Університет митної справи та фінансів

Вища та прикладна математика
Модуль: Математичне програмування та дослідження операцій

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ
2016

Тема 4: Основні аналітичні властивості задач ЛП. Канонічна форма

План

1. **Загальна постановка задачі ЛП.**
2. **Форми запису задач лінійного програмування (ЛП).**
3. **Основні аналітичні властивості розв′язків задач ЛП**.
4. **Канонічна форма загальної задачі ЛП.**
5. **Правила переходу від загальної задачі ЛП до канонічної.**
6. **Приклад зведення задачі ЛП до канонічної форми.**
7. **Властивості розв'язків задач ЛП.**

Загальна постановка задачі лінійного програмування

Знайти екстремум функції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (3)$$

Таким чином, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2) і (3), тоді як цільова функція набуває екстремального значення.

Форми запису задач лінійного програмування

1. За допомогою знака суми Σ.
2. Векторно-матрична форма.
3. Векторна форма.

Форми запису задач лінійного програмування

За допомогою знака суми Σ.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Форми запису задач лінійного програмування

Векторно-матрична форма.

$$z = CX \to \max$$

$$AX = A_0,$$

$$X \geq 0,$$

де $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$; $C = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)$.

Форми запису задач лінійного програмування

Векторна форма.

$$z = CX \to \max$$

за умов

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$

$$X \geq 0,$$

де $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2) і (3), називають ***допустимим розв'язком (планом)*** задачі ЛП (лінійного програмування).

Сукупність допустимих розв'язків задачі утворює ***область допустимих розв'язків*** задачі ЛП.

Опорним планом задачі ЛП називається план, утворений координатами вершин багатогранника планів задачі. Отже, опорний план – це план, який задовольняє не менш ніж n лінійно незалежних обмежень (2) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженням (3) щодо знака.

Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він є вершиною багатогранника планів задачі, утвореного перетином точно n гіперплощин, тобто задовольняє n лінійно незалежних обмежень – строгих рівностей. У противному разі опорний план є ***виродженим***.

Якщо задача ЛП має розв'язок і серед її планів є опорні, то хоча б один із них буде оптимальним.

Сукупність усіх розв'язків задачі ЛП є багатогранною опуклою множиною, яку називають ***багат окут ником розв'язків***.

Основні аналітичні властивості розв′язків задач лінійного програмування

Якщо задача ЛП має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в **одній** із вершин багатогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Канонічна форма загальної задачі лінійного програмування

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max \qquad (1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \qquad (3)$$

Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної

1. Цільову функцію необхідно максимізувати.
2. В системі обмежень всі праві частини невід'ємні.
3. Всі обмеження в системі є рівностями (явні).
4. Всі змінні мають невід'ємний характер.

Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної

Залишкова змінна. Нерівності типу "≤" зазвичай можна інтерпретувати як обмеження на використання деяких ресурсів. В нерівність вона входить зі знаком "+".

Надлишкова змінна. Нерівність типу "≥" показує на те, що "щось" повинно бути не менш за деяку величину. В нерівність вона входить зі знаком "–".

Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної

Вільна змінна. Можливі ситуації, коли змінні можуть приймати будь-які дійсні значення. Таким чином на неї на накладена умова невід'ємності. Для виконання п. 4 побудови канонічної форми кожну вільну за знаком змінну x_t необхідно замінити на $x_t = x_t' - x_t''$, де $x_t', \ x_t'' \geq 0$.

Приклад зведення задачі ЛП до канонічної форми

$$z = -2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \to \min \quad (4)$$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq -4, \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 5, \end{cases} \quad (5)$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (6)$$

Приклад зведення задачі ЛП до канонічної форми

Канонічна форма задачі (4)-(6):

$$-z = 2x_1 - 5\left(x_2' - x_2''\right) + 7x_3 \to \max \qquad (7)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 4\left(x_2' - x_2''\right) - 6x_3 = 3, \\ -3x_1 - 7\left(x_2' - x_2''\right) + 9x_3 + x_4 = 4, \\ 7x_1 - 3\left(x_2' - x_2''\right) + x_3 - x_5 = 5, \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0. \qquad (9)$$

Основні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Теорема 1. Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Теорема 2. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Основні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Теорема 3. Якщо відомо, що система векторів A_1, A_2, ... , A_k $(k \le n)$ у розкладі $A_1x_1+A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots , x_k, 0, \dots , 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ – кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$, що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

Основні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Наслідок 1. Оскільки вектори $A_1, A_2, ..., A_n$ мають розмірність m, то кутова точка багатокутника розв'язків має не більше, ніж m додатних компонентів $x_i > 0 \ (i = \overline{1,m})$.

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, ..., A_n$.

Висновок: якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то:

- існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;
- кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тема 5: Лінійне програмування. Симплекс-метод

План

1. **Симплекс-метод розв'язання задач ЛП.**
2. **Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП.**
3. **Правила перебудови симплекс-таблиці за методом Жордана-Гаусса.**
4. **Правило прямокутника перебудови симплексної таблиці.**
5. **Варіанти розв'язку задачі ЛП симплекс-методом.**
6. **Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом.**

Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного покращення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Алгоритм симплекс-методу завжди починається з деякого опорного розв’язку (плану) і потім намагається знайти інший опорний план, який покращує значення цільової функції.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

1. Визначення початкового опорного плану задачі ЛП.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок. Якщо план не оптимальний, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі, тобто розрахунок нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

На етапі визначення початкового опорного плану задачі ЛП, після її зведення до канонічної форми, шукаємо m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m-вимірного простору. Можливі такі випадки:

- є необхідна кількість одиничних векторів, тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;
- у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують метод штучного базису.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають ***базисними,*** а всі інші змінні – ***вільними***.

Базис	$C_{баз}$	План	c_1 / $\bar{A}_1$	c_2 / $\bar{A}_2$	c_3 / $\bar{A}_3$	c_4 / $\bar{A}_4$	… / …	c_n / $\bar{A}_n$	θ
$\bar{A}_l$	c_l	b_l	a_{l1}	a_{l2}	a_{l3}	a_{l4}		a_{ln}	
…									
$\bar{A}_k$	c_k	b_k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	a_{k4}		a_{kn}	
$\Delta_j \geq 0$			Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	…	Δ_n	

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

Теорема (ознака оптимальності опорного плану). Опорний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right)$ задачі ЛП є оптимальним, якщо для всіх j, $j = \overline{1,n}$ виконується умова

$\Delta_j \geq 0$ (для задачі на максимум),

де $\Delta_j = Z_j - c_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$, $j = \overline{1,n}$.

Оцінку Δ_j можна знайти з симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків "$С_{баз}$" та x_j мінус відповідний коефіцієнт c_j.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

- усі Δ_j, $j = \overline{1,n}$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;
- не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці Δ_j, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають **найбільшу за абсолютною величиною** і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Алгоритм симплекс-методу розв'язання задач ЛП

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} напрямного стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають **розв'язувальним елементом**. За допомогою елемента a_{rk} й методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Правила перебудови симплекс-таблиці за методом Жордана-Гаусса

1. Розв’язувальний (напрямний) рядок необхідно поділити на розв’язувальний елемент і здобуті числа записати у відповідний рядок симплексної таблиці.

2. Розв’язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв’язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

5. Усі інші елементи наступної симплекс-таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Правило прямокутника перебудови симплекс-таблиці

В симплексній таблиці складаємо умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 – розв'язувальний елемент;

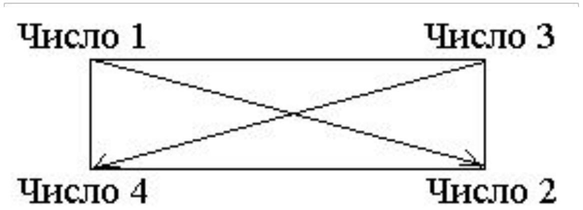
2 – число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 – елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2 - Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}},$$

де умовний прямокутник виглядатиме



Варіанти розв'язку задачі ЛП симплекс-методом

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то задача ЛП має **альтернативний оптимальний план**. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі ЛП **є необмеженою й оптимальних планів не існує**.

Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

$$z = 5x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Приведемо нашу задачу до канонічної форми.

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,6}$$

Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Система обмежень у векторній формі:

$$\overline{A_1}x_1 + \overline{A_2}x_2 + \overline{A_3}x_3 + \overline{A_4}x_4 + \overline{A_5}x_5 + \overline{A_6}x_6 = \overline{B},$$

де $\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{B} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Базис: $\overline{A_3}, \overline{A_4}, \overline{A_5}, \overline{A_6}$.

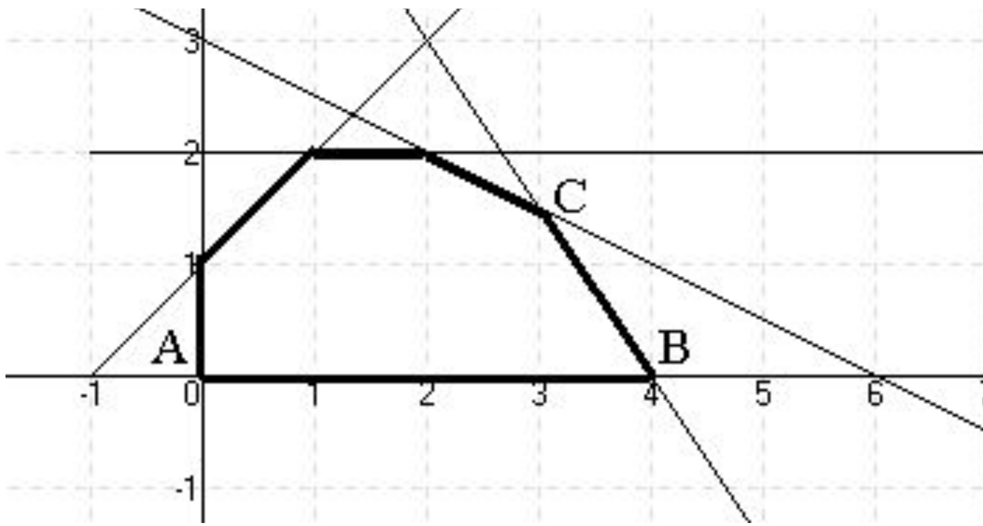
Початковий опорний план має вигляд

X = (0; 0; 24; 6; 1; 2).

Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Базис	$C_{баз}$	План	5	4	0	0	0	0	θ
			$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$	
$\overline{A}_3$	0	24	6	4	1	0	0	0	24/6
$\overline{A}_4$	0	6	1	2	0	1	0	0	6
$\overline{A}_5$	0	1	–1	1	0	0	1	0	–
$\overline{A}_6$	0	2	0	1	0	0	0	1	–
Δ_j		0	–5	–4	0	0	0	0	

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1,6}.$$



Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Базис	$C_{баз}$	План	5 $\overline{A}_1$	4 $\overline{A}_2$	0 $\overline{A}_3$	0 $\overline{A}_4$	0 $\overline{A}_5$	0 $\overline{A}_6$	θ
$\overline{A}_3$	0	24	6	4	1	0	0	0	24/6
$\overline{A}_4$	0	6	1	2	0	1	0	0	6
$\overline{A}_5$	0	1	–1	1	0	0	1	0	–
$\overline{A}_6$	0	2	0	1	0	0	0	1	–
Δ_j		0	–5	–4	0	0	0	0	

Базис	$C_{баз}$	План	5 $\overline{A}_1$	4 $\overline{A}_2$	0 $\overline{A}_3$	0 $\overline{A}_4$	0 $\overline{A}_5$	0 $\overline{A}_6$	θ
$\overline{A}_1$	5	4	1	2/3	1/6	0	0	0	6
$\overline{A}_4$	0	2	0	4/3	–1/6	1	0	0	9/2
$\overline{A}_5$	0	5	0	5/3	1/6	0	1	0	3/5
$\overline{A}_6$	0	2	0	1	0	0	0	1	2
Δ_j		20	0	–2/3	5/6	0	0	0	

Отримали новий опорний план

$x=(4; 0; 0; 2; 5; 2).$

Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Базис	$C_{баз}$	План	5 $\overline{A}_1$	4 $\overline{A}_2$	0 $\overline{A}_3$	0 $\overline{A}_4$	0 $\overline{A}_5$	0 $\overline{A}_6$	θ
$\overline{A}_1$	5	4	1	2/3	1/6	0	0	0	6
$\overline{A}_4$	0	2	0	4/3	–1/6	1	0	0	9/2
$\overline{A}_5$	0	5	0	5/3	1/6	0	1	0	3/5
$\overline{A}_6$	0	2	0	1	0	0	0	1	2
Δ_j		20	0	–2/3	5/6	0	0	0	

Базис	$C_{баз}$	План	5 $\overline{A}_1$	4 $\overline{A}_2$	0 $\overline{A}_3$	0 $\overline{A}_4$	0 $\overline{A}_5$	0 $\overline{A}_6$	θ
$\overline{A}_1$	5	3	1	0	1/4	–1/2	0	0	
$\overline{A}_2$	4	3/2	0	1	–1/8	3/4	0	0	
$\overline{A}_5$	0	5/2	0	0	3/8	–5/4	1	0	
$\overline{A}_6$	0	1/2	0	0	1/8	–3/4	0	1	
Δ_j		21	0	0	3/4	1/2	0	0	

Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Базис	$C_{баз}$	План	5 $\bar{A}_1$	4 $\bar{A}_2$	0 $\bar{A}_3$	0 $\bar{A}_4$	0 $\bar{A}_5$	0 $\bar{A}_6$	θ
$\bar{A}_1$	5	3	1	0	1/4	–1/2	0	0	
$\bar{A}_2$	4	3/2	0	1	–1/8	3/4	0	0	
$\bar{A}_5$	0	5/2	0	0	3/8	–5/4	1	0	
$\bar{A}_6$	0	1/2	0	0	1/8	–3/4	0	1	
Δ_j		21	0	0	3/4	1/2	0	0	

Оптимальний план задачі:

$$X^* = (3;\ 3/2;\ 0;\ 0;\ 5/2;\ 1/2),$$

$$z_{max} = 5*3 + 4*3/2 = 21.$$

Відповідь: $X^* = (3;\ 3/2)$, $z_{max} = 21$.

Тема 6: Двоїстість у задачах лінійного програмування

План

1. Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування.
2. Приклад побудови двоїстої задачі лінійного програмування.
3. Основні теореми двоїстості.
4. Економічний зміст основних теорем двоїстості.
5. Аналіз задачі на чутливість.

Постановка задачі лінійного програмування (пряма задача)

Кожній задачі ЛП відповідає двоїста, що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, j = (\overline{1,n}). \qquad (3)$$

Економічний зміст прямої задачі

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = (\overline{1,n}). \qquad (3)$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, який дає найбільший прибуток.

Постановка задачі лінійного програмування (двоїста задача)

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \quad (5)$$

$$y_i \geq 0, i = (\overline{1, m}) \quad (6)$$

Економічний зміст двоїстої задачі

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \qquad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_i \geq 0, i = (\overline{1, m}) \qquad (6)$$

Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i–го ресурсу, їх інколи ще називають **тіньовою ціною** відповідного ресурсу.

Постановка пари двоїстих задач у матрично-векторній формі

Зауваження. Усі обмеження-нерівності вхідної задачі повинні мати однаковий сенс: для задачі на максимум – "$\le$", для задачі на мінімум – "$\ge$".

Пряма задача: $\max F = CX$,

$$AX \le B,$$

$$X \ge 0.$$

Двоїста задача: $\min Z = BY$,

$$A^T Y \ge C,$$

$$Y \ge 0.$$

Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення, то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення, і навпаки.

Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

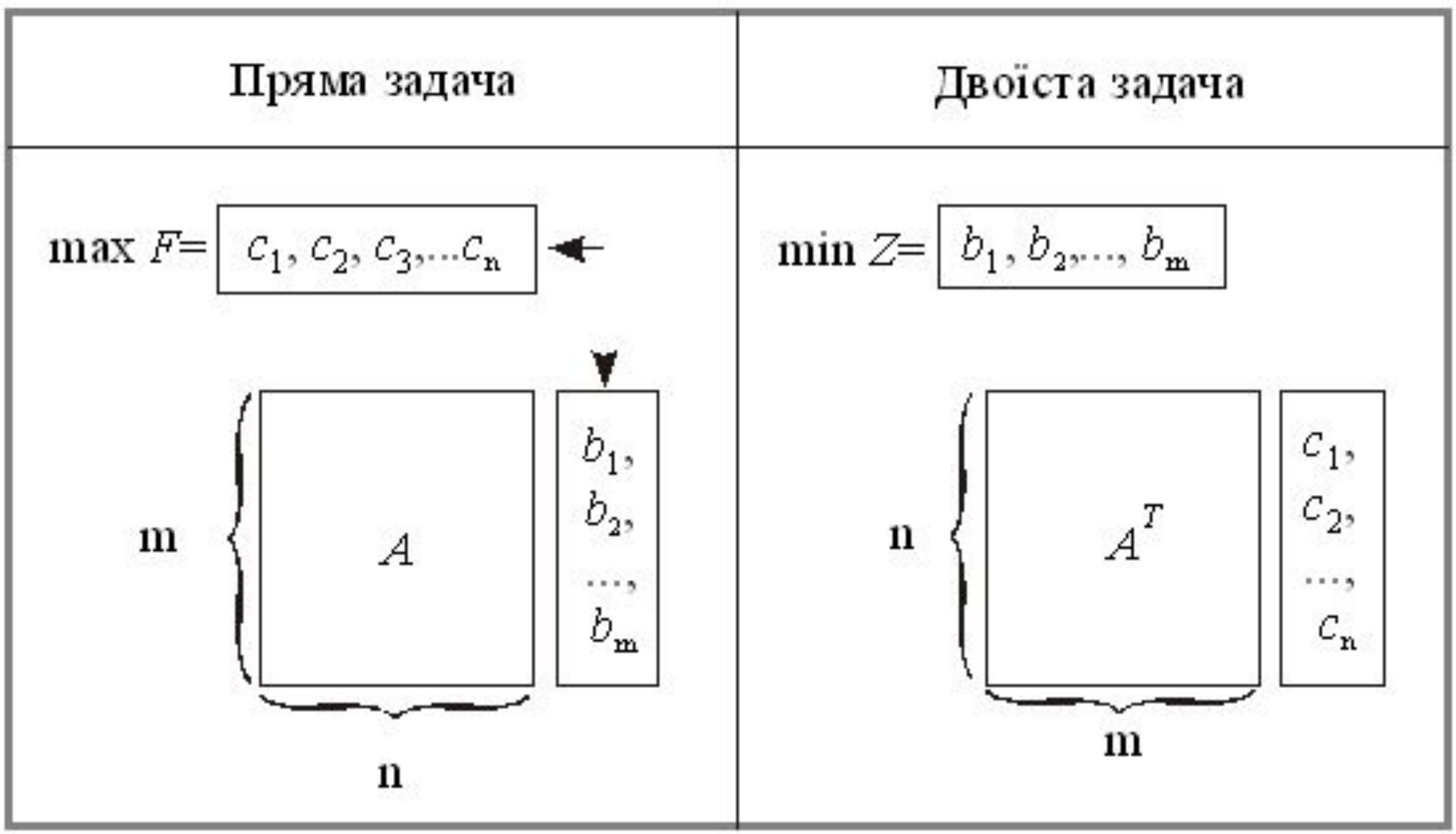
6. Матриця, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками.

Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування

7. Якщо змінній двоїстої задачі відповідає обмеження прямої задачі у формі рівняння, то така змінна вільна за знаком. Якщо відповідає нерівність, тоді змінна двоїстої задачі невід′ємна.

8. Якщо змінна прямої задачі вільна за знаком, то відповідне обмеження двоїстої задачі має форму рівняння. Якщо змінна невід′ємна, то відповідне обмеження двоїстої задачі має форму нерівності.

Схема побудови двоїстої задачі лінійного програмування



Приклад побудови двоїстої задачі лінійного програмування

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приклад побудови двоїстої задачі лінійного програмування

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

$$\min F = -y_1 + 5y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5; \\ -y_1 + 3y_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Основні теореми двоїстості

Лема 1. (основна нерівність теорії двоїстості). Якщо $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ та $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ – допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X)\le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \qquad (7)$$

Лема 2. (достатня умова оптимальності). Якщо $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ та $Y^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_m^*)$ – допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*)=Z(Y^*) \qquad (8)$$

то X^*, Y^* – оптимальні розв'язки відповідних задач.

Основні теореми двоїстості (І теорема двоїстості)

Перша теорема двоїстості. Якщо пряма задача ЛО має оптимальний план, то двоїста задача також має оптимальний план, причому значення їх цільових функцій співпадають

$$\max F = \min Z .$$

Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то інша задача також не має розв'язку.

Економічний зміст І теореми двоїстості

Максимальний прибуток $(F_{\max})$ підприємство отримує при виробництві продукції за оптимальним планом $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, однак ту саму суму коштів $(Z_{\min} = F_{\max})$ воно може отримати реалізуючи ресурси за оптимальними цінами $Y_{opt} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}, Y \neq Y_{opt}$, виходячи з основної нерівності теорії двоїстості, доходи від реалізації продукції завжди менші ніж витрати на її виробництво.

Економічний зміст І теореми двоїстості

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ + x_{n+2} \ = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m. \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_m \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} \quad = c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ - y_{m+2} \ = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \quad - y_{m+n} = c_n. \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{array}\right.$$

Економічний зміст I теореми двоїстості

Основні змінні прямої задачі

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & & x_k & & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+k} & & y_{m+n} \end{array}$$

Додаткові змінні двоїстої задачі

Додаткові змінні прямої задачі

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & x_{n+2} & & x_{n+l} & & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & & y_l & & y_m \end{array}$$

Основні змінні двоїстої задачі

Основні теореми двоїстості (наслідок з І теореми двоїстості)

Якщо пряма задача ЛО має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \overrightarrow{c_{баз}} D^{-1},$$

де $\overrightarrow{c_{баз}}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D^{-1} – матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового плану задачі.

Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпцях, де в першій таблиці містилась одинична матриця.

Приклад (застосування наслідку з I теореми двоїстості)

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ, год

Тип обладнання	Тривалість обробки одиниці продукції виду			Тривалість роботи обладнання на місяць
	A	B	C	
I	1	2	4	360
II	2	4	2	520
III	1	1	2	220

Ціна одиниці продукції видів *A, B* і *C* дорівнює 90 дол., 110 дол. та 150 дол. відповідно.

Приклад (застосування наслідку з I теореми двоїстості)

$$\max F = 90x_1 + 110x_2 + 150x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 220, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

$$\max F = 90x_1 + 110x_2 + 150x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 220, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Приклад (застосування наслідку з I теореми двоїстості)

Базис	$C_{баз}$	План	90 $\bar{A}_1$	110 $\bar{A}_2$	150 $\bar{A}_3$	0 $\bar{A}_4$	0 $\bar{A}_5$	0 $\bar{A}_6$	θ
$\bar{A}_4$	0	360	1	2	4	1	0	0	90
$\bar{A}_5$	0	520	2	4	2	0	1	0	260
$\bar{A}_6$	0	220	1	1	2	0	0	1	110
Δ_j		0	-90	-110	-150	0	0	0	

Базис	$C_{баз}$	План	90 $\bar{A}_1$	110 $\bar{A}_2$	150 $\bar{A}_3$	0 $\bar{A}_4$	0 $\bar{A}_5$	0 $\bar{A}_6$
$\bar{A}_4$	0	100	0	0	3	1	-1/2	0
$\bar{A}_2$	110	40	0	1	-1	0	1/2	-1
$\bar{A}_1$	90	180	1	0	3	0	-1/2	2
Δ_j		20600	0	0	10	0	10	70

Приклад (застосування наслідку з І теореми двоїстості)

Базис	$C_{баз}$	План	90 $\overline{A}_1$	110 $\overline{A}_2$	150 $\overline{A}_3$	0 $\overline{A}_4$	0 $\overline{A}_5$	0 $\overline{A}_6$
$\overline{A}_4$	0	100	0	0	3	1	-1/2	0
$\overline{A}_2$	110	40	0	1	-1	0	1/2	-1
$\overline{A}_1$	90	180	1	0	3	0	-1/2	2
Δ_j		20600	0	0	10	0	10	70

$$\min Z = 360y_1 + 520y_2 + 220y_3,$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 90, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 110, \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 150, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\min} = 10 \cdot 520 + 70 \cdot 220 = 20600$$

Аналіз двоїстих оцінок

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі (**дефіцитний**, **недефіцитний**) та рентабельність продукції, що виготовляється (**рентабельна, нерентабельна**).

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0
			$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$	$\overline{A}_4$	$\overline{A}_5$	$\overline{A}_6$
$\overline{A}_4$	0	100	0	0	3	1	-1/2	0
$\overline{A}_2$	110	40	0	1	-1	0	1/2	-1
$\overline{A}_1$	90	180	1	0	3	0	-1/2	2
Δ_j		20600	0	0	10	0	10	70

Основні теореми двоїстості (II теорема двоїстості)

Теорема про доповнюючу нежорсткість (для симетричних задач). Для того, щоб плани X^* та Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n}, \quad (9)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0,\ j = \overline{1,m}. \quad (10)$$

Економічний зміст II теореми двоїстості

Якщо для виготовлення всієї продукції в кількості, що визначається оптимальним планом X^* витрати одного i-го ресурсу строго менші ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу $y_i^* = 0$ (компонента оптимального плану двоїстої задачі), тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його кількості b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва і його оцінка y_i^* буде строго більше нуля.

Економічний зміст II теореми двоїстості

Для оптимального плану двоїстої задачі Y^*: у випадку коли деяке *j*-те обмеження виконується, як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці *j*-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі кількість такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво *j*-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, її необхідно виготовляти в кількості, що визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

Наслідок II теореми двоїстості

Наслідок другої теореми двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Приклад (застосування наслідку з II теореми двоїстості)

$$\max F = 90x_1 + 110x_2 + 150x_3, \qquad \min Z = 360y_1 + 520y_2 + 220y_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 220, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 90, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 110, \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 150, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3. \qquad y_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3.$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 180 & 40 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 70 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* + 4x_3^* = 180 + 80 = 260 < 360, \ \Rightarrow y_1^* = 0, \\ 2x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 360 + 160 = 520 = 520, \\ x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 180 + 40 = 220 = 220, \end{cases}$$

$$x_1^* > 0 \Rightarrow y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = 90,$$

$$x_2^* > 0 \Rightarrow 2y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 110.$$

Основні теореми двоїстості (III теорема двоїстості)

Третя теорема двоїстості. Компоненти оптимального плану двоїстої задачі $y_i^*,\ (i=\overline{1,m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ по відповідним аргументам $b_i,\ (i=\overline{1,m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \quad (i = 1,2,...,m). \tag{11}$$

Економічний зміст III теореми двоїстості

Використовуючи третю теорему двоїстості легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення (зменшення) обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують на яку величину змінюється цільова функція при зміні обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \dfrac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Таким чином, при малій зміні b_i замість задачі (1)-(3) маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$.

Аналіз задачі на чутливість

Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

- склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;
- склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;
- змінюється склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

Аналіз задачі на чутливість. Алгоритм

1. Формулюємо математичну модель задачі лінійного програмування та двоїсту до неї.
2. Записуємо оптимальні плани прямої та двоїстої задач і робимо їх економічний аналіз.
3. Визначаємо статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно запасів дефіцитних ресурсів.
4. Визначаємо план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо збільшувати запас кожного ресурсу.
5. Визначаємо рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.
6. Розраховуємо інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Список літератури

Основна:

1. **Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
2. Исследование операций в экономике :учеб. пособие / под. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи; ЮНИТИ, 1999.
3. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
4. **Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.

Додаткова:

1. **Вітлінський В. В.** Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К., 2001.
2. **Кузнецов А. В.** Математическое программирование / А. В. Кузнецов и др. – М.: Высшая школа, 1994.
3. Исследование операций в экономике. Учеб. пособие для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридмак; Под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2004. – 407с.
4. **Бережная Е. В.** Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М., 2002.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайнбегов и др. – М., 1999.