

Університет митної справи та фінансів

# **Вища та прикладна математика**

**Модуль: Математичне  
програмування та  
дослідження операцій**

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ

2016

# Тема 10: Оптимізаційні задачі управління запасами

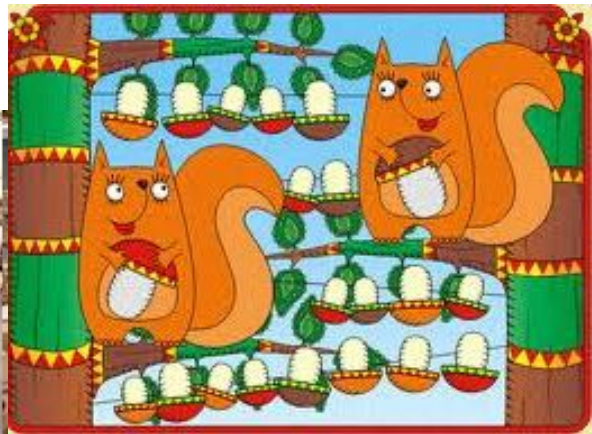
## План

1. Основні визначення задач управління запасами
2. Причини створення та мінімізації запасів
3. Класифікація запасів, що є в наявності
4. Детерміновані моделі
5. Стохастична модель

# Визначення запасів

Запасом називається будь-який ресурс, що зберігається для задоволення майбутніх потреб.

Прикладами запасів можуть стати напівфабрикати, готові вироби, матеріали, різні товари, а також готівка, що перебуває в сховищі.



# Причини створення запасів

- дискретність поставок при безперервному споживанні;
- упущений прибуток у випадку відсутності запасу;
- випадкові коливання:
  - а) попиту за період між поставками;
  - б) обсягу поставок;
  - в) тривалості інтервалу між поставками;
- передбачувані зміни кон'юнктури:
  - а) сезонність попиту;
  - б) сезонність виробництва.

# Причини мінімізації запасів

- плата за зберігання запасу;
- фізичні втрати при зберіганні;
- моральне старіння товару.



# Поняття, необхідні для проведення економічного аналізу



- запас;
- замовлення;
- витрати виконання замовлення (витрати замовлення);
- витрати зберігання;
- втрачений прибуток (витрати дефіциту);
- строк виконання замовлення;
- точка відновлення.

# Класифікація запасів, що є в наявності

Використовується методика **адміністративного спостереження**. Мета її полягає у визначенні тієї частини запасів фірми, що вимагає найбільшої уваги з боку відділу постачання. Для цього кожний компонент запасів розглядається по двох параметрах:

- 1) його частка в загальній кількості запасів фірми;
- 2) його частка в загальній вартості запасів.



# Методика 20/80 класифікації запасів

**Методика 20/80.** Відповідно до цієї методики компоненти запасів, що становлять 20% його загальної кількості й 80% його загальної вартості, повинні відслідковуватися відділом постачання більш уважно.





# Методика ABC класифікації запасів

**Методика ABC.** Запаси, наявні в розпорядженні підприємства, розділяються на три групи: А, В та С.

**Група А:** 10% загальної кількості запасів і 65% їхньої вартості;

**В:** 25% загальної кількості запасів і 25% їхньої вартості;

**С:** 65% загальної кількості запасів і близько 10% їхньої вартості.

# Методика ABC класифікації запасів

Запаси групи А вимагають більше уважного й частого проведення інвентаризації; правильність обліку запасів цієї групи повинна підтверджуватися частіше.

Планування й прогнозування запасів групи А повинне характеризуватися більшим ступенем точності, ніж планування запасів груп В та С.

Для групи А потрібно намагатися створити **страховий запас**, щоб уникнути більших витрат, пов'язаних з відсутністю запасів цієї групи.

# Методика ABC класифікації запасів

Методи й прийоми управління запасами, що розглядаються далі, повинні застосовуватися насамперед до груп А та В. Що стосується запасів групи С, звичайно момент поновлення запасів по них визначають виходячи з конкретних умов, а не на основі кількісного методу, щоб звести до мінімуму видатки на їх контроль.

# Класифікація запасів, що є в наявності

Класифікація запасів може бути заснована не тільки на показниках частки в загальній вартості й у загальній кількості. Деякі види запасів можуть бути віднесені до більш високого класу на підставі таких характеристик, як специфіка поставок, якість і т. ін.

**Перевага** методики розподілу запасів на класи полягає в тім, що для кожного з них можна вибрати свій порядок контролю й управління.

# Основні поняття теорії управління запасами

**Витрати виконання замовлення** (витрати замовлення) — накладні видатки, пов'язані з оформленням замовлення. У промисловому виробництві такими витратами є витрати на переналагодження устаткування й підготовчі операції.



# Основні поняття теорії управління запасами

**Витрати зберігання** — видатки, пов'язані з фізичним утримуванням товарів на складі, плюс можливі відсотки на капітал, вкладений у запаси. Звичайно вони виражені в абсолютних одиницях або у відсотках від закупівельної ціни й пов'язані з певним проміжком часу.



# Основні поняття теорії управління запасами

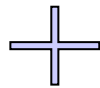
**Втрачений прибуток** (витрати дефіциту) – витрати, пов'язані з незадоволеним попитом, що виникає через відсутність продукту на складі.





# Основні поняття теорії управління запасами

**Сукупні витрати** за період являють собою суму витрат замовлення, витрат зберігання й втраченого прибутку. Іноді до них додаються витрати на закупівлю товару.



# Основні поняття теорії управління запасами

**Строк виконання замовлення** – час із моменту замовлення до моменту його виконання.

**Точка відновлення** – рівень запасу, при якому робиться нове замовлення.

# Детерміновані моделі

1. Найпростіша модель оптимального розміру замовлення.

## Припустимо, що:

- темп попиту на товар відомий і постійний;
- одержання замовлення миттєве;
- закупівельна ціна не залежить від розміру замовлення;
- дефіцит не допускається.

**Вихідні дані:** темп попиту, витрати замовлення, витрати зберігання.

**Результат:** оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями, кількість замовлень за фіксований період часу, сукупні витрати.

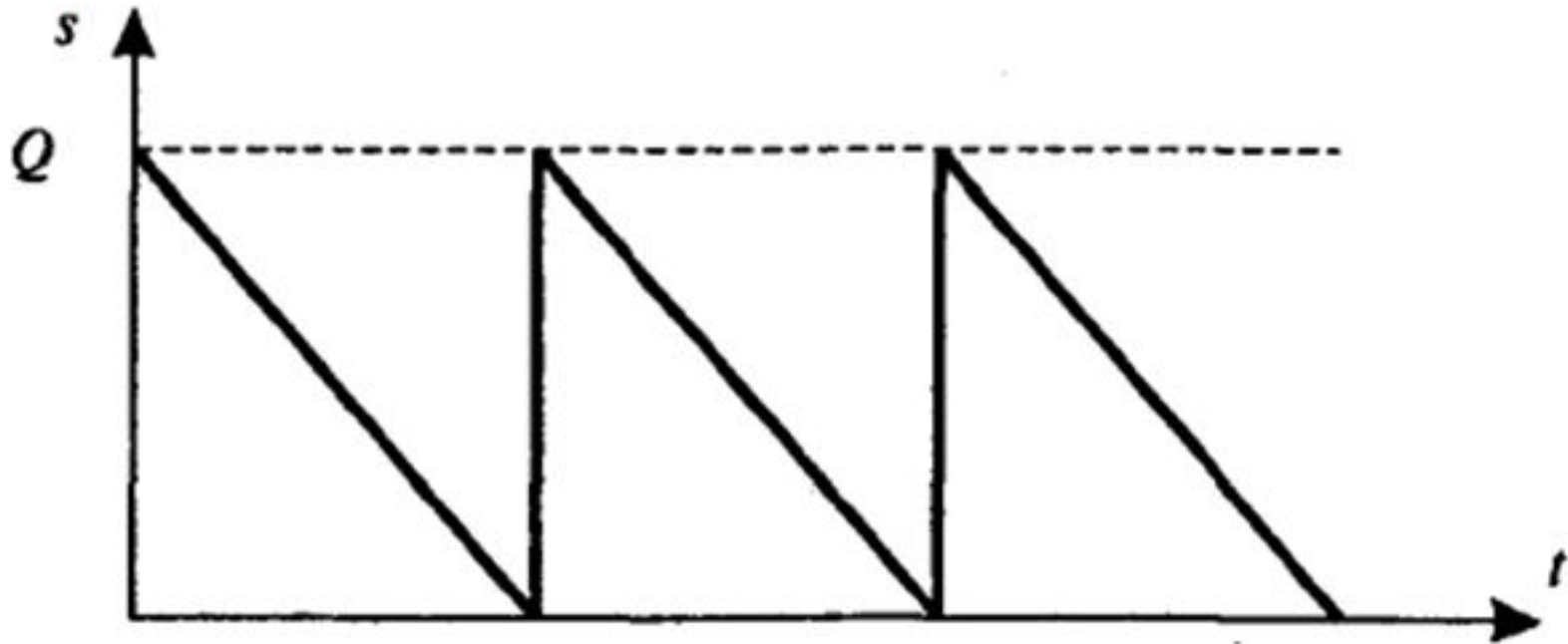


# Детерміновані моделі

Розмір замовлення є **постійним**. Замовлення виконується **миттєво**. Рівень запасів зменшується з **постійною інтенсивністю**, поки не досягає нульового значення. У цей момент часу робиться й миттєво виконується замовлення, яке відновлює рівень запасу до максимального значення. При цьому оптимальним рішенням завдання буде такий розмір замовлення, при якому мінімізуються загальні витрати за період, що дорівнюють сумі витрат зберігання й витрат замовлення.

# Детерміновані моделі

Динаміка зміни кількості продукту  $s$  на складі показана на рис.



# Детерміновані моделі (основні позначення)

Нехай  $Q$  – розмір замовлення;

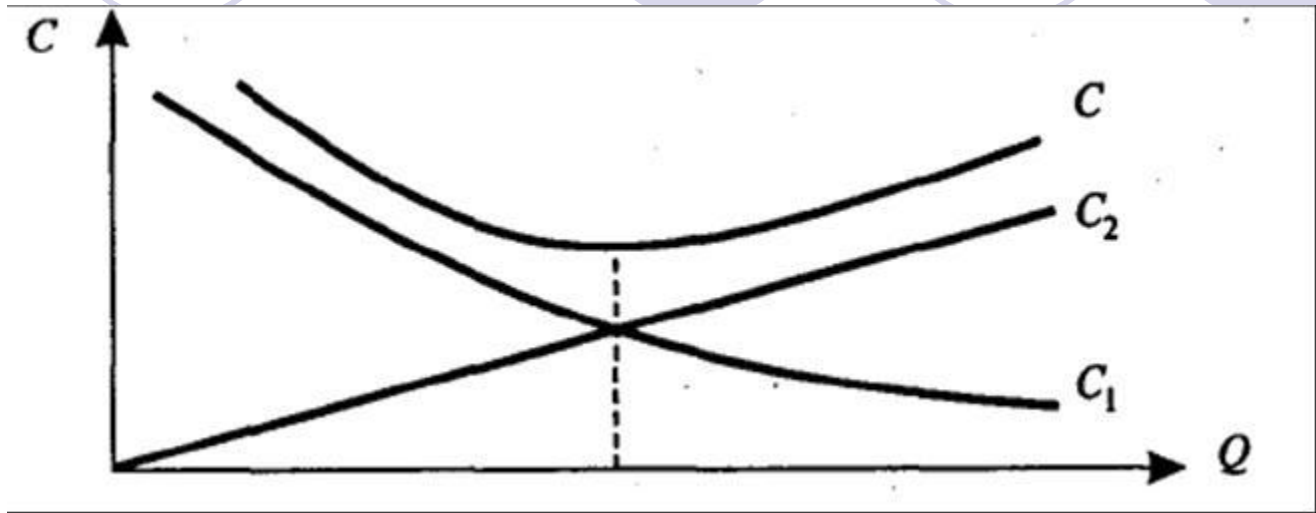
$T$  – тривалість періоду планування;

$D, d$  – величина попиту за період планування й в одиницю часу відповідно;

$K$  – витрати одного замовлення;

$H, h$  – питомі витрати зберігання за період  $i$  в одиницю часу відповідно.

# Детерміновані моделі



$C_1 = \frac{D}{Q} K$  — витрати замовлення за період планування;

$C_2 = \frac{Q}{2} H$  — витрати зберігання за період планування;

$C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q} K + \frac{Q}{2} H$  — сукупні витрати,



# Детерміновані моделі

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$  — оптимальний розмір замовлення;

$N = \frac{D}{Q^*}$  — оптимальне число замовлень за період;

$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$  — час циклу (оптимальний час між замовленнями).

Варто звернути увагу на те, що оптимальний розмір замовлення **не залежить** від ціни продукту.



# Детерміновані моделі

2. Модель оптимального розміру замовлення з фіксованим часом його виконання.

**Припустимо, що:**

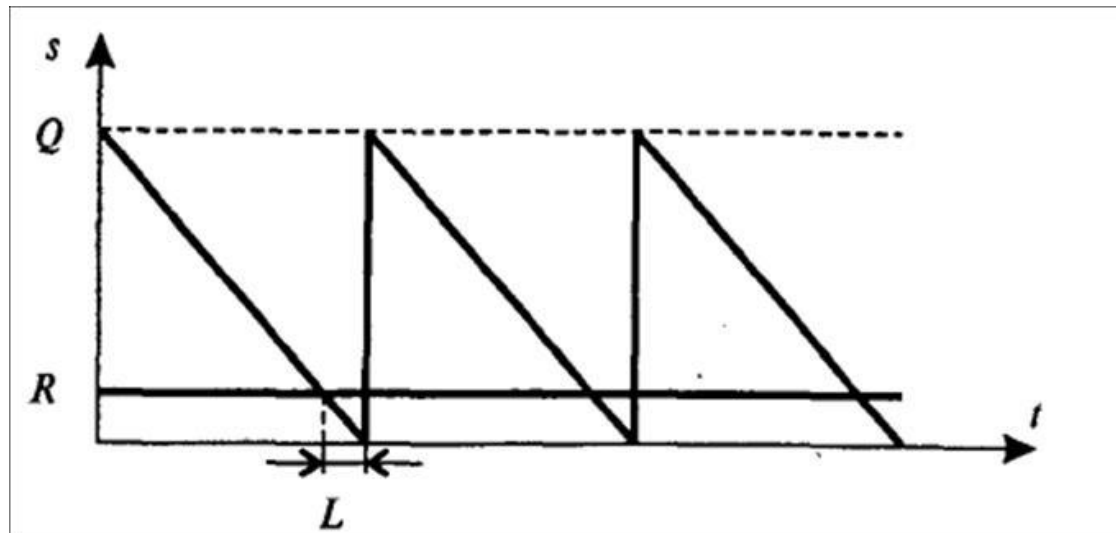
- темп попиту на товар відомий і постійний;
- час виконання замовлення відомий й постійний;
- закупівельна ціна не залежить від розміру замовлення;
- дефіцит не допускається.

**Вихідні дані:** темп попиту, витрати замовлення, витрати зберігання, час виконання замовлення.

# Детерміновані моделі

**Результат:** оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями, точка відновлення запасу, кількість замовлень за фіксований період часу, сукупні витрати.

Динаміка зміни кількості продукту  $s$  на складі показана на рис.



# Детерміновані моделі

Розмір замовлення є **постійним**. Час виконання замовлення **постійний**. Рівень запасів зменшується з **постійною** інтенсивністю, поки не досягає точки відновлення  $R$ . У цей момент робиться замовлення, що виконується за час  $L$ . До моменту надходження замовлення розмір запасу на складі дорівнює нулю. Оптимальним рішенням завдання буде такий розмір замовлення  $Q^*$ , при якому мінімізуються загальні витрати за період, що дорівнюють сумі витрат зберігання й витрат замовлення.

# Детерміновані моделі

$C_1 = \frac{D}{Q}K$  — витрати замовлення за період планування;

$C_2 = \frac{Q}{2}H$  — витрати зберігання за період планування;

$C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H$  — сукупні витрати;

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$  — оптимальний розмір замовлення;

$R = dL$  — точка відновлення запасу;

$N = \frac{D}{Q^*}$  — оптимальне число замовлень за період;

$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$  — час циклу (оптимальний час між замовленнями).



# Детерміновані моделі

3. Модель оптимального розміру замовлення з виробництвом.

**Припустимо, що:**

- темп попиту на товар відомий і постійний;
- темп виробництва товару відомий і постійний;
- час виконання замовлення відомий й постійний;
- закупівельна ціна не залежить від розміру замовлення;
- дефіцит не допускається.

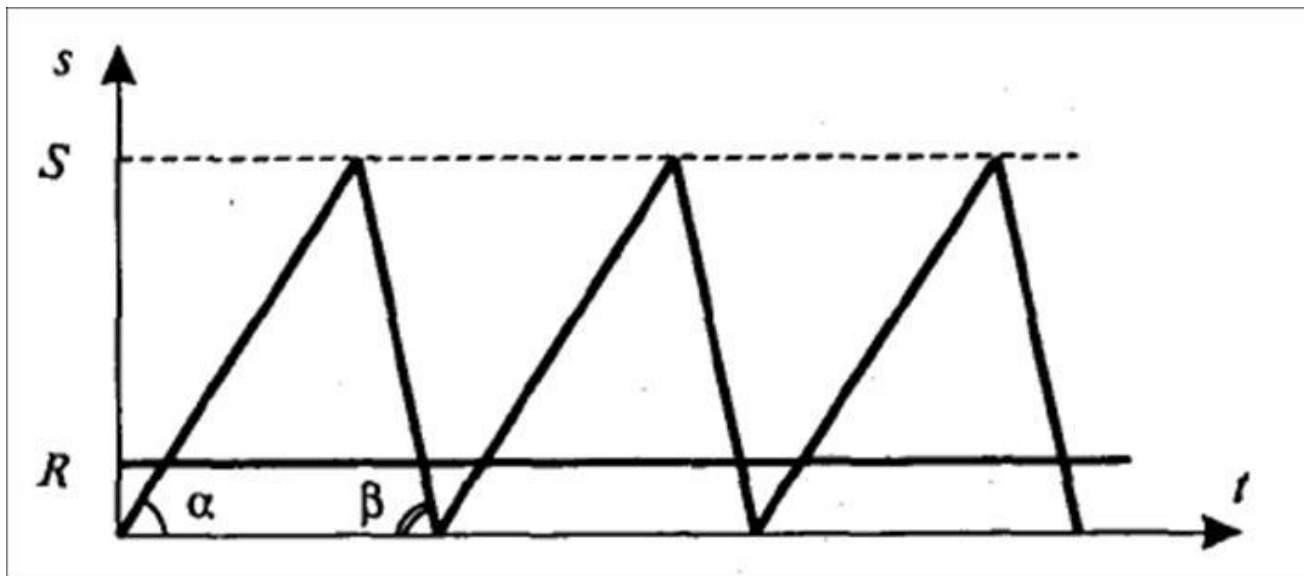
**Вихідні дані:** темп попиту, темп виробництва, витрати замовлення, витрати зберігання, час виконання замовлення.

# Детерміновані моделі

**Результат:** оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями, точка відновлення запасу.

Динаміка зміни кількості продукту  $s$  на складі показана на рис., де

$$\operatorname{tg} \alpha = p - d, \operatorname{tg} \beta = d.$$





# Детерміновані моделі

Фірма виробляє продукт самостійно, зберігає його на складі й витрачає з **постійним** темпом.

Якщо темп виробництва вище за темп попиту, то надлишки продукту накопичуються на складі. Коли кількість продукту на складі досягає максимального значення, виробництво припиняється й продукт витрачається зі складу з постійним темпом. Коли запас на складі досягає точки відновлення, виробництво відновляється. При цьому оптимальним розв'язком завдання буде такий розмір замовлення  $Q^*$ , при якому мінімізуються загальні витрати за період, що дорівнюють сумі витрат зберігання й витрат на поновлення (запуск) виробництва.

# Детерміновані моделі

Нехай

$p$  – темп виробництва;

$L$  – час, необхідне для запуску виробництва.

$C_1 = \frac{D}{Q}K$  – витрати на запуск виробництва;

$C_2 = \frac{Q}{2}H\left(1 - \frac{d}{p}\right)$  – витрати зберігання;

$C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H\left(1 - \frac{d}{p}\right)$  – сукупні витрати;

# Детерміновані моделі

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h\left(1-\frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2DK}{H\left(1-\frac{d}{p}\right)}} \text{ — оптимальний розмір замовлення;}$$

$$S^* = Q^* \left(1 - \frac{d}{p}\right) \text{ — оптимальний максимальний рівень запасів;}$$

$$R = dL \text{ — точка відновлення;}$$

$$N = \frac{D}{Q^*} \text{ — оптимальне число замовлень за період;}$$

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N} \text{ — час циклу (оптимальний час між замовленнями).}$$

У цій моделі оптимальний розмір замовлення також **не залежить** від ціни продукту.

# Детерміновані моделі

4. Модель оптимального розміру замовлення з дефіцитом.

**Припустимо**, що:

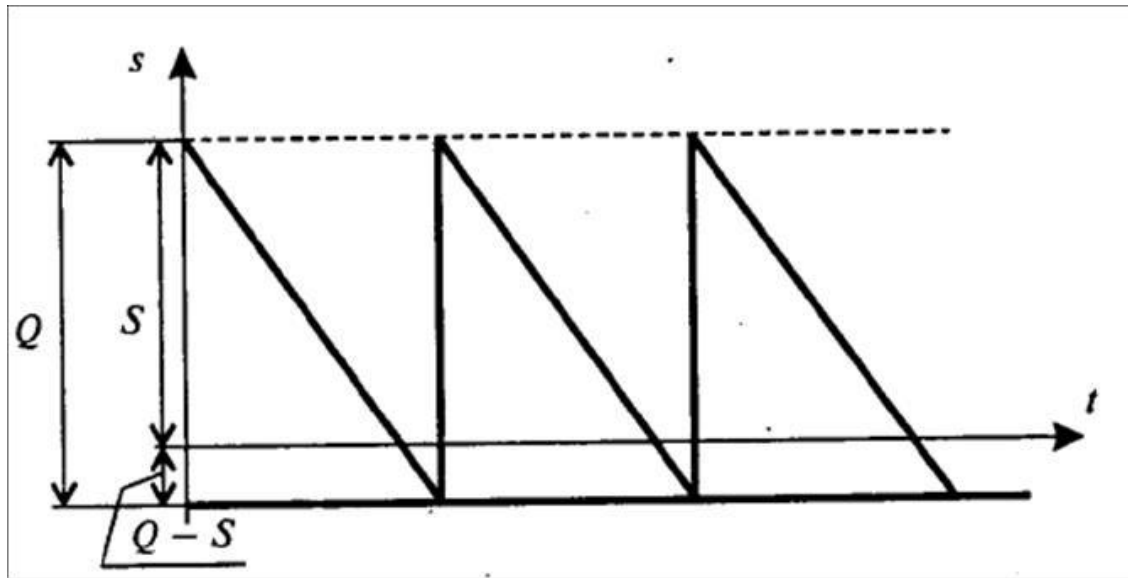
- темп попиту на товар відомий і постійний;
- час виконання замовлення відомий й постійний;
- закупівельна ціна не залежить від розміру замовлення.

**Вихідні дані:** темп попиту, витрати замовлення, витрати зберігання, витрати дефіциту.

**Результат:** оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями, точка відновлення запасу, сукупні витрати.

# Детерміновані моделі

Динаміка зміни кількості продукту  $s$  на складі показана на рис.



Нехай

$B, b$  — втрачений прибуток, що виникає внаслідок дефіциту однієї одиниці продукту, за період та в одиницю часу відповідно;

$S$  — максимальний запас продукції. 34

# Детерміновані моделі

Розмір замовлення є **постійним**. Рівень запасів зменшується з **постійною інтенсивністю**.

Допускається **дефіцит** продукту. Після одержання замовлення фірма компенсує дефіцит і відновлюється запас продукту на складі. Замовлення робиться тоді, коли дефіцит продукту на складі досягає оптимального розміру. Оптимальним розв'язком завдання буде такий розмір замовлення  $Q^*$ , при якому мінімізуються загальні витрати за період, що дорівнюють сумі витрат зберігання, витрат замовлення й витрат дефіциту.

# Детерміновані моделі

Маємо:

$C_1 = \frac{D}{Q} K$  – витрати замовлення за період планування;

$C_2 = \frac{S^2}{2Q} H$  – витрати зберігання за період планування;

$C_3 = \frac{(Q - S)^2}{2Q} B$  – витрати дефіциту за період планування;

$C = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{D}{Q} K + \frac{S^2}{2Q} H + \frac{(Q - S)^2}{2Q} B$  – загальні

витрати за період планування.



# Детерміновані моделі

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h} \frac{b+h}{b}} = \sqrt{\frac{2DK}{H} \frac{B+H}{B}} \quad - \quad \text{оптимальний розмір}$$

замовлення;

$$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h} \frac{b}{b+h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H} \frac{B}{B+H}} \quad - \quad \text{оптимальний}$$

максимальний рівень запасів;

$R = dL$  — точка відновлення;

$Q^* - S^*$  — оптимальний максимальний дефіцит.

# Детерміновані моделі

5. Модель оптимального розміру замовлення з кількісними знижками.

**Припустимо**, що:

- темп попиту на товар відомий і постійний;
- час виконання замовлення відомий й постійний.

**Вихідні дані:** темп попиту, витрати замовлення, витрати зберігання, ціна товару, кількісні знижки у випадку закупівлі великих партій товару.

**Результат:** оптимальний розмір замовлення, час між замовленнями, точка відновлення запасу, кількість замовлень за фіксований період часу, сукупні витрати.

# Детерміновані моделі

Припустимо, що відомо числа  $c_i, a_i, i = 1, \dots, n$ , де  $c_i$  – ціна продукту при розмірі замовлення  $Q$  в інтервалі  $a_{i-1} \leq Q < a_i$ .

Будемо вважати, що  $a_0 = 0$  і  $a_n = +\infty$ . Тоді:

$C_1 = \frac{D}{Q}K$  – витрати замовлення за період планування;

$C_2 = \frac{Q}{2}H$  – витрати зберігання за період планування;

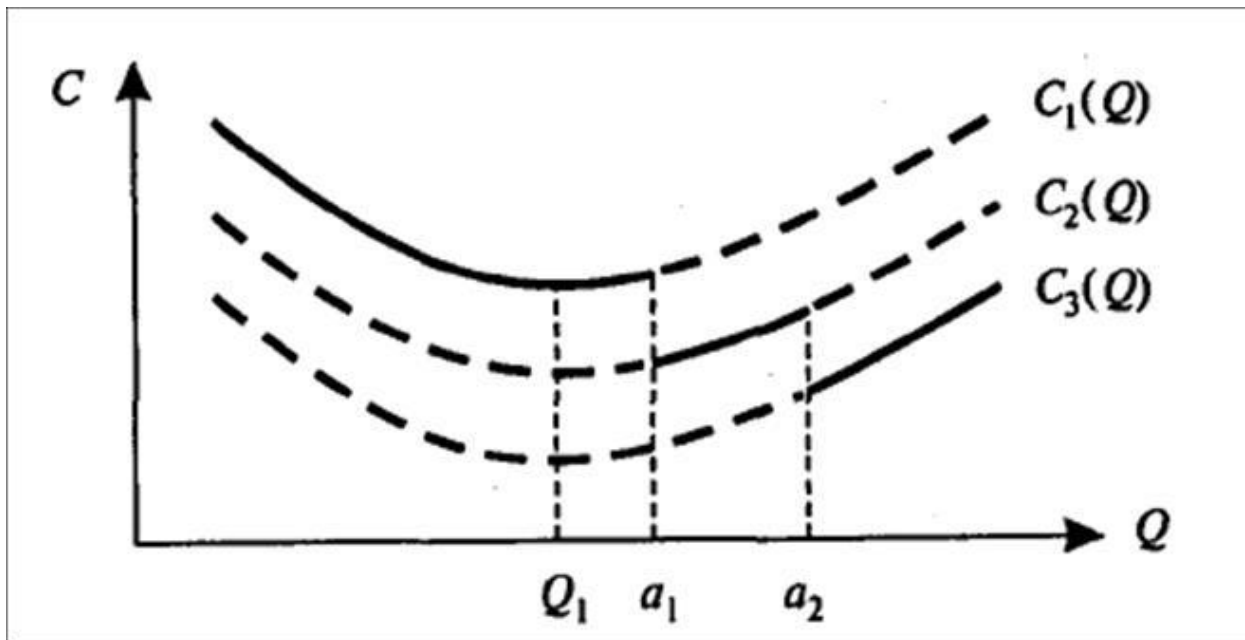
$c_i D$  – витрати на закупівлю товару;

$C_i = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H + c_i D$  – сукупні витрати.

# Детерміновані моделі

На рис. зображені функції **сукупних витрат** для трьох значень цін продукту.

Значення ціни  $c_1$  визначено на інтервалі  $0 \leq Q < a_1$ ,  
ціни  $c_2$  — на інтервалі  $a_1 \leq Q < a_2$ , ціни  $c_3$  — на інтервалі  $a_2 \leq Q < +\infty$ .



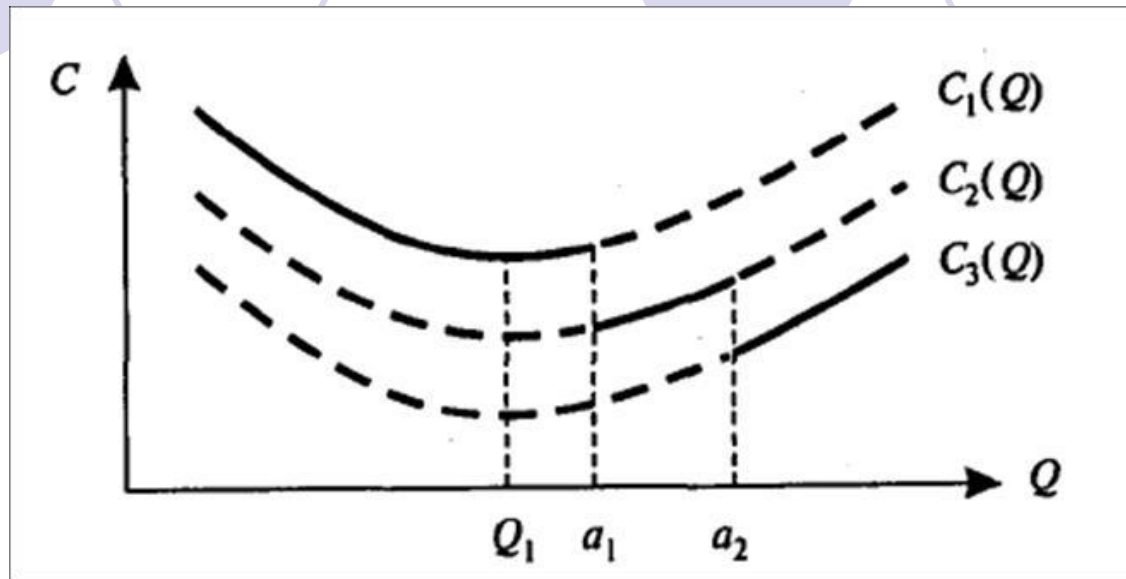
# Детерміновані моделі

Оптимальний розмір замовлення визначається в результаті розв'язання  $n$  задач. Кожна із цих задач зводиться до визначення такого розміру замовлення  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , при якому функція сукупних витрат  $C_i = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H + c_iD$  досягає мінімуму при обмеженнях  $a_{i-1} \leq Q_i < a_i$ .

Розв'язання вихідної задачі визначається з умови

$$Q^* = \arg \min_i \min_{Q_i} \{C_i(Q_i)\}.$$

# Детерміновані моделі



Мінімальне значення функції  $C_1(Q)$  в області її допустимих значень досягається в точці  $Q_1$ , функції  $C_2(Q)$  — у точці  $a_1$ , функції  $C_3(Q)$  — у точці  $a_2$ .

Оптимальний розмір замовлення варто вибирати з величин  $Q_1$ ,  $a_1$  і  $a_2$  за формулою

$$Q^* = \arg \min \{C_1(Q_1), C_2(a_1), C_3(a_2)\}.$$



# Стохастична модель

6. Дискретна стохастична модель оптимізації початкового запасу.

Ми відмовляємося від припущення про сталість і детермінованість величини попиту на товар і припускаємо, що відомо розподіл величини попиту.

# Стохастична модель

Нехай  $S$  – розмір запасу на початок періоду планування;

$D$  – величина попиту за період планування (ціле число);

$H$  – питомі витрати зберігання за період;

$B$  – питомі витрати дефіциту за період;

$p(D)$  – ймовірність того, що величина попиту за період планування складе  $D$ .

Функція розподілу величини попиту

$$F(x) = p(D < x) = \sum_{D=0}^{x-1} p(D).$$



# Стохастична модель

У випадку коли величина попиту за період планування перевищує розмір запасу ( $D > S$ ), виникає дефіцит і відповідні **витрати дефіциту**. Якщо запас більше, ніж величина попиту ( $S > D$ ), то виникають **витрати зберігання**. Математичне очікування  $C_1(S)$  величини витрат зберігання за період планування для розміру початкового запасу  $S$  можна оцінити в такий спосіб:

$$C_1(S) = H \sum_{D=0}^S (S - D)p(D).$$

# Стохастична модель

Математичне очікування  $C_2(S)$  величини витрат дефіциту за період планування для розміру початкового запасу  $S$  можна оцінити в такий спосіб:

$$C_2(S) = B \sum_{D=S+1}^{\infty} (D - S)p(D).$$

Математичне очікування  $C(S)$  сукупних витрат у цьому випадку має вигляд

$$C(S) = C_1(S) + C_2(S).$$

# Стохастична модель

У стохастичній моделі оптимальним є такий розмір початкового запасу  $S^*$ , при якому математичне очікування сукупних витрат  $C(S^*)$  має мінімальне значення, тобто такий розмір запасу  $S^*$ , що задовольняє умові

$$F(S^*) < \frac{B}{H + B} < F(S^* + 1).$$

Якщо  $F(S^*) = \frac{B}{H + B}$ , то  $C(S^*) = C(S^* + 1)$  й оптимальними є як розмір запасу  $S^*$ , так і розмір запасу  $S^* + 1$ .



# Список літератури

- 1. Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
- 2. Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
- 3. Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.