

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Лектор -

старший преподаватель кафедры
экономической кибернетики и
информационных технологий

Мерлак Елена Валентиновна

ДИСКРЕТНОСТЬ

Дискрѐтность (от лат. *discretus* – разделѐнный, прерывистый) – свойство, противопоставляемое непрерывности, прерывность. Дискретность – всеобщее свойство материи, под дискретностью понимают:

- нечто, изменяющееся между несколькими различными стабильными состояниями подобно выключателю, который может быть либо включѐн, либо выключен;
- нечто, состоящее из отдельных частей, прерывистость, дробность.

ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

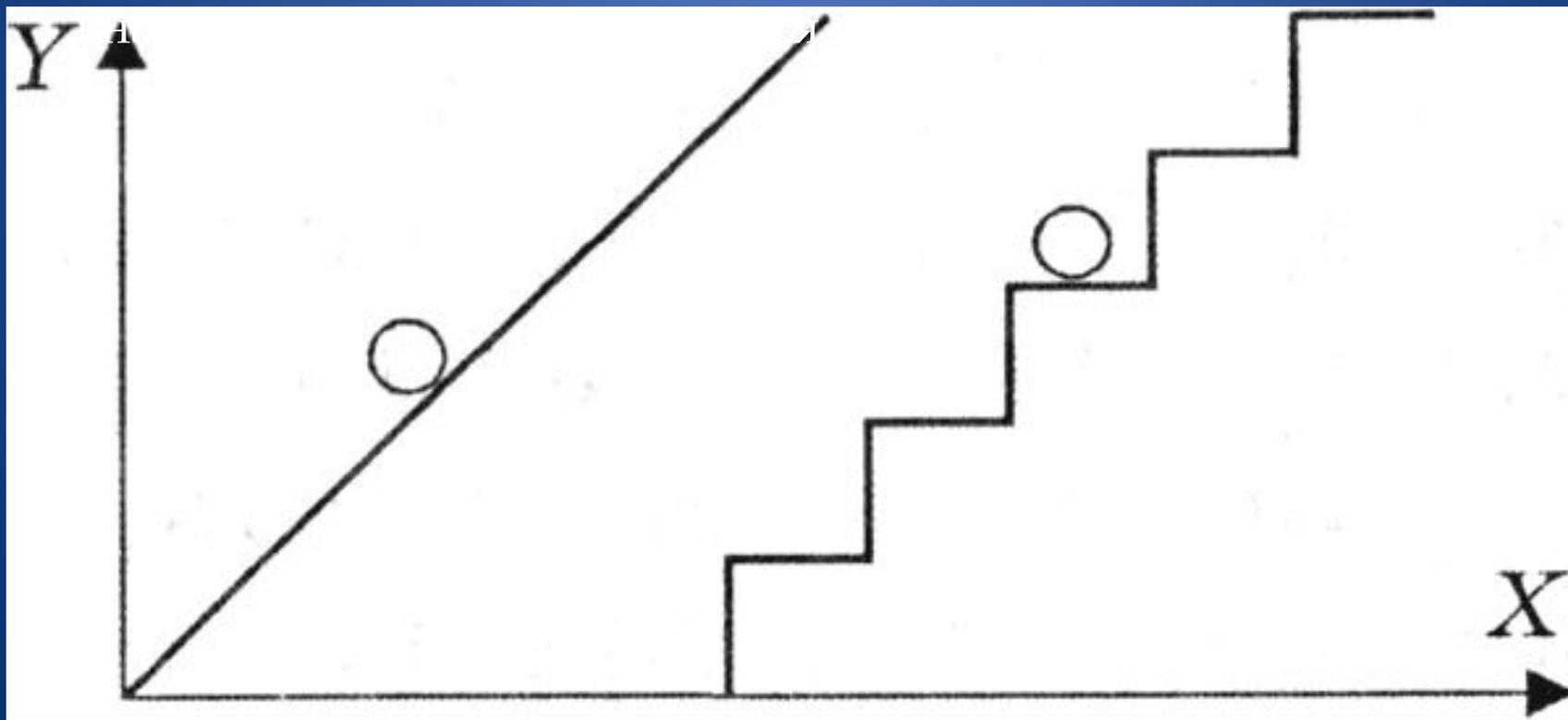
- Дискретная математика – дискретным называется счётное множество, эта концепция также важна в комбинаторике и теории вероятностей.
- Общая топология – дискретным называется множество, состоящее лишь из изолированных точек.
- Электротехника – *дискретный* означает «имеющий отдельные электронные компоненты», например, отдельные резисторы и индукторы. Это противопоставляется интегральным микросхемам.
- Теория информации и обработка сигналов – дискретный сигнал.
- В музыке *дискретная высота звука* – имеющая постоянную частоту, не плавающая, скользящая (глиссандо и портаменто).

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений. К числу таких конечных структур могут быть отнесены *конечные группы*, *конечные графы*, а также некоторые математические модели преобразователей дискретной информации, такие как *конечные автоматы*, *машины Тьюринга* и др. Также дискретная математика рассматривает произвольные дискретные структуры, к которым могут быть отнесены некоторые алгебраические системы, бесконечные графы, некоторые виды вычислительных сред (напр., однородные структуры) и т. п. В качестве синонима дискретной

Информация может быть представлена в *аналоговой* или *дискретной* форме. При аналоговом представлении физическая величина принимает бесконечное множество значений, причем ее значения изменяются непрерывно. При дискретном представлении физическая величина принимает конечное множество значений, причем ее величина изменяется скачкообразно.

Приведем пример аналогового и дискретного представления информации. Положение тела на наклонной плоскости и на лестнице задается значениями координат X и Y . При движении тела по наклонной плоскости его координаты могут принимать бесконечное множество непрерывно изменяющихся значений из определенного диапазона, а при движении по лестнице - только определенный набор



Преобразование графической и звуковой информации из аналоговой формы в дискретную производится путем *дискретизации*, то есть разбиения непрерывного (аналогового) графического изображения и непрерывного звукового сигнала на отдельные элементы. В процессе дискретизации производится кодирование, то есть присвоение каждому элементу конкретного значения в форме кода.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ (основные определения)

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством.

Объекты, объединенные одним общим свойством, называют элементами множества и обозначают $a, b, c, \dots x, y, z$. Множества обозначают $A, B, C, \dots X, Y, Z$.

Множество, число элементов которого конечно, называют конечным и бесконечным в противном случае.

Конечные множества разделяются на счетные и несчетные. Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется счетным и несчетным в противном случае. Так, множество четных чисел – счетное, множество действительных чисел – несчетное.

Конечные и счетные множества называются дискретными множествами.

Основные определения

Запись $a \in A$ означает, что элемент «а» принадлежит множеству A , $b \notin A$ означает, что элемент «b» не принадлежит множеству A .

Если каждый элемент множества A есть вместе с тем элемент множества B , то множество A называется подмножеством (включением) множества B и обозначается $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются равносильными (равными) и обозначаются $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется строгим подмножеством и обозначается $A \subset B$.

Следует различать принадлежность множеству и включение. Например, $A = \{1, 3, 6, 13\}$, то $3 \in A$, $6 \in A$, но $\{3, 6\} \notin A$. Рассмотрим пример. Пусть A, B, C - подмножества множества N : $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$. В этом случае $A = C$; $C \subseteq A$ и $A \subseteq C$, $B \subset A$.

Основные определения

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается \emptyset . Пустое множество считают конечным множеством и подмножеством любого множества.

Универсальное множество U – множество, содержащее все объекты и все множества, все множества являются подмножествами универсального.

Основные определения

Количество элементов в конечном множестве A называется мощностью множества A и обозначается $|A|$.

Множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества A , называется булеаном $P(A)$. Мощность булеана $|P(A)| = 2^{|A|}$. Пример:

$A = \{1,2,3\}$, $|A| = 3$, $P(A) =$
 $= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, $|P(A)| = 8$.

Способы задания множеств

Перечислением. Примеры:

множество простых чисел, меньше 10 $\{2,3,5,7\}$;

множество названий летних месяцев
 $\{\text{июнь, июль, август}\}$;

множество целых неотрицательных чисел,
меньше 100

$\{0,1,2,\dots,100\}$

Множество всех месяцев года

$\{\text{январь, февраль,}\dots,\text{декабрь}\}$.

Способы задания множеств

Описание свойств, которыми обладают элементы множества.

Общий вид:

$\{\text{Elem} \mid \text{условие на Elem}\}$, где

Elem – общий вид элемента множества, а после вертикальной черты описано условие, которому этот элемент должен удовлетворять.

Примеры

$\{n \mid (n \in \mathbb{N}) (10 \leq n \leq 1000)\}$ – множество
целых чисел в интервале от 10 до 1000;

$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ – множество квадратов
натуральных чисел;

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ – простое число}\}$ – множество
всех простых чисел.

Операции над множествами: объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B . Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$. Это определение равносильно следующему:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.

Определить $A \cup B$.

Решение: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Операции над множествами: пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B . Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Это определение равносильно следующему:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.

Определить $A \cap B$.

Решение: $A \cap B = \{2, 3, 7\}$.

Операции над множествами: разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат B . Разность множеств A и B обозначают $A - B$. Это определение равносильно следующему:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.

Определить $A - B$.

Решение: $A - B = \{5, 6\}$.

Операции над множествами: симметрическая разность

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из объединения элементов множества A , которые не принадлежат B с элементами множества B , которые не принадлежат A . Симметрическую разность множеств A и B обозначают $A+B$. Это определение равносильно следующему:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.

Определить $A + B$.

Решение: $A + B = \{1, 5, 6, 9\}$.

Операции над множествами: дополнения множества

Дополнением (абсолютным дополнением) множества A называется множество, состоящее из всех элементов универсального множества, которые не принадлежат A . Дополнение множества A обозначается \bar{A} . Это определение равносильно следующему:

$$\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Диаграммы Эйлера-Венна

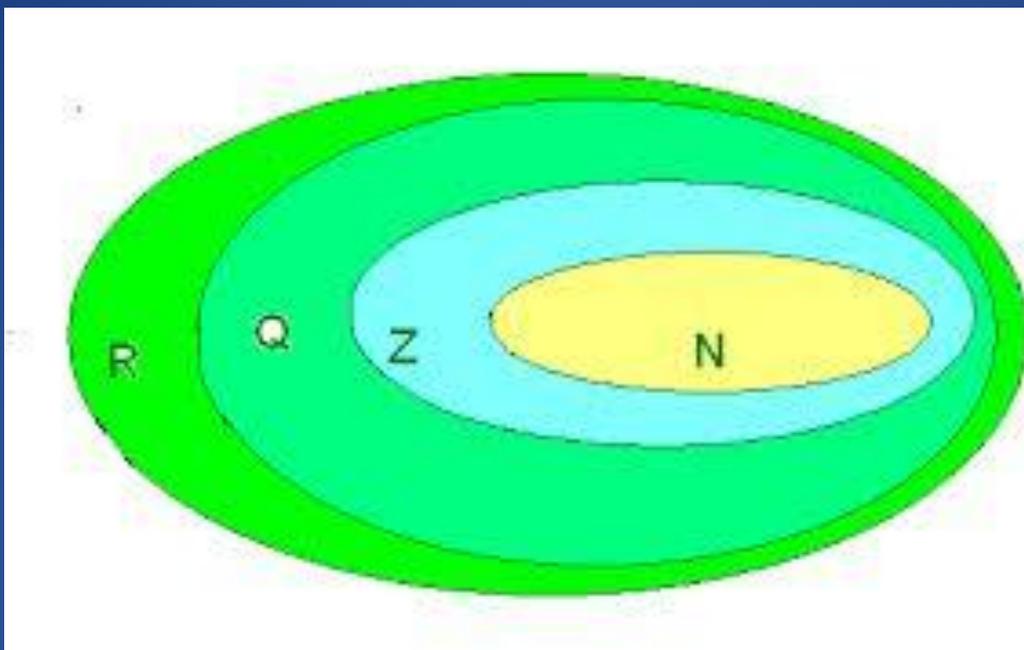
Для графической иллюстрации отношений между множествами данного универсального множества U используют диаграммы Эйлера-Венна.

Диаграмма Эйлера-Венна – это изображение множества в виде геометрического множества, например, круга. Универсальное множество отображают в виде прямоугольника.

ЛЕОНАРДО ЭЙЛЕР



15 апреля 1707, Базель, Швейцария – 18 сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) – швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Автор более 800 работ по мат. анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике,



N – множество натуральных чисел

Z – множество целых чисел

Q – множество рациональных чисел

R – множество всех действительных чисел

ДЖОН ВЕНН



4 августа 1834, Халл (Йоркшир) – 4 апреля 1923, Кембридж) – английский логик и философ. Он известен за введение диаграмм Венна, которые используется во многих областях, таких как теория множеств, теория вероятности, логика, статистика и

членом

Королевского общества, а также
был

удостоен степени Доктора наук
Кембриджа.

В столовой Кембриджа в его
память

установлен витраж с
изображением
диаграммы Венна.

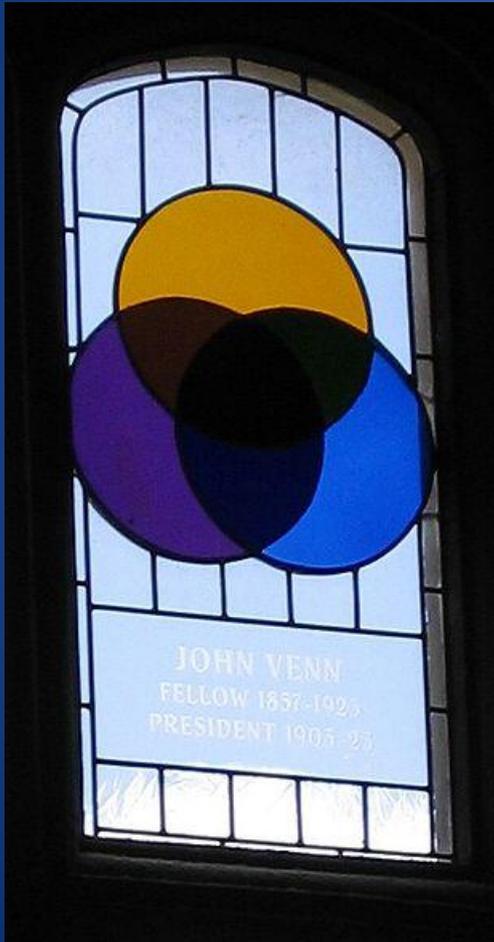
В университете города Халл в
1928 в

его честь было построено здание.

В ходе недавнего опроса ВВС,
Венн

был признан третьим
величайшим

математиком современности
после



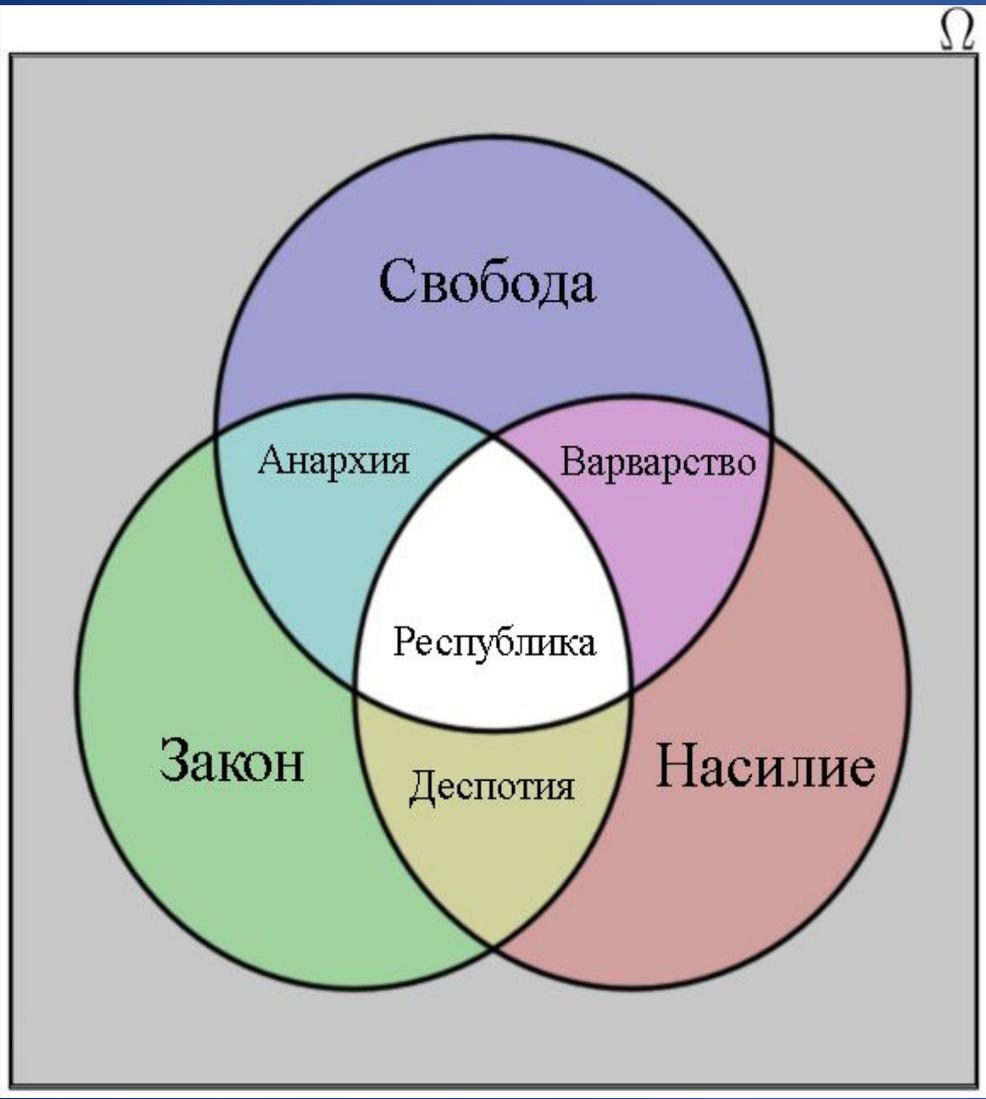


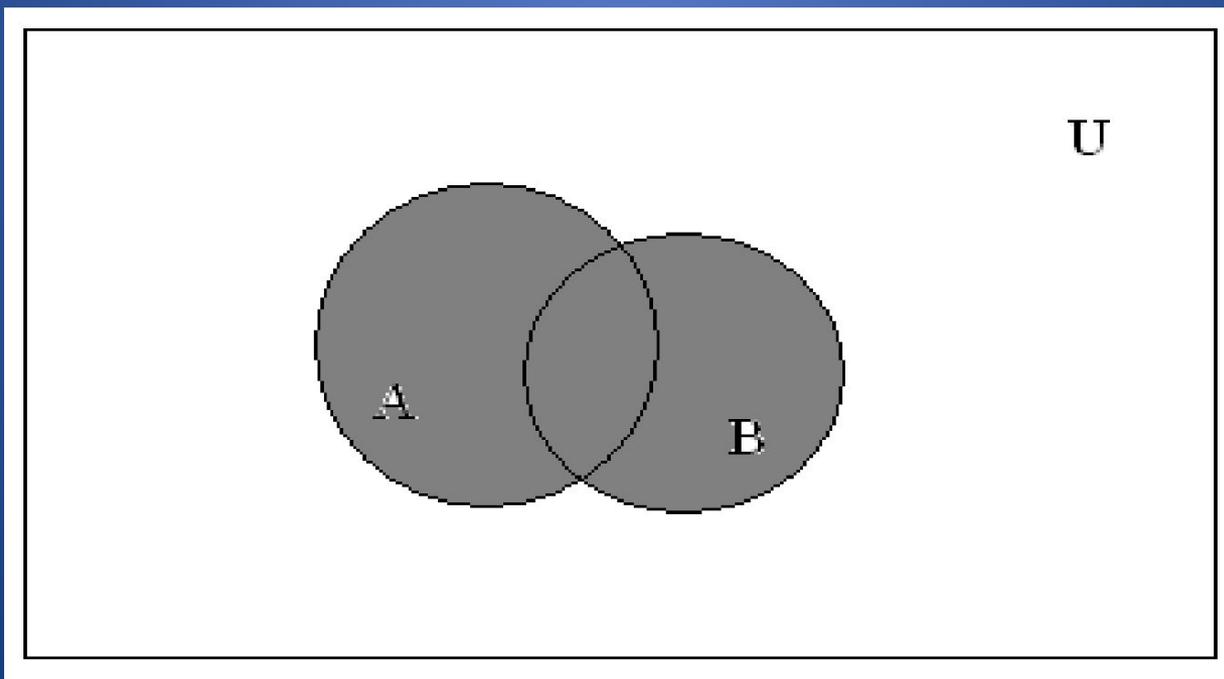
Диаграмма Венна, иллюстрирующая представления Канта формах государства.

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

• $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Найти $A \cup B$.

Решение: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

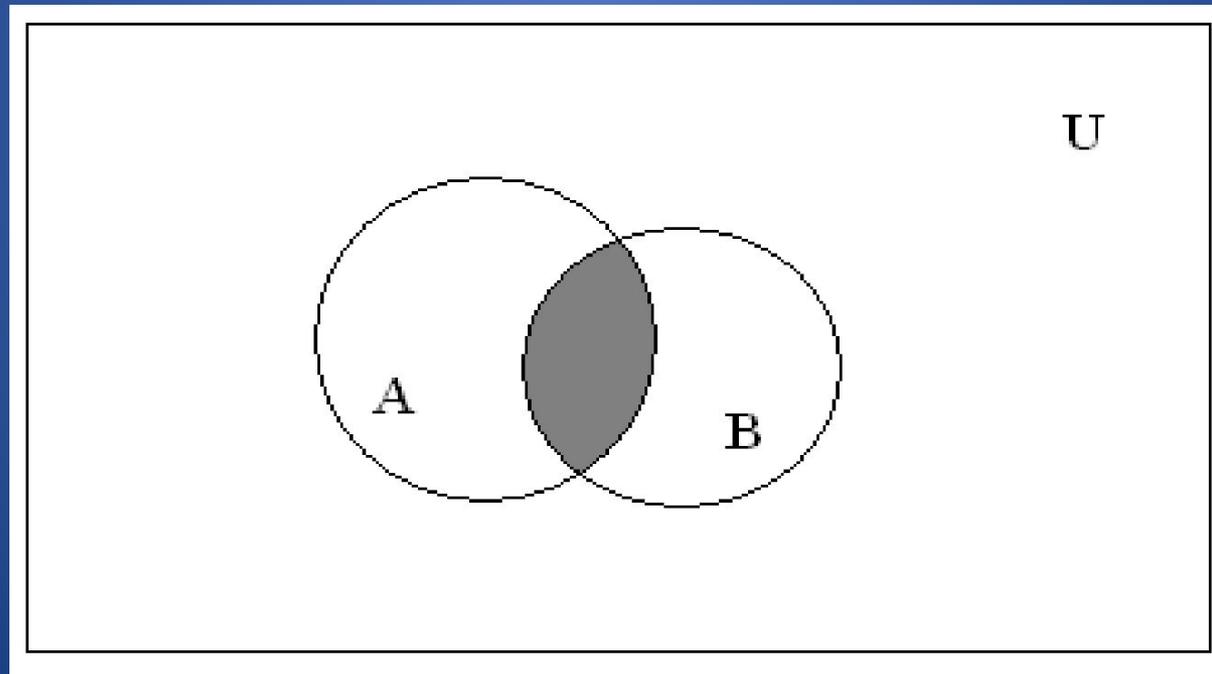


ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

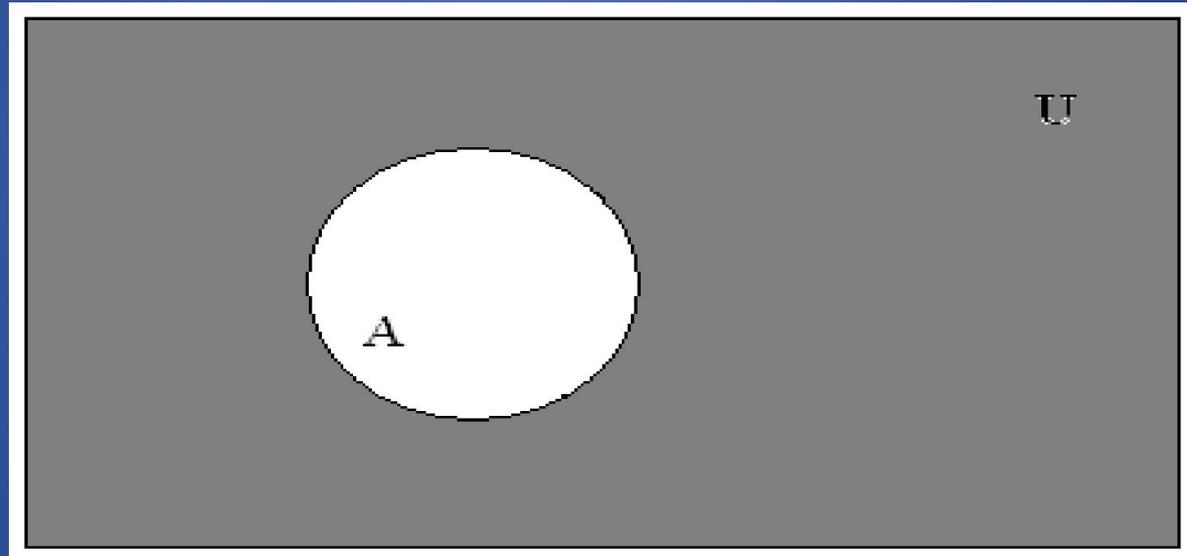
Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Найти $A \cap B$.

Решение: $A \cap B = \{2, 3, 7\}$.



ДОПОЛНЕНИЕ (АБСОЛЮТНОЕ) МНОЖЕСТВА

$$\bar{A} = U - A = \{x | x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

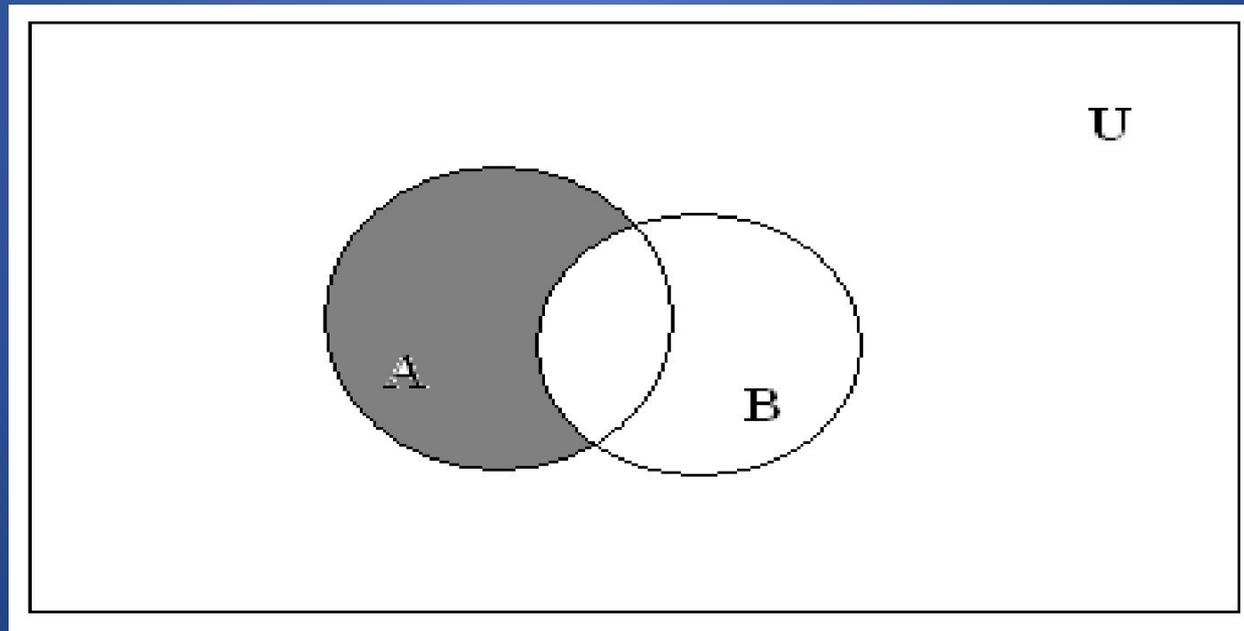


РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ (ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ)

$$A - B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Найти $A - B$.

Решение: $A - B = \{5, 6\}$.

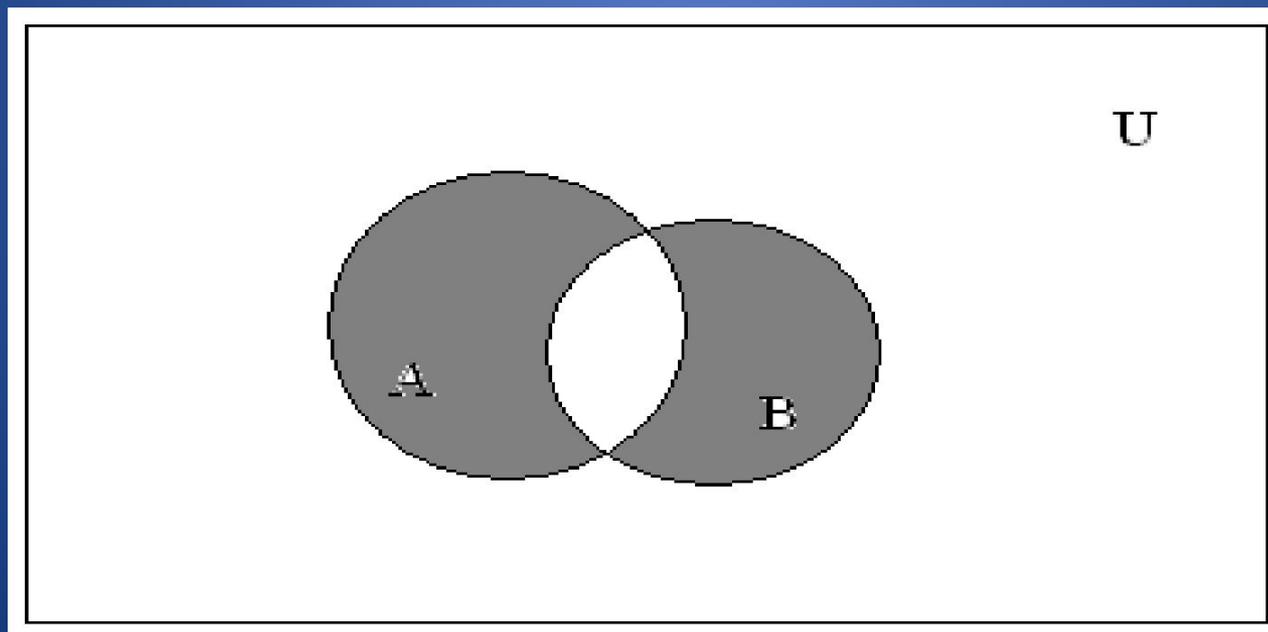


СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Пример. $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Найти $A + B$.

Решение: $A + B = \{1, 5, 6, 9\}$.



ДЛЯ РАССМОТРЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ ВЫПОЛНЯЮТСЯ ЗАКОНЫ

1. Законы идемпотентности: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

2. Двойное дополнение: $(\overline{\overline{A}}) = A$;

3. Законы де Моргана: $\overline{B \cap A} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{B \cup A} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

4. Свойства коммутативности: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$;

5. Свойства ассоциативности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

6. Свойства дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

7. Свойства тождественности: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$;

8. Свойства дополнения: $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

ПРИОРИТЕТ ОПЕРАЦИЙ

- 1 \bar{A} ;
- 2 $A \cap B$;
- 3 $A \cup B$ или $A - B$ (одинаковый приоритет);
- 4 $A + B$.

$A=\{1,3,5,7\}$; $B=\{1,2,6,9\}$;
 $C=\{2,3,4,8\}$; $D=\{2,6,10,11\}$

