ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДУ

Выполнили:
Грачев Владимир
Быков Георгий
Группа: КИ15-10Б

Задание

1) Решить заданное уравнение:

   $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -0.5$

2) Показать и защитить презентацию на решение задачи Коши.
3) Продемонстрировать программу нахождения численного решения уравнения с помощью методов Эйлера и Рунге-Кутты 2-го порядка.
4) Нарисовать графики решений.
5) Проверить полученные результаты.

Задача Коши

Формулировка:

Задана точка (x0,y0). Найти решение y(x), для которого y(x0)=y0.

Теорема существования решения:

Если функция f(x,y) и ее частная производная f'(x,y) определены и непрерывны в области G, то какова бы ни была внутренняя точка (x0,y0) этой области, данное уравнение в некоторой окрестности этой точки имеет единственное решение, удовлетворяющее условию y(x0)=y0

Решение задачи Коши

$y' - 4xy = -4x^3$; $y(0) = -\frac{1}{2}$; $x_0 = 0$;

$y = u(x) * v(x)$;

$u'v + uv' - 4x(uv) = -4x^3$;

$u'v + u(v' - 4xv) = -4x^3$;

Пусть $v' = 4x^v \Rightarrow \frac{au}{v} = 4xdx \Rightarrow \ln|v| = 2x^2 \Rightarrow v = e^{2x^2}$;

тогда

$u'v = -4x^3$; $u'^{e^{2x^2}} = -4x^3$;

$$u = \int -4x^3 e^{2x^2} dx = -4\int x^3 e^{-2x^2} dx = \int x^2 e^{-2x^2} d(-2x^2) = \begin{vmatrix} t = & -2x^2 \\ x^2 = & -\frac{t}{2} \end{vmatrix} = \int -\frac{t}{2} e^t dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{vmatrix} = -\frac{te^t}{2} + \frac{1}{2}\int te^t dt = -\frac{te^t}{2} + \frac{e^t}{2} + C = x^2 e^{-2x^2} + \frac{e^{-2x^2}}{2} + C;$$

Решение задачи Коши

$$y = uv = \left(x^2 e^{-2x^2} \frac{e^{-2x^2}}{2} + C\right) e^{2x^2} = x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2};$$

$y = x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$; *Общее решение*

$$-\frac{1}{2} = 0^2 + \frac{1}{2} + Ce^0;$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \mathrm{C};$$

$$C = -\frac{2}{2}; \qquad C = -1;$$

$y = x^2 + \frac{1}{2} - e^{2x^2}$ *Частное решение*

Проверка решения

Введите дифференциальное уравнение:

y'-4xy=-4(x)^3

Пример: y''+9y'-y=exp(x)

Введите задачу Коши (необязательное поле):

y(0)=-1\2

Пример: y(0)=0,y'(0)=1

Вычислить

Input:

$$\left\{y'(x) - 4\,x\,y(x) = -4\,x^3,\ y(0) = -\frac{1}{2}\right\}$$

ODE classification:

first-order linear ordinary differential equation

Differential equation solutions:

$$y(x) = x^2 - e^{2\,x^2} + \frac{1}{2}$$

Need a step by step solution for this problem? >>

Метод Эйлера

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

где функция f определена на некоторой области $D \subset R^2$. Решение ищется на интервале $(x_0, b]$. На этом интервале введем узлы:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b.$$

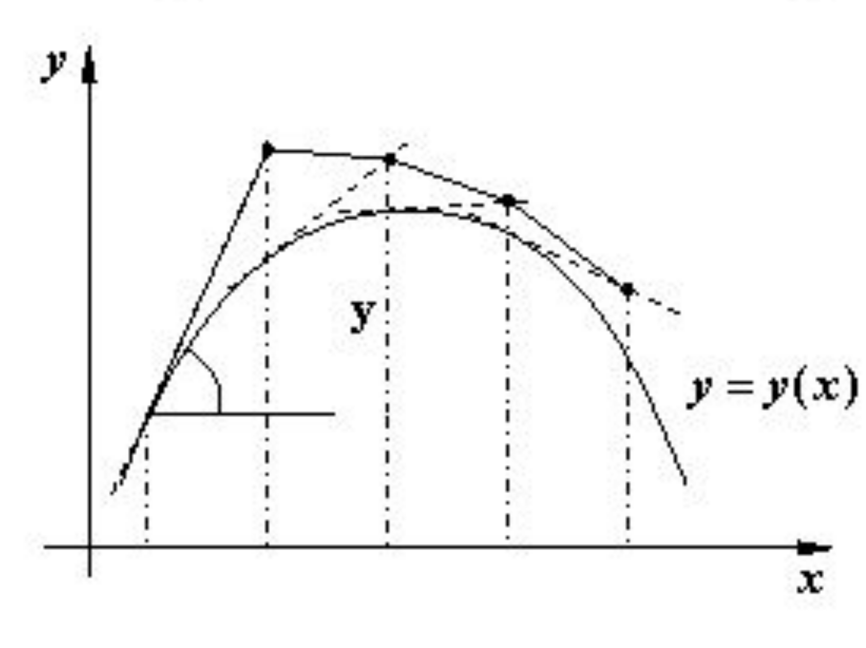
Приближенное решение в узлах x_i, которое обозначим через y_i определяется по формуле:

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Геометрический смысл метода Эйлера

Геометрический смысл метода Эйлера:



Повышение точности решения может быть получено с помощью уменьшения шага интегрирования

Интегральная кривая заменяется ломаной, звенья которой имеют постоянную горизонтальную проекцию h.
Первое звено касается искомой интегральной кривой в (•) (x_0, y_0)

Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (первого метода Рунге).

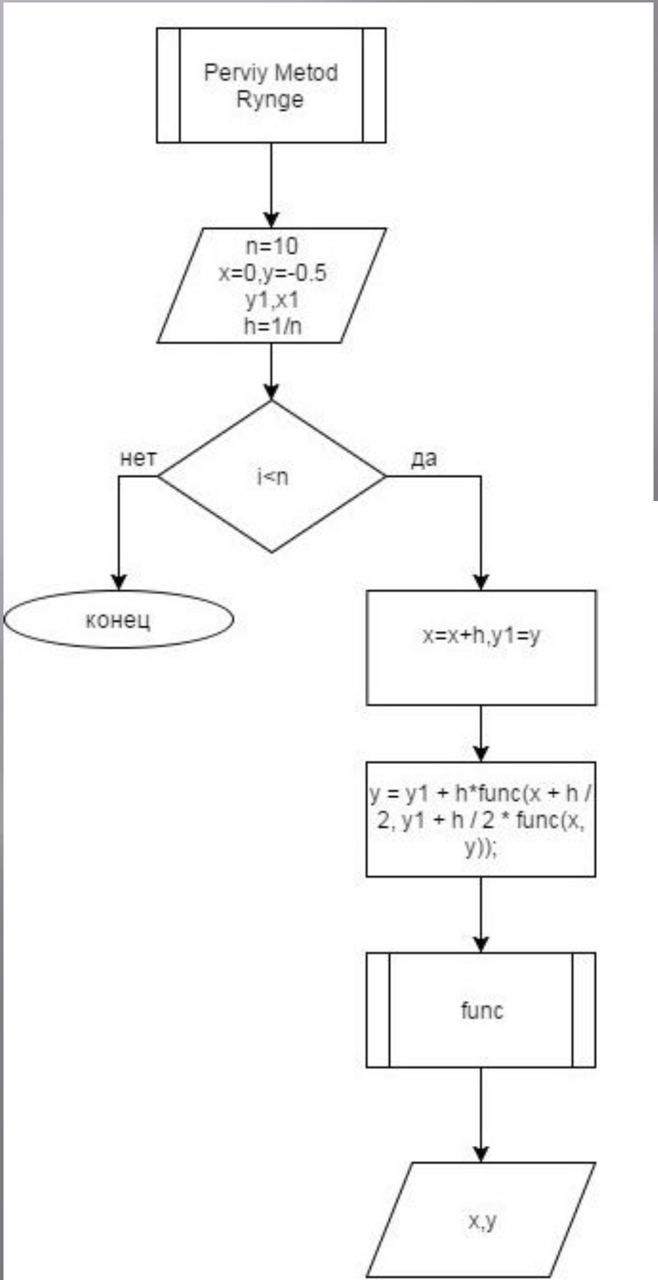
Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее $\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^n$, а $x, h \in \mathbb{R}^1$).

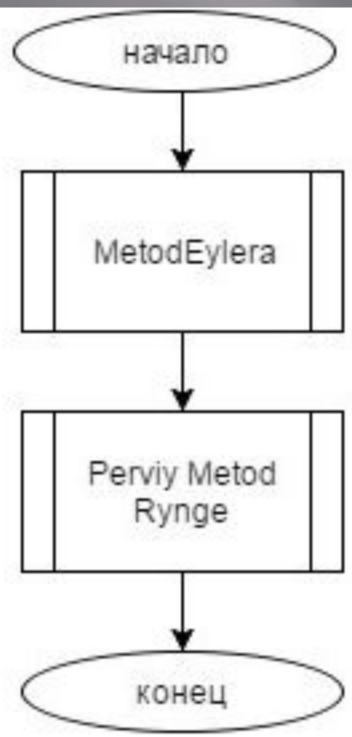
$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

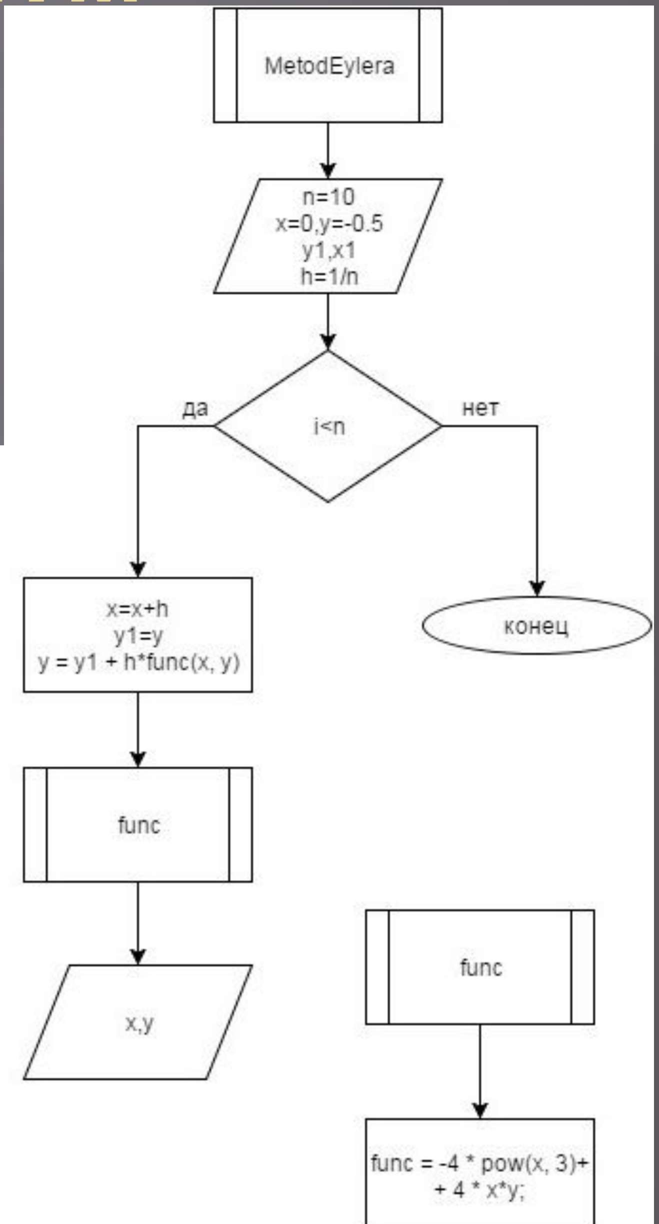
На равномерной сетке имеем *формулу Рунге – Кутта второго порядка точности:*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right).$$

Алгоритм


Perviy Metod Rynge
n=10
x=0,y=-0.5
y1,x1
h=1/n
нет
i<n
да
конец
x=x+h,y1=y
y = y1 + h*func(x + h / 2, y1 + h / 2 * func(x, y));
func
x,y


начало
MetodEylera
Perviy Metod Rynge
конец


MetodEylera
n=10
x=0,y=-0.5
y1,x1
h=1/n
да
i<n
нет
x=x+h
y1=y
y = y1 + h*func(x, y)
конец
func
x,y
func
func = -4 * pow(x, 3)+ + 4 * x*y;

Код программы

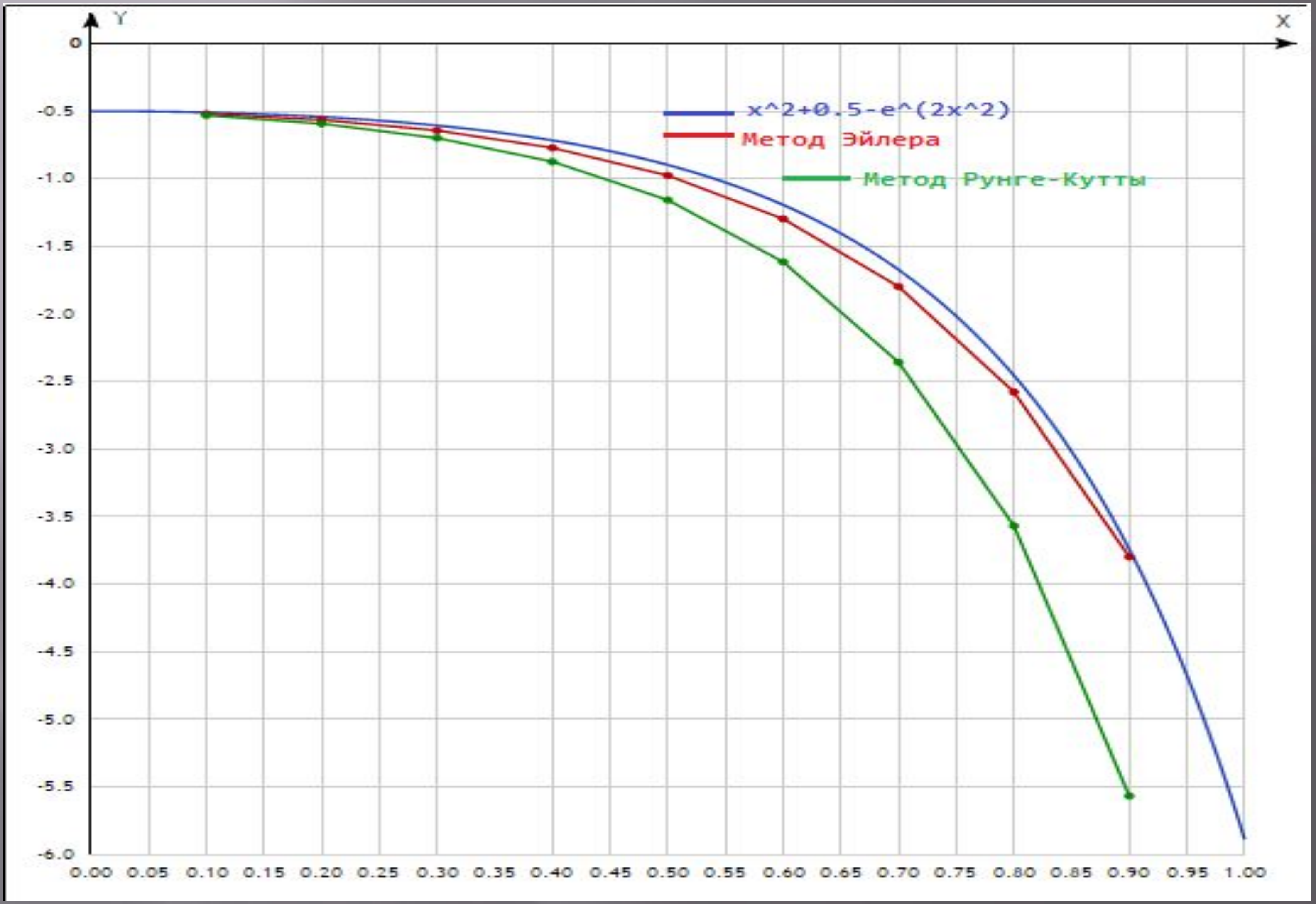
```
double func(double x, double y)
{
	double func;
	func = -4 * pow(x, 3) + 4 * x*y;
	return func;
}
void MetodEylera()
{
	double n = 10.;
	double x = 0., y = -0.5, x1, y1;
	double h = 1. / n;
	for (int i = 1; i < n; i++)
	{
		x = x + h;
		y1 = y;
		y = y1 + h*func(x, y);
		cout << "x = " << x << "    " << "y = " << y << endl;
	}
}
void PerviyMetodRynge()
{
	double n = 10.;
	double x = 0., y = -0.5, x1, y1;
	double h = 1. / n;
	for (int i = 1; i < n; i++)
	{
		x = x + h;
		y1 = y;
		y = y1 + h*func(x + h / 2., y1 + h / 2. * func(x, y));
		cout << "x = " << x << "    " << "y = " << y << endl;
	}
}
int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "rus");
	cout << "Метод Эйлера:" << endl;
	MetodEylera();
	cout << "Первый Метод Рунге:" << endl;
	PerviyMetodRynge();
	getch();
	return 0;
}
```

Результаты работы

Метод Эйлера:
x = 0.1 y = -0.5204
x = 0.2 y = -0.565232
x = 0.3 y = -0.64386
x = 0.4 y = -0.772477
x = 0.5 y = -0.976973
x = 0.6 y = -1.29785
x = 0.7 y = -1.79844
x = 0.8 y = -2.57875
x = 0.9 y = -3.79869

Первый Метод Рунге:
x = 0.1 y = -0.531962
x = 0.2 y = -0.593696
x = 0.3 y = -0.699707
x = 0.4 y = -0.874483
x = 0.5 y = -1.15816
x = 0.6 y = -1.6165
x = 0.7 y = -2.35867
x = 0.8 y = -3.56939
x = 0.9 y = -5.56826

График



Y
X
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-5.5
-6.0
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45 0.50 0.55 0.60 0.65 0.70 0.75 0.80 0.85 0.90 0.95 1.00
x^2+0.5-e^(2x^2)
Метод Эйлера
Метод Рунге-Кутты

Анализ результатов

- На графике мы наблюдаем, что методы Эйлера и Рунге-Кутты 2-го порядка подходят для решения ОДУ.

Анализ работы

- Грачёв Владимир – изучение методов, поиск информации, составление презентации, проверка решения.
- Быков Георгий – изучение методов, написание кода , составление алгоритма, решение задачи Коши, проверка решения, помощь при оформлении презентации.

Анализ работы

- Выполняя работу мы допускали ошибки в решении задачи Коши.
- При написании кода были допущены ошибки.

Вся команда активно принимала участие в работе, и проблемы были быстро устранены.

Используемые ресурсы

- http://orloff.am.tpu.ru/chisl_metod_labs_2/Lab2/teoriya.htm (Описание метода Рунге-Кутты)
- http://energy.bmstu.ru/gormath/mathan2s/du1/du111.htm (информация об ОДУ)
- http://fihel.ru/analit_gem/koshizad21.htm

(Геометрический смысл метода Эйлера)

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%A0%D1%83%D0%BD%D0%B3%D0%B5_%E2%80%94_%D0%9A%D1%83%D1%82%D1%82%D1%8B (изучение метода Рунге-Кутты)

Используемые ресурсы

Проверка задачи Коши:

- http://allcalc.ru/node/659

Среда для написания кода:

- Microsoft Visual Studio 2015

Программа для рисования блок-схем:

https://www.draw.io/

Построение графиков:

- http://yotx.ru/

Спасибо за внимание!