево.** Полностью сбалансированное, за исключением



- **Свойство.** Высота полного дерева из $N-1$ узлов равна

В полном бинарном дереве с N узлами высота равна $\lceil \log_2 N \rceil$

Полное бинарное дерево

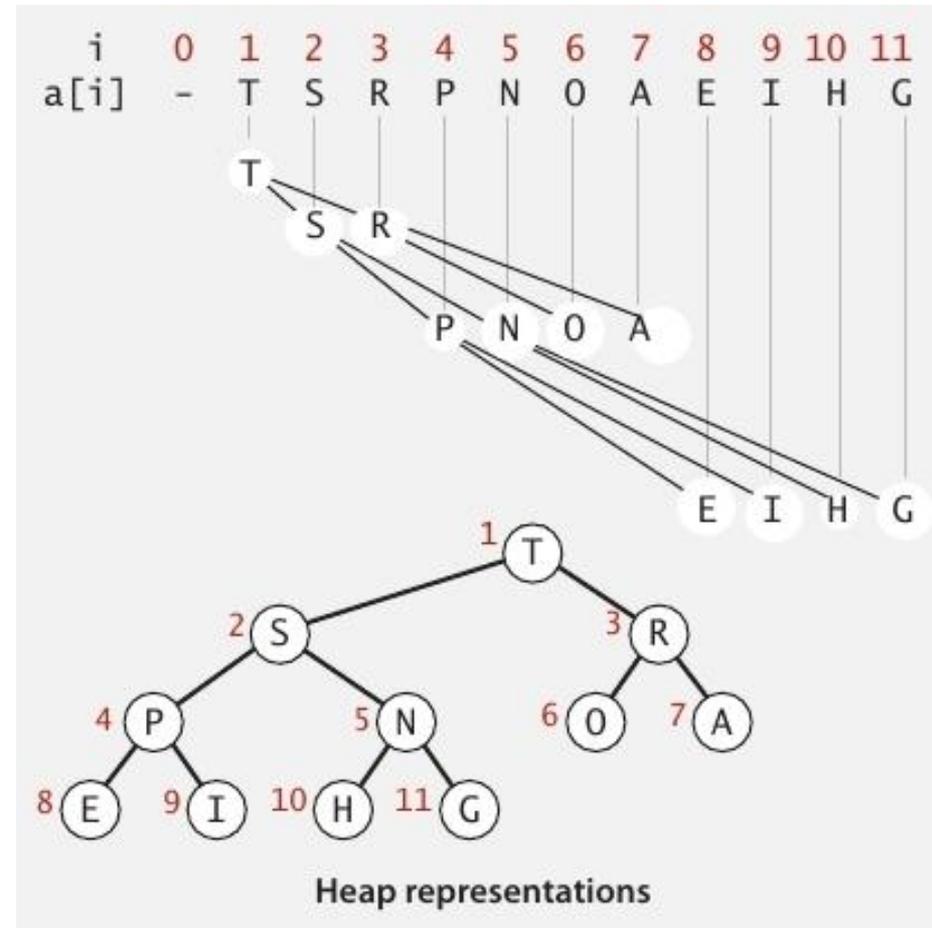


Hyphaene Compressa - Doum Palm

© Shlomit Pinter

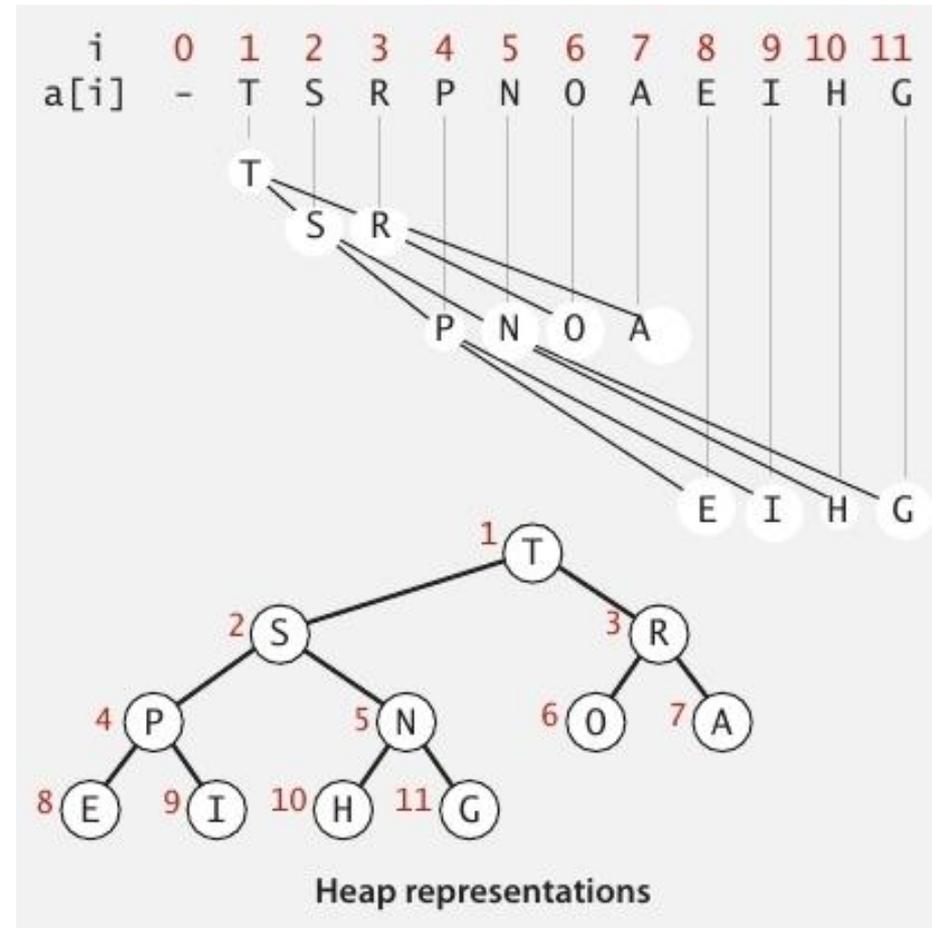
Бинарная пирамида

- **Бинарная пирамида.** Пирамидально упорядоченное полное бинарное дерево можно представить в виде массива
- **Пирамидально упорядоченное бинарное дерево**
 - Ключи в узлах
 - Ключ родительского узла не меньше чем дочернего
- **Представление в массиве**
 - Индексы начинаются с 1
 - Узлы упорядочены по уровням



Бинарная пирамида

- Самый большой ключ находится в корне по адресу $a[1]$
- Пользуйтесь индексами для перемещения по массиву
 - Родитель узла k находится в $k/2$
 - Потомки узла k находятся в $2k$ и $2k+1$

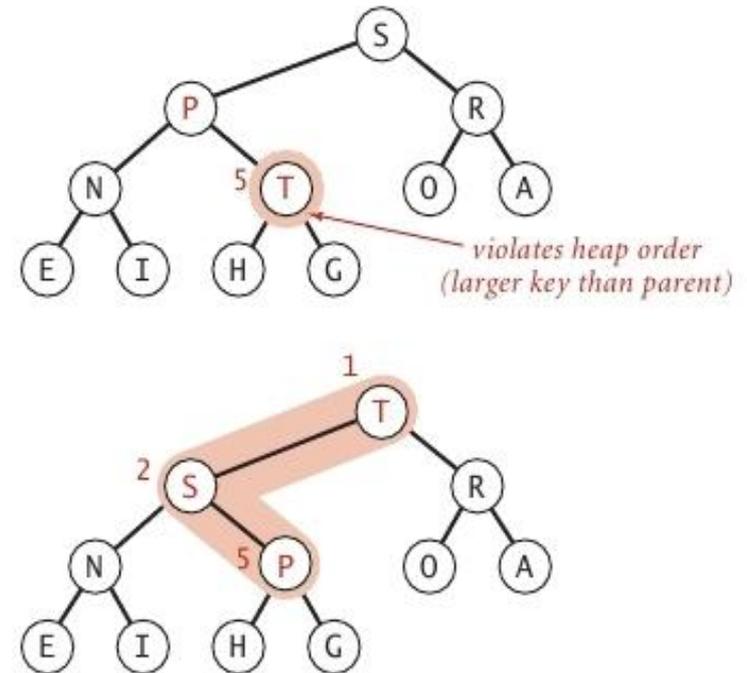


Продвижение в пирамиде

- Если дочерний узел больше родительского
 - Поменять местами дочерний и родительский узел
 - Повторять до тех пор пока не будет восстановлена

```
private void swim(int k)
{
    while (k > 1 && less(k/2, k))
    {
        exch(k, k/2);
        k = k/2;
    }
}
```

parent of node at k is at k/2

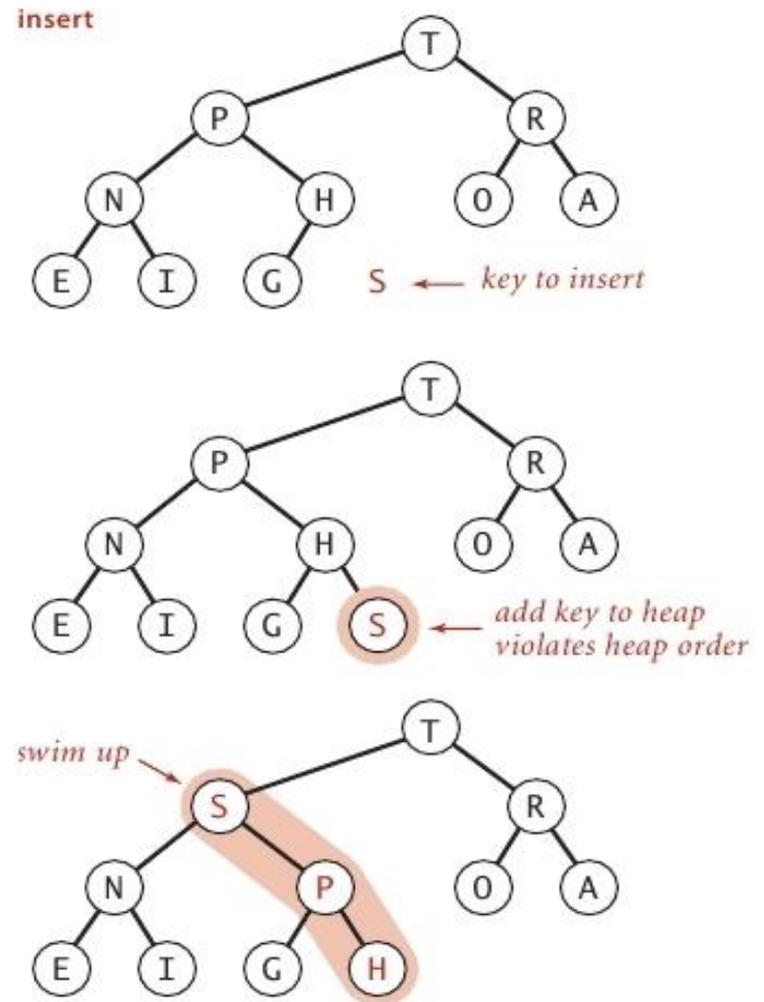


- **Принцип Питера.** Узел продвигается до уровня своей некомпетентности

Вставка в пирамиде

- **Вставка.** Добавить узел в конец и поднимать его ВЫШЕ

```
public void insert(Key x)
{
    pq[++N] = x;
    swim(N);
}
```

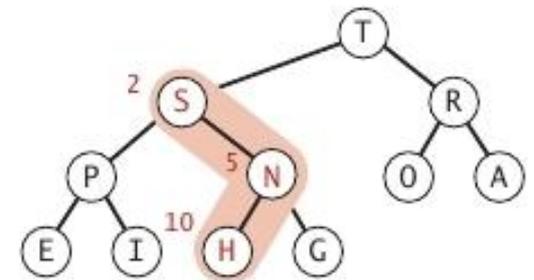
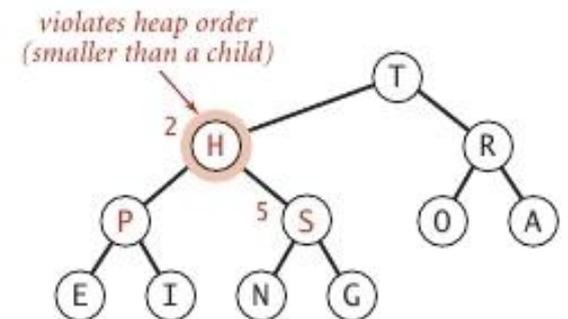


Спуск в пирамиде

- Если родительский узел меньше одного (или двух) дочерних
 - Поменять местами родительский и больший дочерний

```
private void sink(int k)
{
    while (2*k <= N)
    {
        int j = 2*k;
        if (j < N && less(j, j+1)) j++;
        if (!less(k, j)) break;
        exch(k, j);
        k = j;
    }
}
```

children of node at k
are $2k$ and $2k+1$

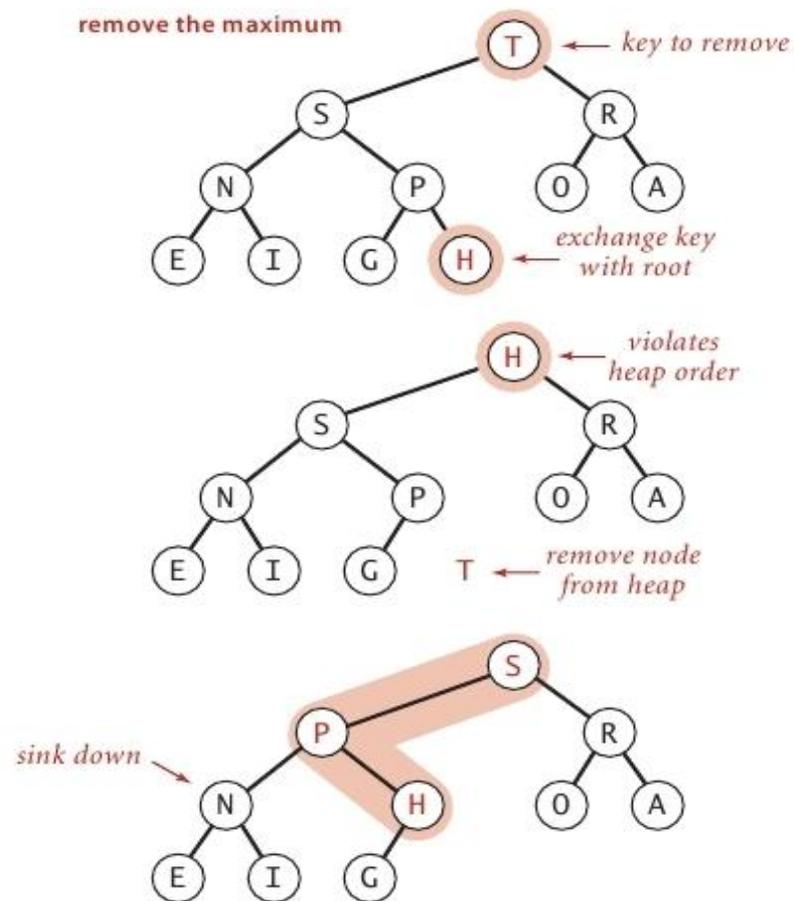


Top-down reheapify (sink)

Удалить максимальный узел в пирамиде

- **Удаление максимального узла.** Поменять корень с последним узлом и спустить его ниже

```
public Key delMax()  
{  
    Key max = pq[1];  
    exch(1, N--);  
    sink(1);  
    pq[N+1] = null; ← prevent loitering  
    return max;  
}
```



Бинарная пирамида

- **Вставка.** Добавить узел в конец и поднимать его выше
- **Удаление максимального узла.** Поменять корень с последним узлом и спустить его ниже
- Видео 1

Бинарная пирамида: реализация на Java

```
public class MaxPQ<Key extends Comparable<Key>>  
{
```

```
    private Key[] pq;  
    private int N;
```

```
    public MaxPQ(int capacity)  
    { pq = (Key[]) new Comparable[capacity+1]; }
```

← fixed capacity
(for simplicity)

```
    public boolean isEmpty()  
    { return N == 0; }  
    public void insert(Key key)  
    public Key delMax()  
    { /* see previous code */ }
```

← PQ ops

```
    private void swim(int k)  
    private void sink(int k)  
    { /* see previous code */ }
```

← heap helper functions

```
    private boolean less(int i, int j)  
    { return pq[i].compareTo(pq[j]) < 0; }  
    private void exch(int i, int j)  
    { Key t = pq[i]; pq[i] = pq[j]; pq[j] = t; }
```

← array helper functions

```
}
```

Реализация очереди с приоритетом

order-of-growth of running time for priority queue with N items

implementation	insert	del max	max
unordered array	1	N	N
ordered array	N	1	1
binary heap	$\log N$	$\log N$	1
d-ary heap	$\log_d N$	$d \log_d N$	1
Fibonacci	1	$\log N$ †	1
impossible	1	1	1

← why impossible?

† amortized

Binary heap considerations

Immutability of keys.

- Assumption: client does not change keys while they're on the PQ.
- Best practice: use immutable keys.

Underflow and overflow.

- Underflow: throw exception if deleting from empty PQ.
- Overflow: add no-arg constructor and use resizing array.

leads to log N
amortized time per op
(how to make worst case?)

Minimum-oriented priority queue.

- Replace less() with greater().
- Implement greater().

Other operations.

- Remove an arbitrary item.
- Change the priority of an item.

can implement with sink() and swim() [stay tuned]

Immutability: properties

Data type. Set of values and operations on those values.

Immutable data type. Can't change the data type value once created.

Advantages.

- Simplifies debugging.
- Safer in presence of hostile code.
- Simplifies concurrent programming.
- Safe to use as key in priority queue or symbol table.



Disadvantage. Must create new object for each data type value.

“ Classes should be immutable unless there's a very good reason to make them mutable.... If a class cannot be made immutable, you should still limit its mutability as much as possible. ”

— Joshua Bloch (Java architect)



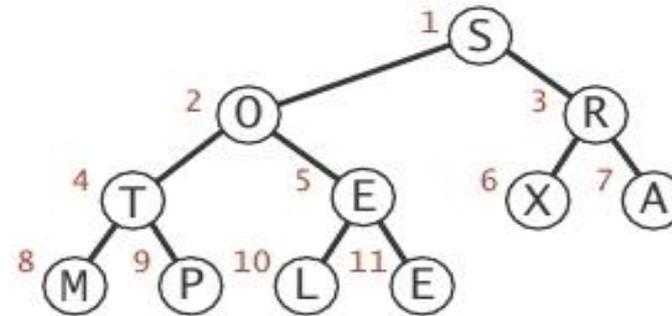
Пирамидальная сортировка (Heapsort)

Пирамидальная сортировка

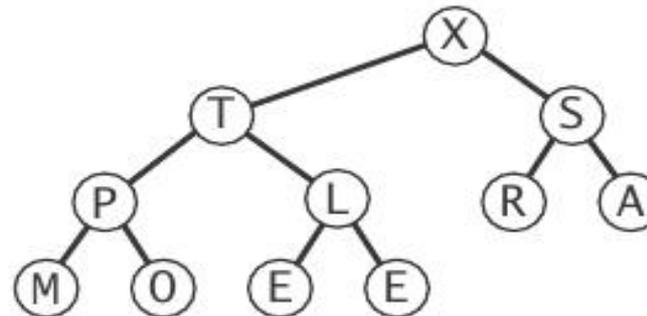
- Создать пирамиду из всех N ключей
- Повторять удаление максимального ключа

Пирамидальная сортировка

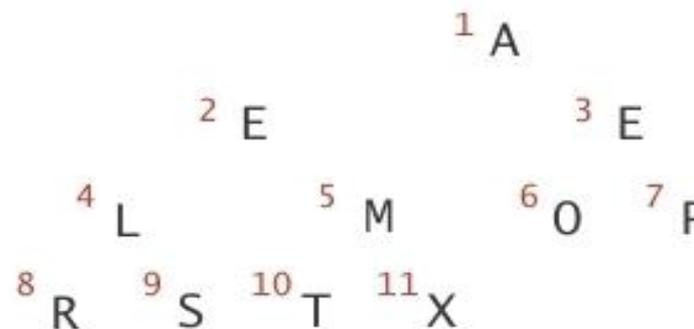
start with array of keys
in arbitrary order



build a max-heap
(in place)



sorted result
(in place)



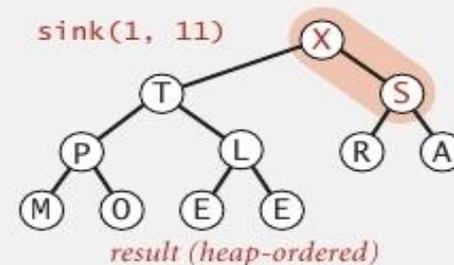
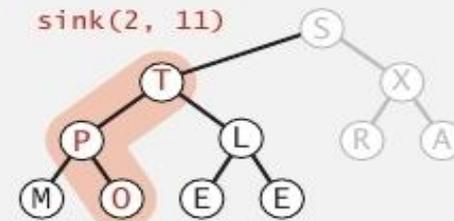
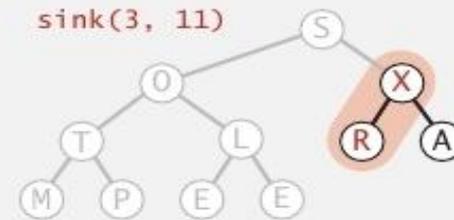
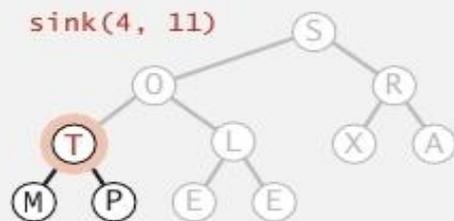
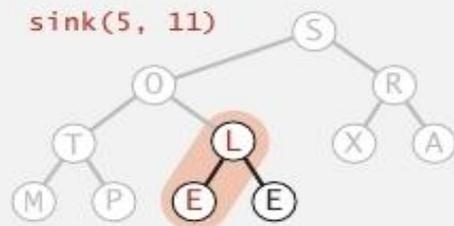
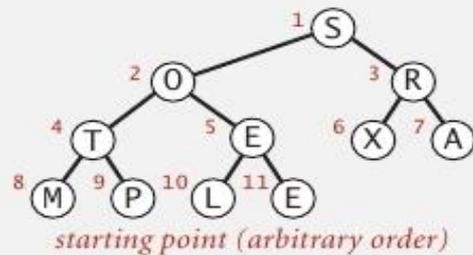
Пирамидальная сортировка

- [Конструктор пирамиды](#). Создать тах пирамиду восходящим методом
- Видео 2
- Видео 3

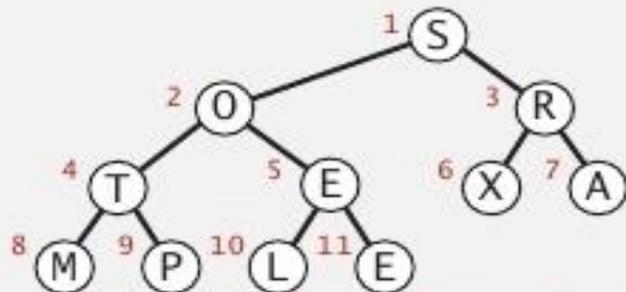
Пирамидальная сортировка: конструктор

- Первый проход. Создать пирамиду используя восходящий метод

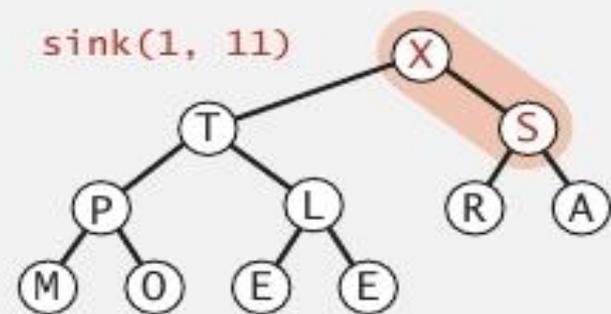
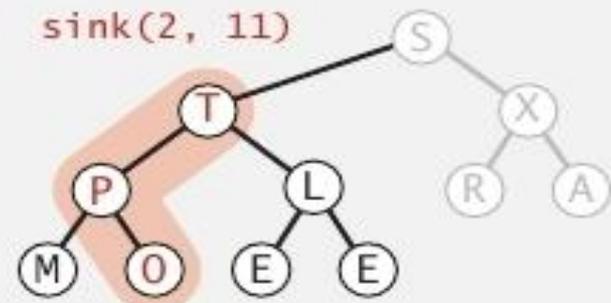
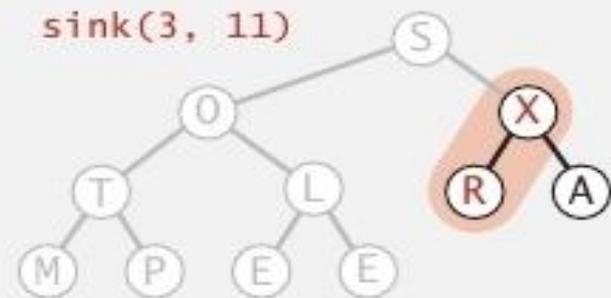
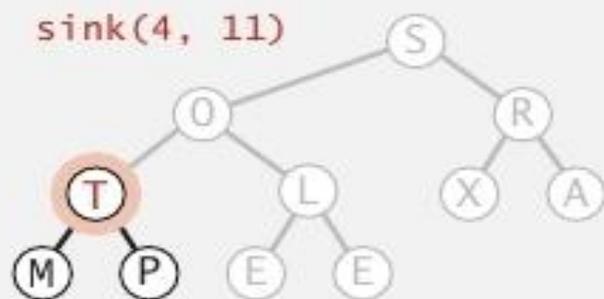
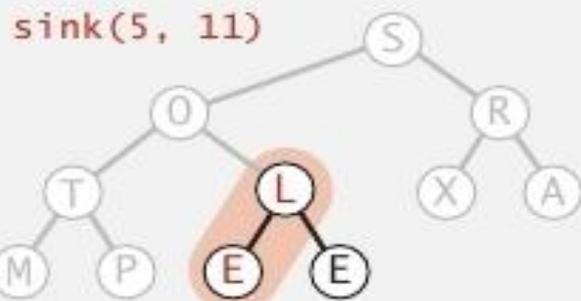
```
for (int k = N/2; k >= 1; k--)  
    sink(a, k, N);
```



```
for (int k = N/2; k >= 1; k--)
    sink(a, k, N);
```



starting point (arbitrary order)

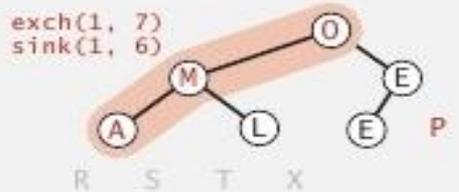
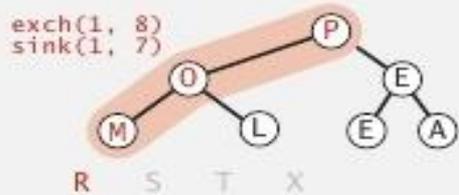
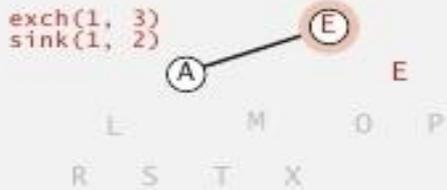
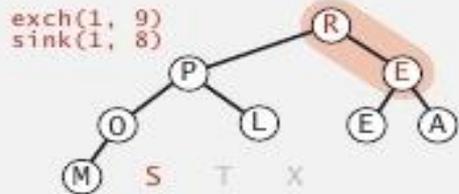
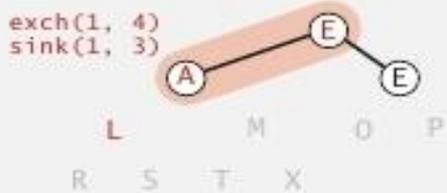
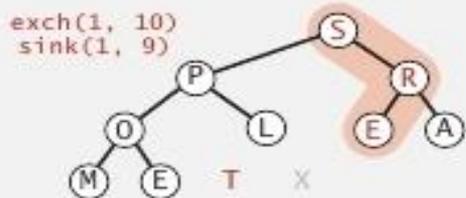
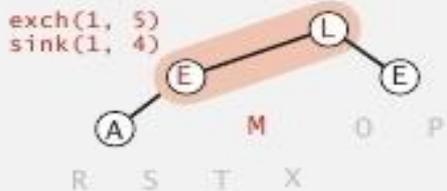
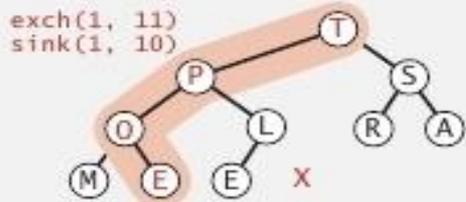
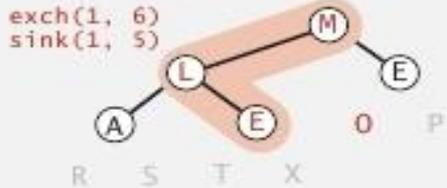
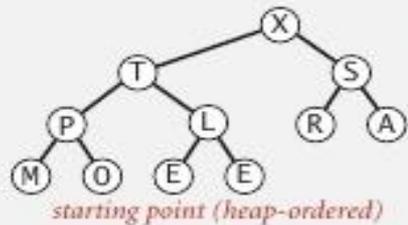


result (heap-ordered)

Пирамидальная сортировка

- Второй проход
 - Удалять максимум поочередно
 - Восстановить порядок в пирамиде

```
while (N > 1)
{
    exch(a, 1, N--);
    sink(a, 1, N);
}
```



Пирамидальная сортировка: реализация на Java

```
public class Heap
{
    public static void sort(Comparable[] a)
    {
        int N = a.length;
        for (int k = N/2; k >= 1; k--)
            sink(a, k, N);
        while (N > 1)
        {
            exch(a, 1, N);
            sink(a, 1, --N);
        }
    }

    private static void sink(Comparable[] a, int k, int N)
    { /* as before */ }

    private static boolean less(Comparable[] a, int i, int j)
    { /* as before */ }

    private static void exch(Comparable[] a, int i, int j)
    { /* as before */ }
}

but convert from
1-based indexing to
0-base indexing
```

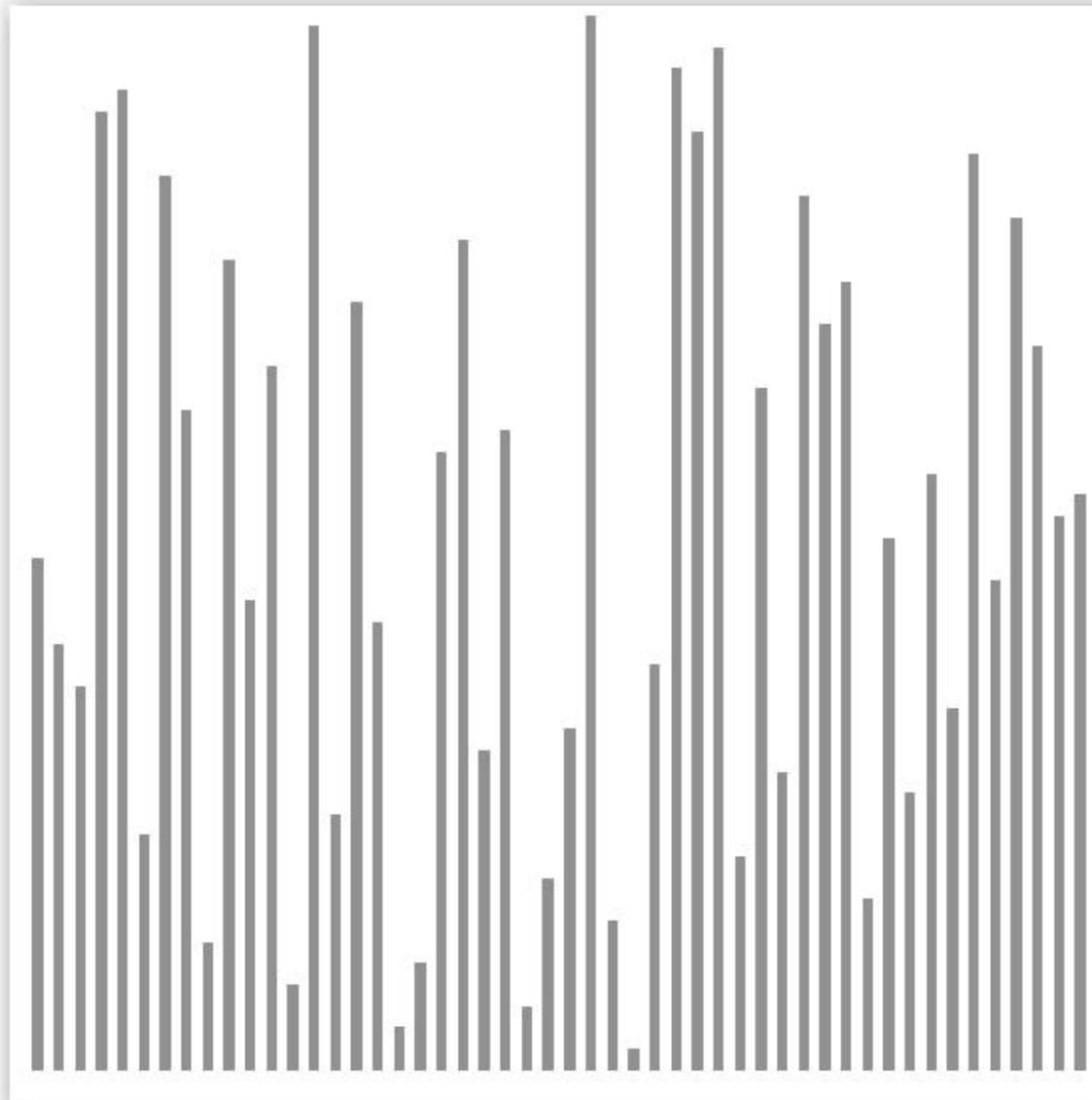
Пирамидальная сортировка

N	k	a[i]											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>initial values</i>		S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E	
11	5	S	O	R	T	L	X	A	M	P	E	E	
11	4	S	O	R	T	L	X	A	M	P	E	E	
11	3	S	O	X	T	L	R	A	M	P	E	E	
11	2	S	T	X	P	L	R	A	M	O	E	E	
11	1	X	T	S	P	L	R	A	M	O	E	E	
<i>heap-ordered</i>		X	T	S	P	L	R	A	M	O	E	E	
10	1	T	P	S	O	L	R	A	M	E	E	X	
9	1	S	P	R	O	L	E	A	M	E	T	X	
8	1	R	P	E	O	L	E	A	M	S	T	X	
7	1	P	O	E	M	L	E	A	R	S	T	X	
6	1	O	M	E	A	L	E	P	R	S	T	X	
5	1	M	L	E	A	E	O	P	R	S	T	X	
4	1	L	E	E	A	M	O	P	R	S	T	X	
3	1	E	A	E	L	M	O	P	R	S	T	X	
2	1	E	A	E	L	M	O	P	R	S	T	X	
1	1	A	E	E	L	M	O	P	R	S	T	X	
<i>sorted result</i>		A	E	E	L	M	O	P	R	S	T	X	

Heapsort trace (array contents just after each sink)

Пирамидальная сортировка

50 random items



▲ algorithm position
— in order
— not in order

<http://www.sorting-algorithms.com/heap-sort>

Пирамидальная сортировка: математический анализ

- Первый проход $\leq 2N$ сравнений и перестановок
- Второй проход $\leq 2N \log_2 N$ сравнений и перестановок
- Значение. Алгоритм, не требующий дополнительной памяти и работающий за $N \log N$ в худшем случае
 - Быстрая сортировка
 - Сортировка слиянием
- Нижняя граница. Пирамидальная сортировка оптимальна по памяти и по времени
 - Внутренний цикл длиннее, чем у Q-sort

Алгоритмы сортировки

	inplace?	stable?	worst	average	best	remarks
selection	x		$N^2 / 2$	$N^2 / 2$	$N^2 / 2$	N exchanges
insertion	x	x	$N^2 / 2$	$N^2 / 4$	N	use for small N or partially ordered
shell	x		?	?	N	tight code, subquadratic
quick	x		$N^2 / 2$	$2 N \ln N$	$N \lg N$	$N \log N$ probabilistic guarantee fastest in practice
3-way quick	x		$N^2 / 2$	$2 N \ln N$	N	improves quicksort in presence of duplicate keys
merge		x	$N \lg N$	$N \lg N$	$N \lg N$	$N \log N$ guarantee, stable
heap	x		$2 N \lg N$	$2 N \lg N$	$N \lg N$	$N \log N$ guarantee, in-place
???	x	x	$N \lg N$	$N \lg N$	$N \lg N$	holy sorting grail