Теория игр

- Теория игр представляет собой математическую теорию конфликтных ситуаций.
- Ее цель – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта
- Впервые описана в 1944 – в монографии фон Неймана и Моргеншерна

- Игра – это ситуация, в которой эффективность решений одного игрока зависит от действий другого игрока.
- Игра развивается по определенным правилам, которые определяют последовательность ходов игроков.
- Конец игры наступает в том случае, когда все возможные ходы игроками сделаны.

- Игра характеризуется:

1. Множество заинтересованных сторон – **лиц, участников, игроков**
2. Множеством возможных действий (ходов) для каждого игрока – **стратегий**
3. Интересами игроков, задаваемых с помощью функции выигрыша – **функции платежа.**

Игры можно классифицировать

1. Игры ***парные*** (2 игрока) и ***множественные***.
2. По количеству возможных стратегий:

- ***конечные*** (конечное у каждого игрока)
- ***бесконечные*** (хотя бы у одного игрока бесконечное число стратегий)

3. По свойствам функции платежа:

- ***антагонистическая*** *(с нулевой суммой)* – выигрыш одного = проигрышу другого,
- *игра с* ***постоянной*** *разностью* (участники выигрывают и проигрывают одновременно, следовательно выгодно действовать сообща).

4. По наличию предварительной договоренности о совместных действиях : *кооперативные* (есть договоренность) и *некооперативные* (договоренности нет).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- ***Стратегия*** – совокупность правил, определяющих выбор варианта действия игроком в зависимости от ситуации в игре.
- ***Целью*** является отыскание *оптимальной стратегии* для каждого игрока.
- ***Оптимальная стратегия*** – стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш независимо от поведения противника.
- Выбор одной из возможных стратегий и ее реализация называется ***ходом***.
- ***Ход*** – может быть **личным** (выбор стратегии сознателен) и **случайным**.

Игру можно описать разными способами

1. Позиционный – задается в виде дерева шагов.
2. Нормальный – задаются допустимые стратегии для каждого игрока и функция выигрыша, которая определяет выигрыш или проигрыш для каждой стратегии. Чаще всего задается в виде **платежной матрицы**

Конечная парная антагонистическая игра

- Два игрока (I и II) обладают конечным набором стратегий:
- I стратегии $\mathbf{A_1.....A_m}$
- II стратегии $\mathbf{B_1....B_n}$
- Эта игра размерностью **n×m**.

- Предположим, что на некотором ходе игрок I выбрал стратегию $\mathbf{A_i}$, а игрок II отвечает стратегией $\mathbf{B_j}$
- Тогда $\mathbf{W_1 (A_i , B_j)}$ – **выигрыш**, который получит игрок I при этой паре стратегий.
- $\mathbf{W_2 (A_i , B_j)}$ – **выигрыш**, который получит игрок II при этой паре стратегий
- Так как игра антагонистическая, то
- $\mathbf{W_1 (A_i , B_j) + W_2 (A_i , B_j) = 0}$
- **Или** $\mathbf{W_1 (A_i , B_j) = - W_2 (A_i , B_j) = W (A_i , B_j)}$

- **Обозначим W (A_i , B_j)=a_{ij} тогда получим платежную матрицу**

II/I	B_1	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}

Каждый положительный элемент это выигрыш I игрока, каждый отрицательный – проигрыш II

Пример

- Играют 2 игрока, каждый называет цифру 1, 2, или 3. Если разница между цифрами игроков положительная, то это выигрыш I игрока, если отрицательная – II игрока, если =0, то ничья.
- **I $A_1=1$ $A_2=2$ $A_3=3$**
- **II $B_1=1$ $B_2=2$ $B_3=3$**

- Запишем платежную матрицу.

II / I	B_1	B_2	B_3
A_1	0	-1	-2
A_2	1	0	-1
A_3	2	1	0

- Следует найти оптимальную стратегию для I и II игроков.
- Используем **основной принцип ТИ:**
- **Какую бы стратегию не выбрал I игрок, II игрок всегда ответит на нее такой стратегией, при которой выигрыш I будет минимальным и следовательно у II минимальный проигрыш.**

- Для поиска лучшей стратегии I игрока найдем минимальный элемент в каждой строке платежной матрицы $\boldsymbol{\alpha_i = \min a_{ij}}$
- Среди $\boldsymbol{\alpha_i}$ найдем максимальный $\boldsymbol{\alpha = \max \alpha_i}$

$\alpha = \max(\min a_{ij})$ - нижняя цена игры или гарантированный выигрыш I (максимин)

- Стратегия I игрока, при которой достигается **α называется максиминой или перестраховочной.**
- При этой стратегии I игроку гарантирован выигрыш не менее **α .**

- Наилучшая стратегия для II игрока.
- Находим максимальный элемент в каждом столбце матрицы $\boldsymbol{\beta_j = \max a_{ij}}$
- Среди $\boldsymbol{\beta_j}$ найдем минимальный $\boldsymbol{\beta = \min \beta_j}$

  $\boldsymbol{\beta = \min (\max a_{ij})}$ верхняя граница или минимакс.
- Стратегия II игрока, при которой достигается это значение называется **минимаксной или перестраховочной** для II.
- Если II придерживается своей минимаксной стратегии, то он получает выигрыш не больший, чем $\boldsymbol{\beta}$

I/II	B_1	$\dots$	B_n	α
A_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	α_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	α_m
β	β_1	$\dots$	β_n	

- В ТИ доказано, что **$\alpha \leq \beta$**
- Существуют игры, в которых **$\alpha = \beta = \gamma$** - чистая **цена игры**, это игры с **седловой точкой.**
- Пара оптимальных стратегий (A^*_I, B^*_j) для I и II игроков , при которых достигается чистая цена игры называется **седловой** точкой платежной матрицы.
- Если игра содержит седловую точку, то говорят, что решение находится в **чистых стратегиях.**

Пример

II / I	B_1	B_2	B_3	
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	1	0	-1	-1
A_3	2	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
	2	1	$\boxed{0}$	

α=0

β=0

γ=0

Игра содержит седловую точку (A_3, B_3)

- Оптимальные чистые стратегии обладают свойством **равновесия**: игроки всегда придерживаются своих оптимальных стратегий, так как это выгодно.
- I игрок не может увеличить выигрыш больше чем **γ,** а II игрок не может уменьшить проигрыш и сделать больше **γ**

- Если седловой точки в платежной матрице нет, то решение игры ищем в **смешанных стратегиях.**
- **Смешанная стратегия** – сложная стратегия, в которой чистые стратегии игроков применяются с некоторыми частотами (вероятностями)

- I игрок. $\mathbf{p_1}$ - вероятность применения стратегии $\mathbf{A_1}$,… $\mathbf{p}_i$- вероятность применения стратегии $\mathbf{A_i}$ … $\mathbf{p_m}$ вероятность применения стратегии $\mathbf{A_m}$ $\mathbf{p_i \geq 0,\ i=1\ldots m,\ \sum p_i=1.}$
- Чистая стратегия $\mathbf{A_i}$ называется **активной**, если вероятность ее использования отлична от нуля $\mathbf{p_i \neq 0}$.

- II игрок. $\mathbf{q_1}$ - вероятность применения стратегии $\mathbf{B_1}$,… $\mathbf{q}_j$- вероятность применения стратегии $\mathbf{B_j}$ … $\mathbf{q_n}$ вероятность применения стратегии $\mathbf{B_n}$ $\mathbf{q_j \geq 0, j=1 \ldots n, \sum q_j=1.}$
- Чистая стратегия $\mathbf{B_j}$ называется **активной**, если вероятность ее использования отлична от нуля $\mathbf{q_j \neq 0}$.

- ***Любая антагонистическая парная конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможное в смешанных стратегиях***.
- Следовательно игра имеет цену **γ**, **α≤ γ ≤ β**
- Игрок I стремится добиться выигрыша = **γ**, а игрок II стремится минимизировать проигрыш до **γ.**
- Смешанные стратегии также обладают свойством **равновесия**, обоим игрокам выгодно их применять.

Теорема фон Неймана

- Применение **оптимальных смешанных стратегий** гарантирует игроку **максимально** возможный средний выигрыш **(минимально** возможный средний проигрыш**) равный цене игры γ, независимо от поведения противника,** если игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Доказательство

- Для I игрока предположим, что **r** стратегий активны, **r≤m** , следовательно $p^*_A=(p_1,\dots.p_r,0\dots0)$
- Для II игрока предположим, что **s** стратегий активны, **s≤n** , следовательно $\mathbf{q^*_B=(q_1,\dots.q_s,0\dots0)}$
- Применяя эти стратегии I получит выигрыш =**γ**, а II – проигрыш =**γ.**

- Требуется доказать, что I применяя оптимальные стратегии независимо от действий II получит выигрыш $=\boldsymbol{\gamma}$.
- Пусть первый применяет оптимальные стратегии $\mathbf{A}^*$, а II применяет чистые стратегии $\mathbf{B_1 \ldots B_s}$.
- Тогда выигрыш I будет $\boldsymbol{\gamma_1 \ldots \gamma_s}$.
- Так как II не применяет оптимальные стратегии, то он может получить проигрыш $\boldsymbol{\geq\gamma}$: $\boldsymbol{\gamma_1 \geq \gamma \ldots\ldots \gamma_s \geq \gamma}$.

- Выразим **γ через $\gamma_1 \ldots \gamma_s$** .
- **$\gamma = q_1\gamma_1 + \ldots + q_s\gamma_s$** – средневзвешенное значение величин **$\gamma_1 \ldots \gamma_s$** (веса- это вероятности)
- Это значение было бы $>\gamma$, если бы хотя бы одно $\gamma_j > \gamma$ следовательно $\gamma_1 \ldots \gamma_s = \gamma$., следовательно I независимо от действий II получит **выигрыш $=\gamma$.**

Игра размерностью 2 на 2

- В игре 2 участника и каждый имеет по 2 допустимые стратегии.
- **I A_1 A_2**
- **II B_1 B_2**

I/II	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

•Если игра содержит седловую точку, то решение находится в чистых стратегиях.

- Предположим, что седловой точки нет, тогда решение будет находиться в смешанных стратегиях.
- $\mathbf{P=(p_1,p_2)}$ $\mathbf{q=(q_1,q_2)}$ Обе стратегии активны, иначе - игра с седловой точкой.
- Найдем оптимальную стратегию для I игрока.
- Согласно теореме, если I игрок будет придерживаться оптимальной стратегии, то получит выигрыш $=\boldsymbol{\gamma}$ независимо от II игрока.
- Если II применяет стратегию $\mathbf{B_1}$, то I игрок получит выигрыш $\mathbf{a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma}$
- Если II применяет стратегию $\mathbf{B_2}$, то I игрок получит выигрыш $\mathbf{a_{12}p_1+a_{22}p_2=\gamma}$

- Получаем систему
- Решаем и находим **p_1 p_2 γ**

$$B_1: \quad a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \gamma$$

$$B_2: \quad a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \gamma$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Аналогично для II игрока

$$A_1: \quad a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma$$

$$A_2: \quad a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

γ из первой и второй системы совпадают

Пример

- Дана платежная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим наличие седловой точки

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \alpha_1 = 1 \\ 2 & 3 & \alpha_2 = 2 \\ \beta_1 = 5 & \beta_2 = 3 & \alpha = 2 \big/ \beta = 3 \end{pmatrix}$$

α≠β – седловой точки нет

$$\begin{cases} 5p_1 + 2p_2 = \gamma \\ p_1 + 3p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4p_1 - p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{1}{5} \quad p_2 = \frac{4}{5} \quad \gamma = \frac{13}{5}$$

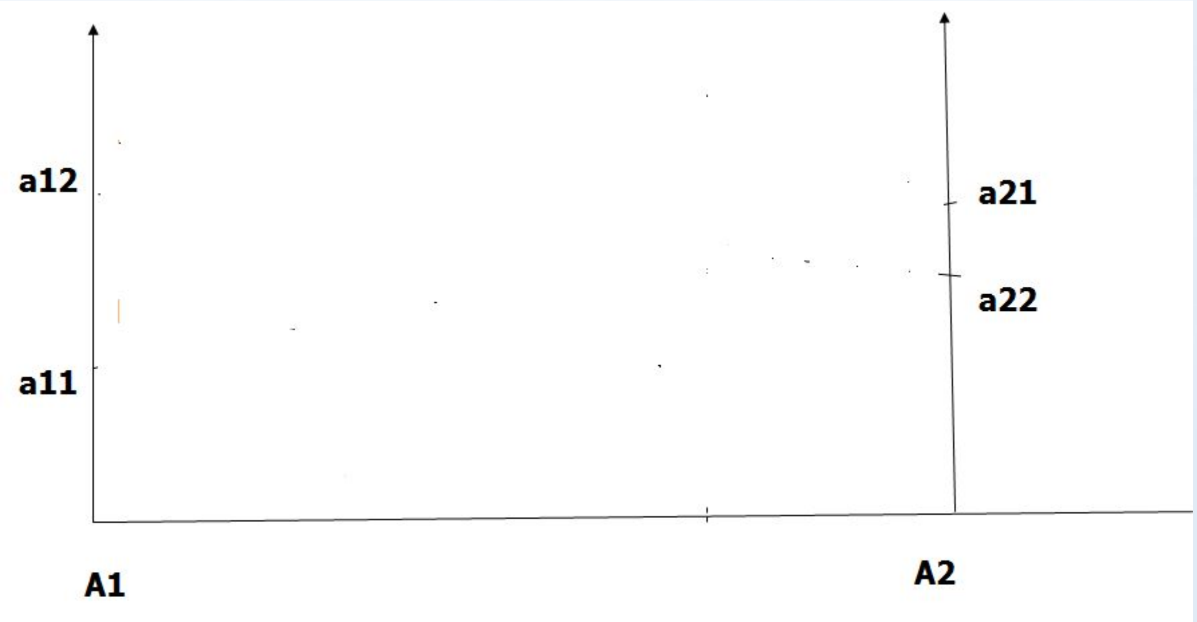
$$\begin{cases} 5q_1 + q_2 = \gamma \\ 2q_1 + 3q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3q_1 - 2q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{2}{5} \quad q_2 = \frac{3}{5} \quad \gamma = \frac{13}{5}$$

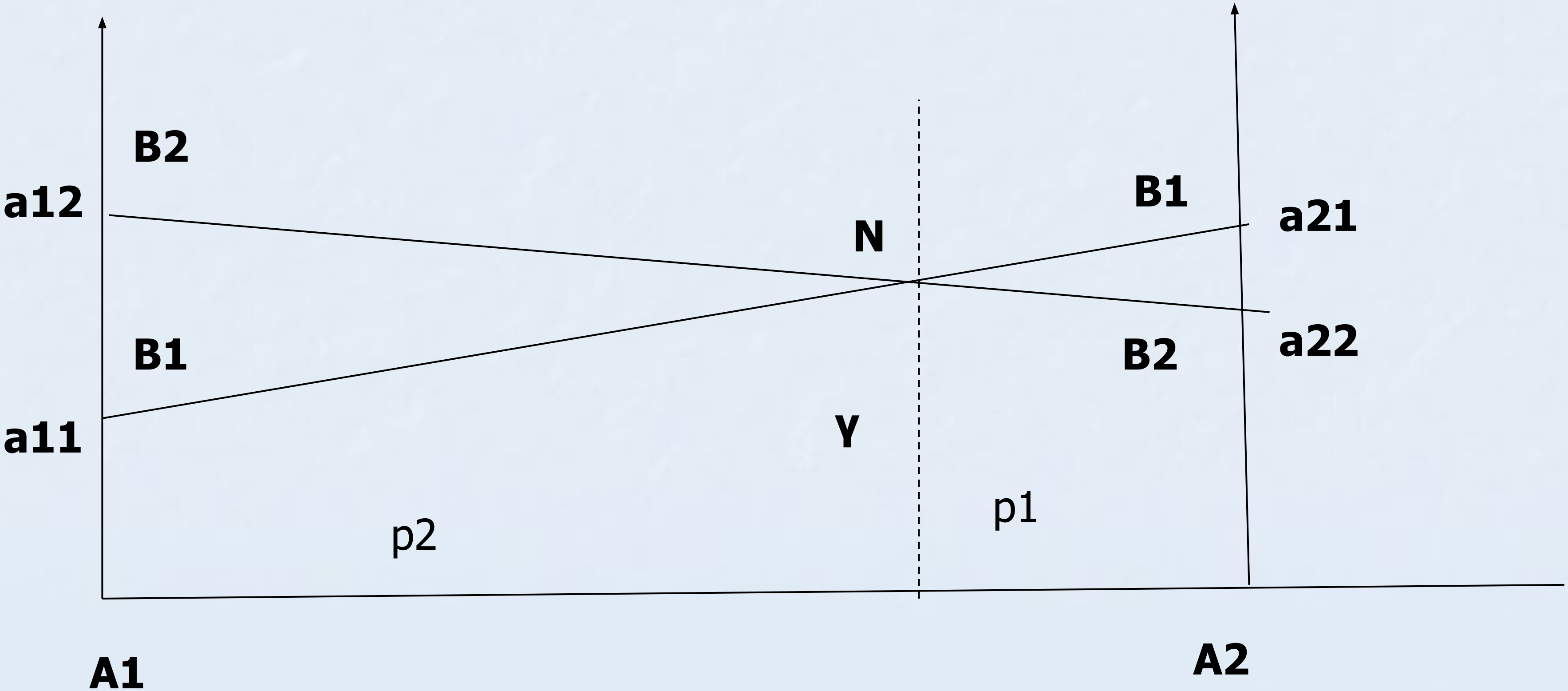
Геометрический метод

Пусть имеется игра с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

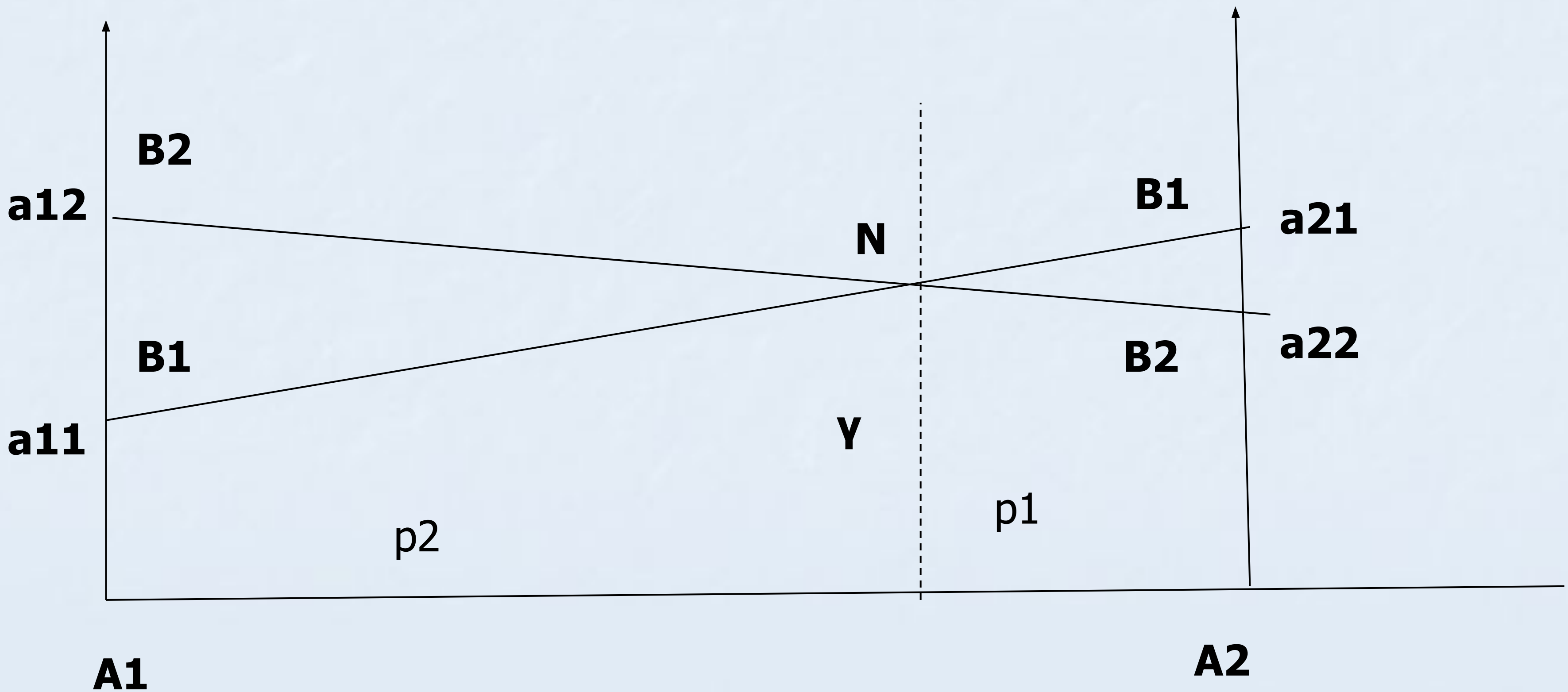
1. В декартовой системе координат на оси абсцисс откладывается отрезок равный 1. Точка x=0 соответствует стратегии A1, x=1 – стратегии A2.
2. На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии A1, на правой – стратегии A2.



- Если игрок II применяет стратегию B1, то его выигрыш при использовании стратегии A1 и A2 составляет соответственно a_{11} и a_{21}.
- Соединим точки B1 B1.
- Если игрок I применяет смешанную стратегию, то средний выигрыш $a_{11}p_1+a_{21}p_2=\gamma$ – точка N на прямой B1 B1, абсцисса ее равна p2.
- B1 B1 называют стратегией игрока I при применении стратегий A1 и A2 с соответствующими вероятностями p1 и p2.



- Если игрок II применяет стратегию В2, то его выигрыш при использовании стратегии А1 и А2 составляет соответственно a_{12} и a_{22}. В2 В2 соответствует стратегии игрока II.
- Точка пересечения В1 В1 и В2 В2 определяет цену игры γ.
- Ординаты точек отрезка В2 В2 равны среднему числу стратегий А1 и А2 с вероятностями p1 и p2.
- Ломаная В1 N В2 – это нижняя граница выигрыша, получаемого игроком I. В точке N он максимален и составляет γ

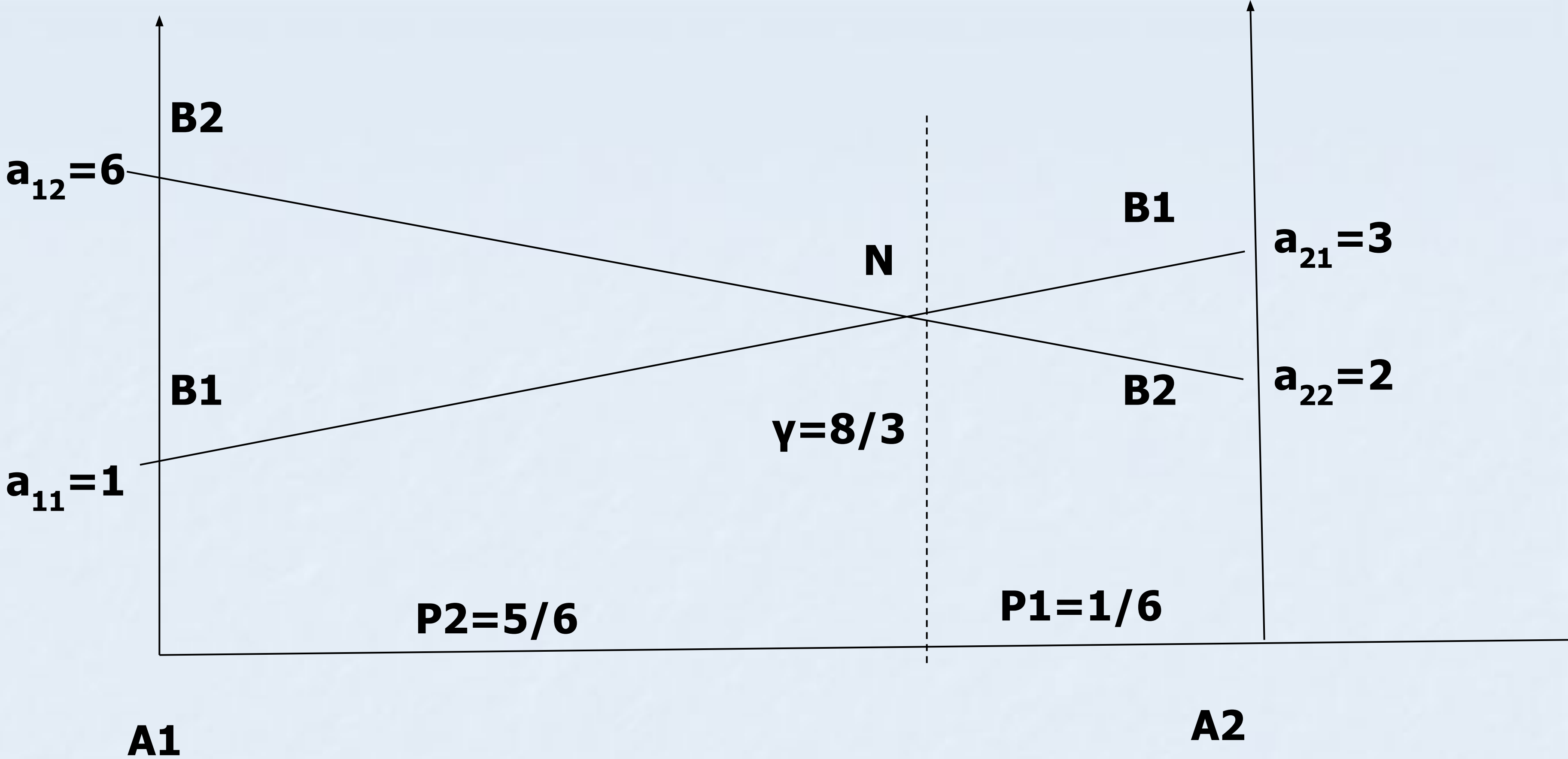


Пример

- Найти оптимальную смешанную стратегию руководителю предприятия и гарантированный средний выигрыш при выборе новых технологий A1 и A2, если известны выигрыши каждого вида по сравнению со старой технологией:

I / II	B1	B2	α
A1	1	6	1
A2	3	2	2
β	3	6	

- Решение
- Нижняя цена игры $\alpha=\max(1,2)=2$
- Верхняя цена игры $\beta=\min(3,6)=3$
- $\alpha \neq \beta$, седловой точки нет.
- Цена игры будет $2\leq\gamma\leq3$.
- Находим решение игры в смешанных стратегиях геометрическим методом.



$$\begin{cases} \gamma = a_{12} + (a_{22} - a_{12}) \times p_2 \\ \gamma = a_{11} + (a_{21} - a_{11}) \times p_2 \end{cases} \Rightarrow p_2 = \frac{5}{6}, p_1 = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{8}{3}$$

Игра размерностью $m \times n$

- В ТИ доказано, что в играх размерностью $\mathbf{m \times n}$ число активных стратегий равно $\mathbf{min\{m,n\}}$
- Таким образом, решение игр $\mathbf{m \times 2}$ и $\mathbf{2 \times n}$ сводится к решению игр $\mathbf{2 \times 2}$.

Способы понижения размерности платежной матрицы

- Размерность матрицы можно понизить путем удаления **дублирующих** и **заведомо не выгодных** стратегий .
- Если в матрице все элементы некоторой строки (столбца) равны, то соответствующие стратегии называются **дублирующими**.

- Если в матрице все элементы некоторой строки, соответствующие стратегии **A_i I** игрока **не больше** соответствующих элементов другой строки, то стратегии **A_i** называется заведомо **невыгодной** для I игрока.
- Если в матрице все элементы некоторого столбца, соответствующие стратегии **B_j** II игрока **не меньше** соответствующих элементов другого столбца, то стратегию **B_j** называется заведомо невыгодной для II игрока

- Рассмотрим платежную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B_4-дублирующая стратегия

A_4- заведомо невыгодная стратегия

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B_3- заведомо невыгодная стратегия

Матричные игры m×n

- Рассмотрим игру, которая будет описана следующей платежной матрицей.

II/I	B_1	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}

Алгоритм решения

Находим решение в смешанных стратегиях

- I игрок чистые стратегии $\mathbf{A_1 \ldots\ldots A_m}$
- II игрок чистые стратегии $\mathbf{B_1 \ldots\ldots B_n}$

Оптимальные смешанные стратегии $\mathbf{p^*_A}$ $\mathbf{,p^*_B}$

- Предположим, что все элементы платежной матрицы ≥0, **иначе добавляем к каждому элементу положительное число**, при этом оптимальные стратегии не меняются, а **цена** игры **увеличивается** на это число.

- Согласно теореме ТИ если I игрок будет придерживаться оптимальной смешанной стратегии, то он получит выигрыш **≥γ** (цены игры).
- При этом II игрок применяет свои чистые стратегии

$$B_1 \quad a_{11}p_1 + \ldots\ldots + a_{1m}p_m \geq \gamma$$

$$\ldots$$

$$B_n \quad a_{1n}p_1 + \ldots\ldots + a_{mn}p_m \geq \gamma$$

$$p_1 + \ldots\ldots + p_m = 1 \quad p_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots m$$

- Введем обозначения $\mathbf{x_i=p_i/\gamma \quad i=1..m}$
- Разделим неравенства на γ

$$a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1m}x_m \geq 1$$

$$\ldots$$

$$a_{1n}x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_m \geq 1$$

$$p_1 + \ldots\ldots + p_m = 1 \quad p_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots m$$

- Цель **I** игрока увеличить выигрыш **γ**
- Так как $\mathbf{p_1+\ldots+p_m=1}$, то $\mathbf{x_1+\ldots x_m=1/\gamma}$

$$F=x_1+\ldots\ldots+x_m\rightarrow\min$$

Получаем задачу линейного программирования.

- Составим аналогичную задачу для II игрока.
- Если II игрок придерживается оптимальной смешанной стратегии, то он получит проигрыш **≤γ**. При этом I игрок применяет свои чистые стратегии.

$$A_1 \quad a_{11}q_1 + \ldots\ldots + a_{1n}q_n \le \gamma$$

$$\ldots$$

$$A_m \quad a_{m1}q_1 + \ldots\ldots + a_{mn}q_n \le \gamma$$

$$q_1 + \ldots\ldots + q_n = 1 \quad q_j \ge 0 \quad j = 1\ldots n$$

- Введем обозначения $\mathbf{y_i=q_j/\gamma \quad j=1..n}$
- Разделим неравенства на γ

$$a_{11}y_1+\ldots\ldots+a_n y_n\le 1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}y_1+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}y_n\le 1$$

$$q_1+\ldots\ldots+q_n=1 \quad q_j\ge 0 \quad j=1\ldots n$$

$$F_1=y_1+\ldots\ldots+y_n\to\max$$

II игрок стремится уменьшить γ и следовательно F_1 надо максимизировать

- Таким образом, решение матричных игр m×n сводится к решению пары двойственных симметричных задач.

$$F = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min \qquad F_1 = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \quad j = 1..n \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \quad i = 1..m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1..m \qquad y_j \geq 0 \quad j = 1..n$$

- Решая эти задачи найдем оптимальное решение $\mathbf{x^*=(x_1{}^*.....x_m{}^*)}$ $\mathbf{y^*=(y^*_1...y^*_n)}$
- Отсюда найдем цену игры:

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j}$$

$$p_i = x_i^* \cdot \gamma \qquad q_j = y_j^* \cdot \gamma$$

Задача

- Найти оптимальную стратегию и цену игры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \alpha = 0 \\ \begin{matrix} \quad 2 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \beta = 1 & \end{array}$$

$$\alpha \neq \beta \quad \textit{нет седловой точки}$$

I игрок

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 1 \\ 2x_1 + \phantom{x_2 +{}} x_3 &\geq 1 \\ x_2 \phantom{{}+ x_3} &\geq 1 \end{aligned}$$

$$II\ \textit{игрок}$$

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \quad & \le 1 \\ y_1 + \quad y_3 & \le 1 \\ 2y_1 + y_2 \quad & \le 1 \end{aligned}$$

Решаем симплекс методом

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + \qquad\qquad & y_4 = 1 \\ y_1 + \qquad\qquad y_3 + & y_5 = 1 \\ 2y_1 + y_2 \qquad\qquad + & y_6 = 1 \end{aligned}$$

			1	1	1	0	0	0
базис	ΔC	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A4	0	1	1	2	0	1	0	0
A5	0	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	1	2	1	0	0	0	1
		0	-1	-1	-1	0	0	0

A2	1	0,5	0,5	1	0	0,5	0	0
A5	0	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	0,75	1,5	0	0	-0,5	0	1
		0,5	-0,5	0	-1	0,5	0	0

A2	1	0,5	0,5	1	0	0,5	0	0
A3	1	1	1	0	1	0	1	0
A6	0	0,75	1,5	0	0	-0,5	1	1
		1,5	0,5	0	0	0,5	1	0

Ответ

- $y^*=(0;\ 0{,}5;\ 1)$
- $X^*=(0{,}5;\ 1;\ 0)$
- **$\gamma=1/1{,}5=0{,}66=2/3\quad \alpha\le\gamma\le\beta$**
- $q^*_B=(0;1/3;2/3)$ $\qquad p^*_A=(1/3;2/3;0)$

Вопросы

1. Каковы основные термины и определения теории игр?
2. Какие классы игр можно выделить?
3. Определите антагонистическую матричную игру.
4. Каков принцип минимакса?
5. Когда следует использовать смешанные стратегии и как их найти?
6. Каков геометрический метод решения игры?
7. Как найти решение с помощью симплекс-метода?