

Університет митної справи та фінансів

# **Вища та прикладна математика**

## **Модуль: Математичне програмування та дослідження операцій**

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ

2016

# Тема 7: Метод штучного базису

## М-метод

### План

1. Умова застосування М-методу
2. Правила введення штучних змінних.
3. Алгоритм М-методу.
4. Приклад.

# Умова застосування М-методу

Під час розв'язування задачі лінійної оптимізації симплекс-методом можлива ситуація, коли при визначенні початкового опорного плану в системі обмежень немає необхідної кількості одиничних лінійно-незалежних векторів.

Для побудови початкового плану застосовують *метод штучного базису*.

# Ідея застосування М-методу

Ідея полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом  $+1$ , що називаються штучними.

# Правила введення штучних змінних

У цільовій функції задачі лінійної оптимізації штучні змінні мають коефіцієнт

$-M$  (для задачі на максимум),

де  $M$  – досить велике додатне число.



# Алгоритм М-методу

Значення оцінок опорного плану в симплексній таблиці складаються з двох частин: одна містить  $M$ , а інша – просто число. Тому розбиваємо рядок оцінок у таблиці на два: у перший записуємо просто число, а в другий – коефіцієнт при  $M$ .

Якщо опорний план не є оптимальним, тоді при визначенні змінної, яка буде вводиться до базису, спочатку дивимось на другий рядок оцінок. Коли в ньому всі оцінки відповідають умові оптимальності, тоді переглядаємо перший рядок оцінок.

# Алгоритм М-методу

У разі якщо штучна змінна вийшла з базису, відповідний стовпець можна не писати в симплексній таблиці. Коли всі штучні змінні вийшли з базису, тоді можна не писати другий рядок оцінок і далі розв'язувати задачу звичайним симплексним методом.

Під час визначення оптимальності опорного плану можлива ситуація, коли всі оцінки  $\Delta_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, – це означає, що система обмежень задачі не сумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Спочатку запишемо задачу в канонічній формі:

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \rightarrow \max$$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 18x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$



# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Векторна форма запису системи обмежень матиме вигляд:

$$\vec{x}_1 A_1 + \vec{x}_2 A_2 + \vec{x}_3 A_3 + \vec{x}_4 A_4 + \vec{x}_5 A_5 = \vec{A}_0,$$

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 18 \\ -21 \\ -43 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Розглянемо розширену задачу лінійного програмування:

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 18x_4 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 + x_7 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 + x_8 = 38, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,8}.$$

Штучні змінні  $x_6$ ,  $x_7$ ,  $x_8$  мають у цільовій функції  $z$  коефіцієнт  $-M$ , де  $M$  – досить велике число.

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Складемо першу симплексну таблицю задачі:

Базис	$C_{\text{Баз}}$	План	2	-1	1	-3	4	-M	-M	-M	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	↓ $x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_6$	-M	4	-1	1	-3	18	-2	1	0	0	-
$x_7$	-M	22	2	-1	4	-21	4	0	1	0	11/2
← $x_8$	-M	38	3	-2	8	-43	11	0	0	1	38/11
$\Delta_j$		0	-2	1	-1	3	-4	0	0	0	
		-64M	-4M	2M	-9M	46M	-13M	0	0	0	

# Приклад розв'язання задачі за допомогою M-методу

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, одержимо  $\Delta_0 = z_0 = 0 - 64M$ ,  $\Delta_1 = -2 - 4M$ ,  $\Delta_2 = 1 + 2M$  і т. д. Як бачимо, значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить  $M$ , а інша – просто число. Тому для зручності розбиваємо рядок оцінок на два. У перший записуємо просто число, а в другий – число з коефіцієнтом  $M$ .

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він неоптимальний. Згідно з алгоритмом симплекс-методу, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі.

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Подальше розв'язування задачі наведемо у вигляді таблиць:

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	2	-1	1	-3	4	-M	-M	-M	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_6$ ←	-M	$\frac{120}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{17}{11}$	$\frac{112}{11}$	0	1	0	-	
$x_7$	-M	$\frac{90}{11}$	$\frac{10}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{12}{11}$	$-\frac{59}{11}$	0	0	1	-	-
$x_5$	4	$\frac{38}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{8}{11}$	$-\frac{43}{11}$	1	0	0	-	-
$\Delta_j$		$\frac{152}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{21}{11}$	$-\frac{139}{11}$	0	0	0	-	
		$-\frac{210}{11}M$	$-\frac{5}{11}M$	$-\frac{4}{11}M$	$\frac{5}{11}M$	$-\frac{53}{11}M$	0	0	0	-	

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Базис	$C_{\text{Баз}}$	План	2	-1	1	-3	4	-M	-M	-M	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_4$	-3	$\frac{120}{112}$	$-\frac{5}{112}$	$\frac{7}{112}$	$-\frac{17}{112}$	1	0	-	0	-	-
$x_7$ ←	-M	$\frac{1560}{112}$	$\frac{75}{112}$	$\frac{7}{112}$	$\frac{31}{112}$	0	0	-	1	-	$\frac{104}{5}$
$x_5$	4	$\frac{856}{112}$	$\frac{11}{112}$	$\frac{7}{112}$	$\frac{15}{112}$	0	1	-	0	-	$\frac{856}{11}$
$\Delta_j$		$\frac{3064}{112}$	$-\frac{165}{112}$	$\frac{119}{112}$	$-\frac{1}{112}$	0	0	-	0	-	
		$-\frac{1560}{112}M$	$-\frac{75}{112}M$	$-\frac{7}{112}M$	$-\frac{31}{112}M$	0	0	-	0	-	

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	2	-1	1	-3	4	-M	-M	-M	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_4$	-3	2	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	1	0	-	-	-	
$x_1$	2	$\frac{104}{5}$	1	$\frac{7}{75}$	$\frac{31}{75}$	0	0	-	-	-	
$x_5$	4	$\frac{28}{5}$	0	$\frac{4}{75}$	$\frac{7}{75}$	0	1	-	-	-	
$\Delta_j$		58	0	$\frac{62}{75}$	$\frac{3}{5}$	0	0	-	-	-	
		0	0	0	0	0	0	-	-	-	

# Приклад розв'язання задачі за допомогою М-методу

Зауважимо, що коли штучна змінна була виведена з базису, то в наступній симплекс-таблиці не потрібно підраховувати відповідний стовпець.

Оптимальним планом є вектор  $X^* = \left( \frac{104}{5}, 0, 0, 2, \frac{28}{5} \right)$ , причому  $z(X^*) = 58$ .

**Відповідь:**  $z(X^*) = 58$ ,  $X^* = \left( \frac{104}{5}, 0, 0, 2, \frac{28}{5} \right)$ .



# Тема 8: Методика розв'язування транспортних задач

## План

1. Постановка транспортної задачі
2. Умова існування розв'язку транспортної задачі
3. Алгоритм розв'язування транспортної задачі за загальним критерієм вартості
4. Методи пошуку опорного початкового плану
5. Метод потенціалів для розв'язування транспортної задачі

# Постановка транспортної задачі

Транспортні задачі – спеціальний клас задач лінійної оптимізації. Ці задачі найчастіше описують перевезення деякого товару з пункту відправлення (постачальників) до пункту призначення (споживачів).

**Призначення транспортної задачі** – визначення об'єму перевезень з пунктів відправлення до пунктів призначення з мінімальною вартістю перевезень. При цьому повинні враховуватися обмеження, які накладені на об'єм вантажу, який є у пунктах відправлення (пропозиція), та обмеження, які враховують необхідність вантажу в пунктах призначення (попит).

# Постановка транспортної задачі

Транспортну модель можна використовувати для описання ситуацій, які пов'язані з:

- управлінням запасами;
- управлінням руху капіталів;
- складанням розкладів;
- призначенням персоналу і таке інше.

Транспортну модель можна представити у вигляді мережі з  $m$  пунктами відправлення та  $n$  пунктами призначення, які позначаються вузлами мережі.

# Постановка транспортної задачі

Транспортна задача за загальним критерієм вартості перевезення.

Маємо  $m$  пунктів постачання, на кожному з яких перебуває відповідно  $a_1, a_2, \dots, a_m$  одиниць вантажу, та  $n$  пунктів призначення, на кожний з яких необхідно завезти  $b_1, b_2, \dots, b_n$  одиниць. За відомих тарифів  $c_{ij}$  (вартість перевезення одиниці вантажу) перевезення від  $i$ -го пункту постачання до  $j$ -го пункту призначення необхідно спланувати так, щоб їх вартість була найменшою.

# Математична постановка транспортної задачі

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}), \quad (4)$$

де  $x_{ij}$  – кількість продукції, що перевозиться від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;  $c_{ij}$  – вартість перевезення одиниці продукції від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;  $a_i$  – запаси продукції  $i$ -го постачальника;  $b_j$  – попит на продукцію  $j$ -го споживача.

# Основні поняття транспортної задачі

**Планом** транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень транспортної задачі, який позначають матрицею  $X = (x_{ij})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Оптимальним планом** транспортної задачі називають матрицю  $X^* = (x_{ij}^*)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція набуває найменшого значення.

# Умова існування розв'язку транспортної задачі

**Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі).** Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її

збалансованість, тобто 
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

# Алгоритм розв'язання транспортної задачі

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрыта).
2. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану та перейти на пункт 3.



# Алгоритм розв'язання транспортної задачі (визначення типу задачі)

Якщо  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , то таку транспортну задачу

називають **збалансованою**, або **закритою**.

**Відкрита модель:** вводимо фіктивного умовного постачальника  $A_{m+1}$ , якщо  $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$  із запасом

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ . Або вводимо фіктивного умовного

споживача  $B_{n+1}$  з потребою  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ .

Вважається, що вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника або фіктивного споживача дорівнює нулю. 25

# Методи пошуку початкового опорного плану

Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує декілька методів:

- північно-західного кута;
- мінімальної вартості;
- апроксимації Фогеля.

# Метод північно-західного кута пошуку початкового опорного плану

Починаємо із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці, в яку записують менше з двох чисел  $a_1$  та  $b_1$ . Викреслюємо рядок, якщо  $a_1$  менше за  $b_1$ , або стовпець, якщо навпаки. Далі переходимо до наступної (невикресленої) клітинки в рядку або у стовпці і заповнюємо її, і так ін. Закінчуємо заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

# Перевірка початкового опорного плану

Після побудови початкового опорного плану у таблиці має бути заповнено  $(m+n-1)$  клітинок. Якщо кількість клітинок не відповідає знайденому числу, то опорний план знайдено неправильно і він неоптимальний.

# Метод мінімальної вартості пошуку початкового опорного плану

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції.

Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

# Метод Фогеля пошуку початкового опорного плану

На кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпці транспортної таблиці.

Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці.

Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпці заповнюють клітинку з найменшою вартістю.

Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпець.

Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпець, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

# Метод потенціалів пошуку оптимального плану

Знайдений опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів  $u_i$  та  $v_j$  відповідно постачальників та споживачів.

Якщо для деякого опорного плану  $X^* = (x_{ij}^*)$  існують числа  $u_i$  та  $v_j$  для яких виконується умова

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ для } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j - c_{ij} \leq 0, \text{ для } x_{ij} = 0,$$

для всіх  $i = \overline{1, m}$  та  $j = \overline{1, n}$ , то він є оптимальним планом.

# Метод потенціалів пошуку оптимального плану

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь  $u_i + v_j = c_{ij}$ , які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

Система рівнянь невизначена, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад,  $u_1 = 0$ . Знайдені потенціали заносимо до таблиці.



# Метод потенціалів пошуку оптимального плану

За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, то поточний план **неоптимальний** і необхідно перейти до нового опорного плану.

Таким чином, перевіряємо виконання другої умови оптимальності  $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$  (для порожніх клітинок таблиці). Знайдені оцінки записуємо в лівому кутку кожної небазисної клітинки.

# Метод потенціалів пошуку оптимального плану

Перехід від одного опорного плану до іншого виконується заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то вибираємо  $\max\{u_i + v_j - c_{ij}\}$ . Для обраної порожньої клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за певними правилами.

# Правила побудови циклу перерозподілу вантажу

1. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці – “+”, а всім іншим по черзі “-” та “+”.

2. У порожню клітинку переносять менше з чисел  $x_{ij}$ , що стоять у клітинках зі знаком “-”. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком “+”.

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою (базисною), а відповідна клітинка з мінімальним числом  $x_{ij}$  вважається порожньою (вільною).

# Тема 9: Задачі цілочислового лінійного програмування

## План

1. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування (ЦЛП)
2. Методи розв'язування задач ЦЛП
3. Задача на призначення
4. Алгоритм угорського методу розв'язання задачі на призначення
5. Метод Гоморі розв'язування задач ЦЛП
6. Метод гілок та меж розв'язування задач ЦЛП

# Задачі цілочислового лінійного програмування

До цілочислового програмування відносять задачі на призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають **частково цілочисловими**.

# Постановка задачі цілочислового лінійного програмування

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

# Методи розв'язування задач ціло-числового лінійного програмування

Три основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;
- наближені методи пошуку оптимальних планів, які часто дозволяють знайти шуканий розв'язок за меншого обсягу обчислень та спрощення відповідних алгоритмів.

# Ідея методів відтинань

Основою **методів відтинання** є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків задачі, що розглядається. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набувають цілочислових значень.



# Ідея комбінаторних методів

**Комбінаторні методи** цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

# Ідея задачі на призначення

«Кращий робітник для виконання даної роботи»  
– коротке описання задачі на призначення.

Мета задачі – знайти оптимальне (мінімальна вартість, максимальна продуктивність, мінімальний час) розподілення робітників по усім зазначеним роботам.

# Математична постановка задачі на призначення

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Коефіцієнт  $c_{ij}$  дорівнює вартості (грош. од.) призначення робітника  $i$  на роботу  $j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

# Задача на призначення

Задача на призначення є **частинним випадком** транспортної задачі, в якій робітники відповідають пунктам відправлення, а роботи – пунктам призначення. В цьому випадку всі значення пропозиції та попиту дорівнюють одиниці. Вартість «транспортування» робітника  $i$  на роботу  $j$  дорівнює  $c_{ij}$  та задається матрицею  $C$ . Задачу на призначення можна ефективно розв'язувати так само, як і транспортну задачу.

# Алгоритм угорського методу розв'язання задачі на призначення

**Крок 1.** У матриці  $C$  визначаємо у кожному стовпці мінімальне значення та віднімаємо його від інших елементів стовпця.

**Крок 2.** У матриці, яку отримали після виконання кроку 1, знаходимо у кожному рядку мінімальне значення і віднімаємо його від інших елементів рядка.

# Алгоритм угорського методу розв'язання задачі на призначення

**Крок 3.** Вибираємо нулі таким чином, щоб в кожному стовпці та рядочку він був єдиний. Оптимальним призначенням будуть відповідати вибрані нульові елементи.

Якщо неможливо отримати оптимальне призначення, тоді переходимо до кроку 4. Інакше задачу розв'язано і виконуємо крок 5.

**Зауваження.** При виборі нульових елементів матриці краще починати з рядочка (стовпця), в якому їх найменше.

# Алгоритм угорського методу розв'язання задачі на призначення

**Крок 4.** В останній матриці проведемо мінімальну кількість горизонтальних та вертикальних прямих по рядках і стовпцях для того, щоб викреслити в матриці всі нульові елементи.

Знайдемо найменший невикреслений елемент й віднімемо його із невикреслених елементів та додамо до елементів, які стоять на перетині проведених прямих. Перейдемо до кроку 3.

**Крок 5.** Розв'язком задачі буде матриця, яка складається з нулів і одиниць. Причому одиниці стоять на місцях вибраних нулів і означають призначення робітника на роботу.

# Приклад розв'язання задачі на призначення на мінімум

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 1}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 3}}$$



# Приклад розв'язання задачі на призначення на мінімум

0	0	1	1	2
3	0	3	3	1
1	0	1	1	2
3	1	3	0	4
0	0	0	0	0

0	0	1	1	2
3	0	3	3	1
1	0	1	1	2
3	1	3	0	4
0	0	0	0	0

крок 4 п.2 →

0	1	1	2	2
2	0	2	3	0
0	0	0	1	1
2	1	2	0	3
0	1	0	1	0

крок 3 →

0	1	1	2	2
2	0	2	3	0
0	0	0	1	1
2	1	2	0	3
0	1	0	1	0

крок 5 →

1	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

Мінімальний час виконання робіт  $2+2+0+3+2=9$ .

# Приклад розв'язання задачі на призначення на максимум

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 3}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 4 п.2}}$$

# Приклад розв'язання задачі на призначення на максимум

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{крок 5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримана  
дорівнюватиме  $5+4+3+4+1=17$ .

максимальна

продуктивність

# Метод Гоморі розв'язування задач цілочислового лінійного програмування

Метод Гоморі відноситься до методів відтинання.

За алгоритмом даного методу на **першому кроці** необхідно розв'язати послаблену задачу. Для цього використовуємо симплекс-метод.

Якщо розв'язок послабленої задачі задовольняє умову цілочисловості, то маємо оптимальний розв'язок задачі ЦЛП.

# Метод Гоморі розв'язування задач цілочислового лінійного програмування

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану є дробові числа, то вибирається змінна, яка має **найбільшу дробову частину**. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона знаходиться) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j \geq b_i,$$

де символ  $\{ \}$  позначає дробову частину числа.

# Метод Гоморі розв'язування задач цілочислового лінійного програмування

Додаткове обмеження Гоморі після зведення його до канонічної форми і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план.

Якщо в процесі розв'язання задачі з'явиться рядок з нецілим вільним членом, а решта коефіцієнтів цього рядка будуть цілими, то вихідна задача немає розв'язку в цілих числах. Якщо така ситуація з'явилась у практично значимій задачі, то необхідно, скориставшись оптимальним планом ЗЛП, округлити одержані результати.

# Геометрична інтерпретація методу Гоморі

Щодо геометричного тлумачення, залучення до наявних обмежень кожного додаткового обмеження, яке відповідає правильному відтинанню, означає, що від області допустимих значень, відтинається за допомогою гіперплощини (а у випадку двох змінних – прямої лінії) деяка її частина, в якій знаходиться оптимальний план з нецілочисловими компонентами, але зберігаються всі допустимі плани з цілочисловими компонентами.

**Недоліком** методу Гоморі є вимога цілочисловості усіх змінних: як основних, так і допоміжних, які можуть бути і дробовими.

# Приклад розв'язання задачі ЦЛП методом Гоморі

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Канонічна форма:  $z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$



# Приклад розв'язання задачі ЦЛП методом Гоморі

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	5	3	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	1	-1	1	1	0	0	-
$x_4$ ←	0	3	1	-1	0	1	0	3
$x_5$	0	4	1	1	0	0	1	4
$\Delta_j$		0	-5	-3	0	0	0	

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	5	3	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	4	0	0	1	1	0	-
$x_1$	5	3	10	-1	0	1	0	-
$x_5$ ←	0	1	0	2	0	-1	1	1/2
$\Delta_j$		15	0	-8	0	5	0	

# Приклад розв'язання задачі ЦЛП методом Гоморі

Базис	C <sub>баз</sub>	План	5	3	0	0	0
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>
x <sub>3</sub>	0	4	0	0	1	1	0
x <sub>1</sub>	5	7/2	1	0	0	1/2	1/2
x <sub>2</sub>	3	1/2	0	1	0	-1/2	0
Δ <sub>j</sub>		19	0	0	0	1	4

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \{0\}x_3 + \{1/2\}x_4 + \{1/2\}x_5 \geq \{7/2\}$$

$$1/2x_4 + 1/2x_5 \geq 1/2$$

$$x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 1$$

# Приклад розв'язання задачі ЦЛП методом Гоморі

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	5	3	0	0	0	0	$-M$	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	0	4	0	0	1	1	0	0	0	4
$x_1$	5	7/2	1	0	0	1/2	1/2	0	0	7
$x_2$	3	1/2	0	1	0	-1/2	0	0	0	-
$x_7$ ←	$-M$	1	0	0	0	1	1	-1	1	1
$\Delta_j$		19	0	0	0	1	4	0	0	
		$-M$	0	0	0	$-M$	$-M$	$M$	0	

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	5	3	0	0	0	0
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	0	3	0	0	1	0	-1	1
$x_1$	5	3	1	0	0	0	0	1/2
$x_2$	3	1	0	1	0	0	1/2	-1/2
$x_4$	0	1	0	0	0	1	1	-1
$\Delta_j$		18	0	0	0	0	3	1

# Схема методу гілок та меж

1. Розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача.
2. Вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти  $x_j$  – цілочислову змінну, значення якої  $x_j = x'_j$  в оптимальному плані послабленої задачі **є дробовим**.

Можна стверджувати, що на інтервалі  $\left[ \left[ x'_j \right] ; \left[ x'_j \right] + 1 \right[$  цілих значень немає.

# Схема методу гілок та меж

**Наприклад**, якщо  $x'_j = 2,7$  дістаємо інтервал  $]2;3[$ , де, очевидно, немає  $x_j$ , яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі  $x_j \leq 2$ , або  $x_j \geq 3$ . Виключення проміжку  $]2;3[$  з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей.

Тобто допустиме ціле значення  $x_j$  має задовольняти одну з нерівностей виду:

$$x_j \leq [x'_j] \quad \text{або} \quad x_j \geq [x'_j] + 1.$$

# Схема методу гілок та меж

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо **дві**, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (1)-(4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими.

# Розгалуження методу гілок та меж

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$x_j$  – цілі числа,  $j = \overline{1, n}$ ,

$$x_j \leq [x'_j]$$

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$x_j$  – цілі числа,  $j = \overline{1, n}$ ,

$$x_j \geq [x'_j] + 1,$$

де  $x'_j$  – дробова компонента розв'язку задачі (8.1)-(8.4).

# Схема методу гілок та меж

Наведені дві задачі спочатку послаблюємо та розв'язуємо. Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (1)-(4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план – оптимальний.

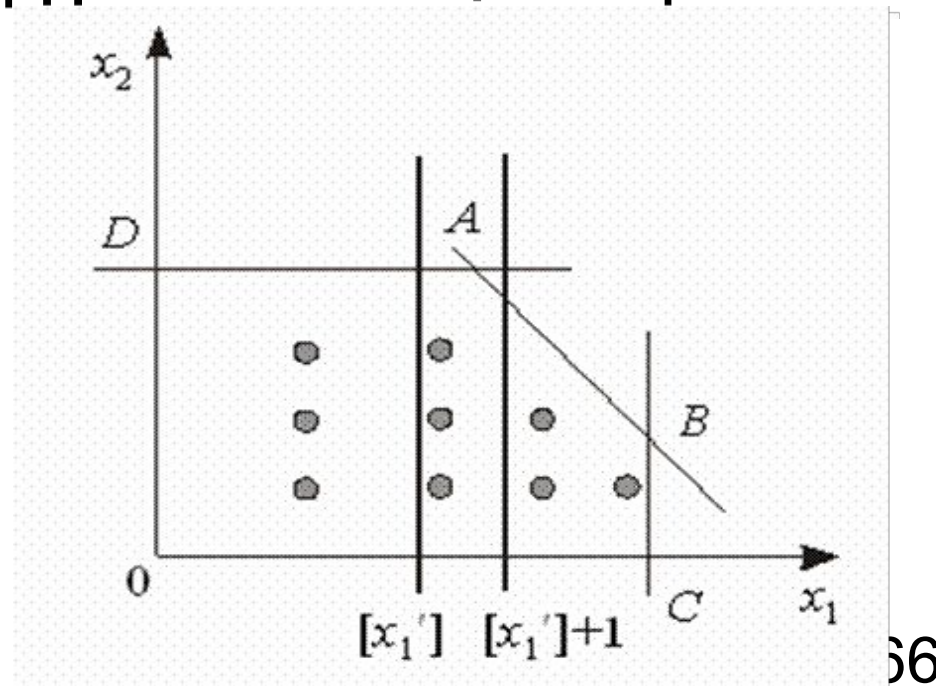


# Геометрична інтерпретація розгалуження

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду  $x_j \leq [x'_j]$  або  $x_j \geq [x'_j] + 1$  в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлується включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника.

# Геометрична інтерпретація розгалуження

Допустимо, що  $A$  – точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі  $ABCOD$  поділяється на дві частини прямими  $x_1 = [x_1']$  та  $x_1 = [x_1'] + 1$ , що виключає з розгляду точку  $A$ , координата якої  $x_1'$  є нецілим числом.



# Алгоритм методу гілок та меж

**1. Розв'язують послаблену задачу (1)-(3) (без вимог цілочисловості змінних).**

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі (1)-(4).

Якщо задача (1)-(3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (1)-(4) також не має розв'язку.

Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних  $x_i$  і визначають її цілу частину  $[x'_i]$ .

# Алгоритм методу гілок та меж

**2. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки:**

$$\begin{aligned}x_i &\leq [x'_i], \\x_i &\geq [x'_i] + 1.\end{aligned}$$

Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

# Алгоритм методу гілок та меж

3. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

# Графічний метод гілок та меж

Ідея: розв'язуємо графічним методом послаблену вихідну задачу. Знайдений оптимальний розв'язок задачі ЛО перевіряємо на цілочисловість. Якщо обидві компоненти оптимального розв'язку задовольняють цю умову, то знайдений оптимальний розв'язок задачі ЛО буде оптимальним і для задачі ЦЛО. Якщо одна або обидві компоненти не відповідають умові, то беремо ту компоненту у якої більша дробова частина і для неї робимо розгалуження, додаючи спеціальні обмеження.

# Результати застосування графічного методу гілок та меж

- оптимальний план однієї із задач, в порівнянні з іншою, забезпечує більше значення цільової функції; якщо такий оптимальний план має цілочислову компоненту  $x_j$ , то переходять до пошуку цілочислового значення іншої компоненти, інакше ту задачу з двох (отриманих при розгалуженні), для якої досягнуто найбільше значення цільової функції, знову розгалужують на дві задачі і так далі;

- якщо оптимальні плани кожної із задач дають тотожні значення цільової функції, необхідно продовжувати дослідження кожної з задач.

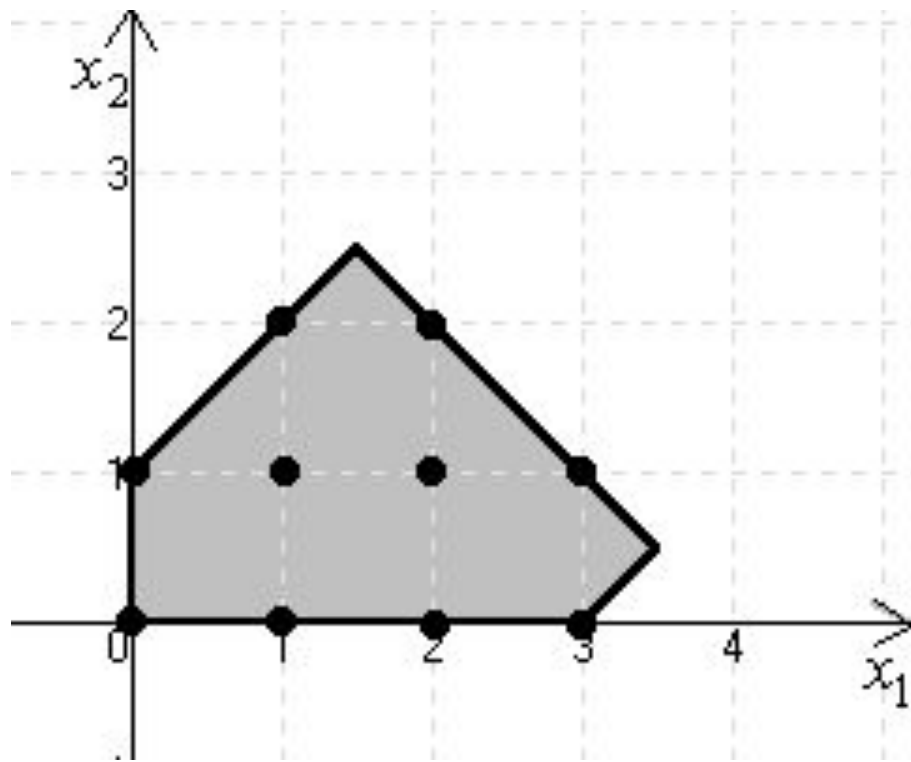
# Приклад

$$z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \end{cases}$$

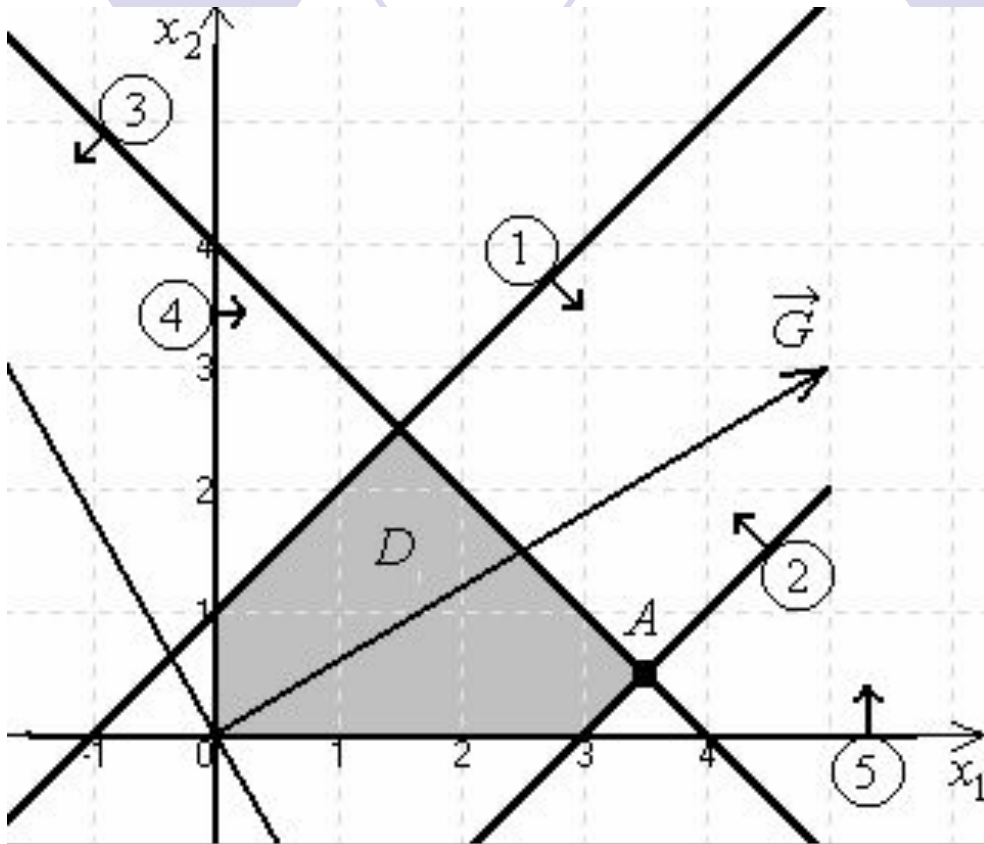
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$x_1, x_2$  – цілі числа.





# Приклад



$$A(x_1 = 7/2, x_2 = 1/2)$$

# Приклад

Задача ЛП

$$x_1 = 7/2, x_2 = 1/2, z = 19$$

$$x_1 \leq 3$$

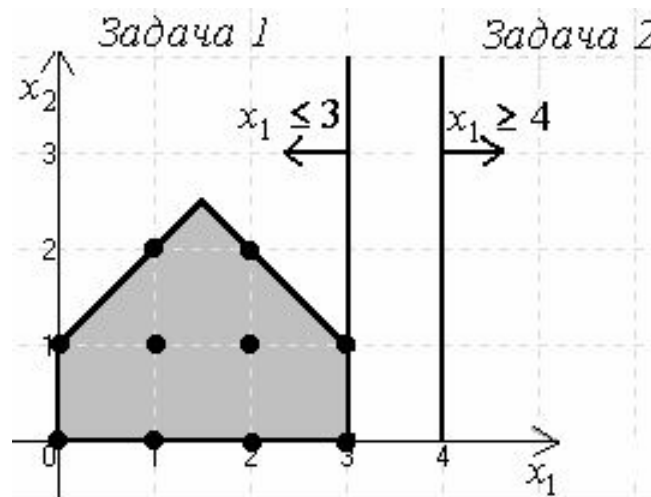
Задача 1

$$x_1 = 3, x_2 = 1, z = 18$$

$$x_1 \geq 4$$

Задача 2

розв'язку немає



# Приклад

Задача ЛП

$$x_1 = 7/2,$$

$$x_2 = 1/2,$$

$$z = 19$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_2 \geq 1$$

Задача 1

Задача 2

Задача 3

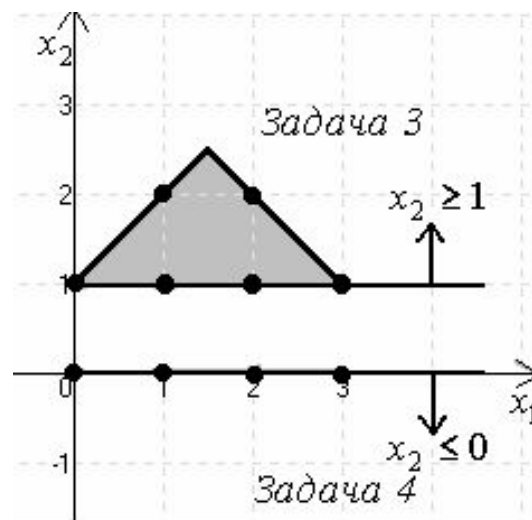
Задача 4

$$x_1 = 3, x_2 = 1, \\ z = 18$$

розв'язку  
немає

$$x_1 = 3, x_2 = 1, \\ z = 18$$

$$x_1 = 3, x_2 = 0, \\ z = 15$$



# Список літератури

## Основна:

1. **Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
2. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
3. **Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.

## Додаткова:

1. **Вітлінський В. В.** Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К., 2001.
2. **Кузнецов А. В.** Математическое программирование / А. В. Кузнецов и др. – М.: Высшая школа, 1994.