

Кафедра «Информационные технологии»

Исследование операций

Курс лекций по дисциплине
«Исследование операций»

для специальности направления
1-40 01 02-01 «Информационные системы и
технологии
(в проектировании и производстве)»

Автор-составитель

Е.Г. Стародубцев, доцент, канд. физ.-мат. наук

ОСНОВЫ ДИСЦИПЛИНЫ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

- 1. Предмет, история и развитие ИО**
- 2. Классификация задач ИО**
- 3. Критерии и показатели оптимальности (эффективности) задач ИО.**
- 4. Многокритериальные задачи ИО**
- 5. Этапы реализации методов ИО**

1. Предмет, история и развитие ИО



Исследование операций (ИО) (*Operations Research*,

OR) - дисциплина о разработке и применении методов нахождения **оптимальных решений** в разных областях целенаправленной человеческой деятельности на основе **математического, статистического, имитационного моделирования** и других подходов.

Иногда используется название **математические методы исследования операций**.

ИО начинается, когда для обоснования решений применяется некоторый математический аппарат.

Операция - всякое мероприятие (*система действий*), объединённое единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Операция всегда является управляемым мероприятием, то есть зависит от человека, каким способом выбрать параметры, характеризующие её организацию (в широком смысле, включая набор технических средств, применяемых в операции).

Решение (удачное, неудачное, разумное, неразумное) - определённый набор зависящих от человека (управляющих) параметров операции.

Оптимальное - решение, которое по тем или другим признакам предпочтительнее других.

Цель ИО - предварительное количественное обоснование оптимальных решений с опорой на показатель эффективности.

Само принятие решения выходит за рамки ИО и относится к компетенции ответственного лица (лиц), принимающего решение (**ЛПР**).

Элементы решения - параметры, набор которых образует решение: числа, векторы, функции, физические признаки и т. д. Элементы решения можно изменять в некоторых пределах.

Заданные условия (ограничения) - фиксированы сразу и нарушены быть не могут (размеры, вес, грузоподъёмность, сроки, ...). К ним относятся ресурсы (материальные, технические, людские, время), используемые в операции, и иные требования к решению.

В результате возникает **множество возможных решений выполнения операции.**

Решение может быть:

- **допустимым** – если оно удовлетворяет набору определенных условий (ограничений);
- **оптимальным** – если оно допустимо и, по определенным признакам, предпочтительнее других, или, по крайней мере, не хуже.

Признак предпочтения называется **критерием оптимальности (эффективности)**. Этот критерий включает в себя **целевую функцию (показатель эффективности)** и **направление оптимизации** или набор целевых функций и соответствующих направлений оптимизации.

Целевая функция - количественный показатель предпочтительности или эффективности решений.

Направление оптимизации - максимум (минимум), если наиболее предпочтительным является наибольшее (наименьшее) значение целевой функции.

Например, критерием оптимальности может быть максимизация прибыли или минимизация расходов.

Математическая модель задачи ИО

включает в себя описания:

- *переменных* (управляющих параметров), которые необходимо найти;
- *критериев оптимальности*;
- *множества допустимых решений* (ограничений, накладываемых на переменные).

Цель ИО - количественно и качественно обосновать принимаемое решение.

Окончательное решение принимает ответственное лицо (либо группа лиц), называемое **лицо, принимающее решение (ЛПР).**

Математическая модель задачи ИО составляется в соответствии с представлениями ЛПР об этой задаче, т.е. в соответствии с его **информационным состоянием.** При этом важно, чтобы математическая модель задачи была наиболее **адекватной**, т.е. наиболее правильно отражала информационное состояние ЛПР.

Для этого разработчик математической модели должен работать в тесном контакте с ЛПР.

Основной принцип разработчика:

“Разрабатывай не то, что заказчик просит, а то, что ему нужно.” (М. Гэри и Д. Джонсон

“Вычислительные машины и труднорешаемые задачи”)

Проверка адекватности представлений ЛПР о задаче *не является предметом ИО*. Изменение информационного состояния ЛПР может привести к изменению математической модели задачи.

Пример операции

Составляется план перевозок грузов из пунктов отправления A_1, A_2, \dots, A_m в пункты назначения B_1, B_2, \dots, B_n .

Элементы решения - числа x_{ij} , показывающие, какое количество груза будет отправлено из i -го пункта отправления A_i в j -й пункт назначения B_j .

Решение - совокупность чисел $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$.

Примеры типичных задач ИО

- План снабжения предприятий
- Постройка участка магистрали
- Продажа сезонных товаров
- Снегозащита дорог
- Выборочный контроль продукции
- Медицинское обследование
- Библиотечное обслуживание

анализом, математическим моделированием, теорией игр, методами искусственного интеллекта и др.

ИО используют, в частности:

- для решения задач планирования производства (контроллинга, логистики, маркетинга); это позволяет понизить затраты, повысить продуктивность предприятий;
- в военной области (оценка боевой эффективности вооружений, военной техники и воинских формирований, решения комплексных задач снабжения армий и др.);
- для развития межгосударственных торговых механизмов;
- для прогноза развития (например, климата) и т. д.

Из истории развития ИО

В годы Второй мировой войны ИО широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по ИО работали в командовании бомбардировочной авиации США, дислоцированном в Великобритании. Ими исследовались факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к четырёхкратному повышению эффективности бомбометания. Из-за дислокации в отделе оперативных действий (Operations) дисциплина и получила своё

название по имени адреса, на который
высылалась почта для отдела: Operations/Research.

В начале войны боевое патрулирование
самолетов союзников для обнаружения кораблей и
подводных лодок противника носило
неорганизованный характер. Привлечение к
планированию специалистов по ИО позволило
установить такие маршруты патрулирования и такое
расписание полетов, при которых вероятность
оставить объект незамеченным была сведена до
минимума.

После войны группы специалистов по ИО продолжили свою работу в Вооружённых силах США и Великобритании. Публикация ряда результатов в открытой печати вызвала всплеск общественного интереса к этому направлению. Возникает тенденция к применению методов ИО в коммерческой деятельности, в целях реорганизации производства, перевода промышленности на мирные рельсы.

В Великобритании национализация некоторых видов промышленности создала возможность для проведения экономических

исследований на базе математических моделей в общегосударственном масштабе. ИО стало применяться при планировании и проведении государственных, социальных и экономических мероприятий. В США внедрение методов ИО в практику управления экономикой происходило медленнее - но и там многие концерны вскоре стали привлекать специалистов по ИО для решения проблем, связанных с регулированием цен, повышением производительности труда, ускорением доставки товаров потребителям и пр.

Лидерство в области применения научных методов управления принадлежало авиационной промышленности.

В 1950-1960-е годы на Западе создаются общества и центры ИО, выпускающие собственные научные журналы, большинство западных университетов включает эту дисциплину в свои учебные планы.

Наибольший вклад в формирование и развитие ИО сделали Р. Акоф, Р. Беллман, Дж. Данциг, Г. Кун, Т. Саати, Р. Чермен (США), А. Кофман, Р. Форд (Франция) и др.

Важная роль в создании современного математического аппарата и развития многих направлений ИО принадлежит Л. В. Канторовичу, Б. В. Гнеденко, М. П. Бусленко, В. С. Михалевичу, Н. Н. Моисееву, Ю. М. Ермолаеву, Н. З. Шору и др.

За выдающийся вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике академику Л. В. Канторовичу вместе с профессором Т. Купмансом (США) в 1975 году присвоена Нобелевская премия в экономике.

2. Классификация задач ИО

Классификация по зависимости параметров задачи от времени

Статическая задача.

Принятие решения происходит при условии, что все параметры задачи *заранее известны и не изменяются во времени.*

Процедура принятия решения *осуществляется один раз.*

Динамическая задача.

В процессе принятия решения параметры задачи *изменяются во времени*. Процедура принятия решения осуществляется поэтапно и может быть представлена в виде процесса, зависящего от времени, в том числе непрерывно. Пример - навигационная задача.

Классификация в зависимости от достоверности информации о задаче

Детерминированная задача.

Все параметры задачи заранее известны.

Для решения таких задач в основном применяются методы **математического программирования (МП)**, в частности, **линейного МП** (задачи о составлении оптимальных смесей, раскросе материала с наименьшими отходами и др.)₂₄

Недетерминированная задача.

Не все параметры задачи заранее известны.

Например, необходимо принять решение об управлении устройством, некоторые узлы которого могут непредсказуемо выходить из строя. Оптимальное решение недетерминированной задачи **ИО** отыскать практически невозможно. Однако некоторое “разумное” решение отыскать можно.

“Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы, на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими методами ”

(Т.Л. Саати)

Стохастическая задача.

Не все параметры задачи заранее известны, но *имеются статистические данные о неизвестных параметрах* (вероятности, функции распределения, математические ожидания и т.д.).

Для отыскания оптимального решения стохастической задачи применяются разные методы, в частности:

- *искусственное сведение к детерминированной задаче* (например, неизвестные параметры заменяются их средними значениями);
- *“оптимизация в среднем”* (вводится и оптимизируется некоторый статистический критерий).

Задача в условиях (полной) неопределенности.

*Статистические данные о неизвестных параметрах отсутствуют. Такие задачи в основном изучаются в рамках **теории игр.***

Классификация по виду критерия оптимальности

Критерий оптимальности может иметь любой вид, в том числе **неформализуемый**.

Наиболее распространенные **формализуемые** критерии оптимальности заключаются в оптимизации (*минимизации или максимизации*) одной либо нескольких скалярных целевых функций.

Функция называется *скалярной*, если ее значением является некоторое число. Задача оптимизации скалярной функции на заданном множестве допустимых числовых решений называется ***задачей математического программирования.***

Наиболее изученными представителями однокритериальных задач математического программирования, т.е. задач с одной целевой функцией, являются следующие задачи.

Задачи, линейного программирования.

Целевая функция линейная, множество допустимых решений выпуклый многогранник.

Задачи, квадратичного программирования.

Целевая функция квадратичная

$(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} * x_i * x_j)$, а множество допустимых решений выпуклый многогранник.

Задачи, стохастического программирования.

Это задачи линейного программирования с неизвестными числовыми параметрами, о которых имеются статистические данные.

Задачи, дискретного программирования.

Множество допустимых решений - дискретное множество.

Задачи, целочисленного программирования. Множество допустимых решений - целые числа.

Задачи булева программирования.
Множество допустимых решений –
Матрицы, элементы которых только 0 и 1.

3. Критерии и показатели оптимальности (эффективности) задач ИО

Критерий эффективности

(оптимальности) – математическое выражение для количественной оценки степени достижения цели операции.

Переход от качественного понятия – **цели операции**, к количественному понятию – **критерию**, содержит определенное противоречие.

Критерий эффективности

(**оптимальности**) – содержит

противоречие:

критерий, как правило, отражает только некоторые, наиболее существенные стороны цели операции.

Формулировка критерия, как можно более полно соответствующего цели операции, является одной из наиболее сложных творческих задач ИО.

Показатель эффективности

(оптимальности), ПЭ – количественная **оценка** какого-то отдельного свойства изучаемого объекта или явления, используемая для сравнения разных решений.

Свойства технических, экономических, военных и др. объектов и явлений обычно многогранны. Для их количественной оценки используется совокупность многих ПЭ.

ПЭ часто называют «*целевой функцией*».

ПЭ выбирают так, чтобы он отражал *целевую направленность операции*. «Лучшее» - то решение, которое максимально способствует достижению цели операции.

Для выбора ПЭ **W**, нужно ответить на вопрос:

Чего мы хотим, к чему стремимся, выполняя операцию?

Выбирая решение, предпочитают такое, которое обращает **W** в максимум (или в минимум).

Например, *доход от операции* хотелось бы обратить в максимум; если же ПЭ - *затраты*, то их желательно обратить в минимум.

Если ПЭ желательно максимизировать, это можно записать в виде:

$$W \rightarrow \mathbf{max}, \quad (*)$$

а если минимизировать:

$$W \rightarrow \mathbf{min} \quad (**).$$

Выражения (*), (**) – примеры записи критериев эффективности для задач ИО.

Часто выполнение операции сопровождается действием *случайных факторов* (погода, отказы техники, колебания спроса и предложения и т. д.).

В этих случаях обычно в качестве ПЭ берется не сама величина, которую нужно максимизировать (минимизировать), а ее ***математическое ожидание (среднее значение)***.

Возможно, что операция, сопровождаемая случайными факторами, преследует цель A , которая может быть достигнута полностью или совсем не достигнута (схема «да - нет»), и никакие другие результаты не интересуют.

Тогда за ПЭ выбирается ***вероятность достижения этой цели $P(A)$.***

Например, при стрельбе по цели с неизменным условием уничтожить ее ПЭ - вероятность уничтожения цели.

Неправильный выбор ПЭ очень «опасен». Операции, организованные «под углом зрения» неудачно выбранного ПЭ, могут привести к неоправданным затратам и потерям.

Примеры возможного выбора одного ПЭ для различных операций

План снабжения предприятий

Задача операции - обеспечить снабжение сырьем предприятия при минимальных расходах на перевозки.

ПЭ R - *суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например, месяц*
($R \Rightarrow \min$).

Постройка участка магистрали

Требуется так спланировать строительство, чтобы закончить его как можно скорее. Естественным ПЭ было бы время завершения стройки, если бы оно не было связано со случайными факторами (отказы техники, задержки в поставках материалов, выполнении отдельных работ). Поэтому за ПЭ можно выбрать *среднее ожидаемое время T окончания стройки ($T \Rightarrow \mathit{min}$)*.

Продажа сезонных товаров

В качестве ПЭ можно взять среднюю ожидаемую прибыль Π от реализации товаров за сезон ($\Pi \Rightarrow \max$).

Снегозащита дорог

Нужен наиболее выгодный экономически план снегозащиты, поэтому в качестве ПЭ можно выбрать *средние за единицу времени* (например, за год) *расходы R* на содержание и эксплуатацию дорог, включая расходы, связанные как с сооружением защитных устройств, так и с расчисткой дорог и задержками транспорта (**$R \Rightarrow \min$**).

Противолодочный рейд

(исторически одна из первых изученных операций ИО). Так как рейд имеет вполне определенную цель **A** - уничтожение подводной лодки, то за ПЭ можно выбрать вероятность **$P(A)$** уничтожения лодки.

Выборочный контроль продукции

Естественный ПЭ, подсказанный формулировкой задачи, это *средние ожидаемые расходы R на контроль за единицу времени*, при условии, что система контроля обеспечивает заданный уровень качества, например, средний процент брака не выше заданного (**$R \Rightarrow min$**).

Медицинское обследование

За ПЭ можно взять *средний процент*
(долю) Q выявленных больных и носителей
инфекции ($Q \Rightarrow \mathit{max}$).

Библиотечное обслуживание

Если о качестве обслуживания судить по времени, которое запросивший книгу абонент ждет ее получения, то за ПЭ можно взять *среднее время T ожидания книги читателем, подавшим на нее заявку ($T \Rightarrow \min$)*.

Можно подойти к вопросу и с иных позиций, выбрав за ПЭ *среднее число M книг, выданных за единицу времени ($M \Rightarrow \max$)*.

Примеры выше специально подобраны простыми, чтобы выбор ПЭ был нетруден и прямо диктовался словесной формулировкой задачи, ее (почти всегда) однозначной целевой направленностью. Однако на практике это далеко не всегда бывает так.

Например, что взять в качестве *ПЭ работы городского транспорта?* Среднюю скорость передвижения пассажиров по городу? Среднее число перевезенных пассажиров? Среднее количество километров, пройденное пешком человеком, которого транспорт не может доставить к нужному месту?

4. Многокритериальные задачи

В задачах ИО, как правило, присутствует не один, а *несколько признаков предпочтения (критериев)*. Такие задачи называются **многокритериальными**.

Критерии могут оказаться *противоречивыми*, т.е. решение, лучшее по определённому признаку, может оказаться худшим по другому признаку.

Например, *минимизация стоимости и максимизация качества товара* почти всегда противоречивы.

В этом случае задача отыскания решения, предпочтительного по всем признакам, будет **некорректной**, т.е. *не будет иметь ни одного решения.*

В случае противоречивых критериев. ИСО предлагает следующие подходы к отысканию подходящего решения.

1) Замена некоторых критериев ограничениями вида \leq или \geq . Например, минимизация стоимости $f(x) \rightarrow \min$, может быть заменена ограничением вида $f(x) \leq A$, где A некоторая верхняя оценка стоимости, т.е. максимально допустимая стоимость.

2) **Свертка критериев.** Создается один глобальный скалярный критерий, целевая функция которого является некоторой функцией от исходных целевых функций.

Наиболее употребимыми являются линейные свертки вида $\alpha f(x) + \beta g(x)$ (и случае двух критериев). *Нетривиальной* является задача отыскания адекватных значений коэффициентов α и β , отражающих относительную важность целевых функций $f(x)$ и $g(x)$.

3) ***Ранжирование критериев.*** Критерии ранжируются по степени важности.

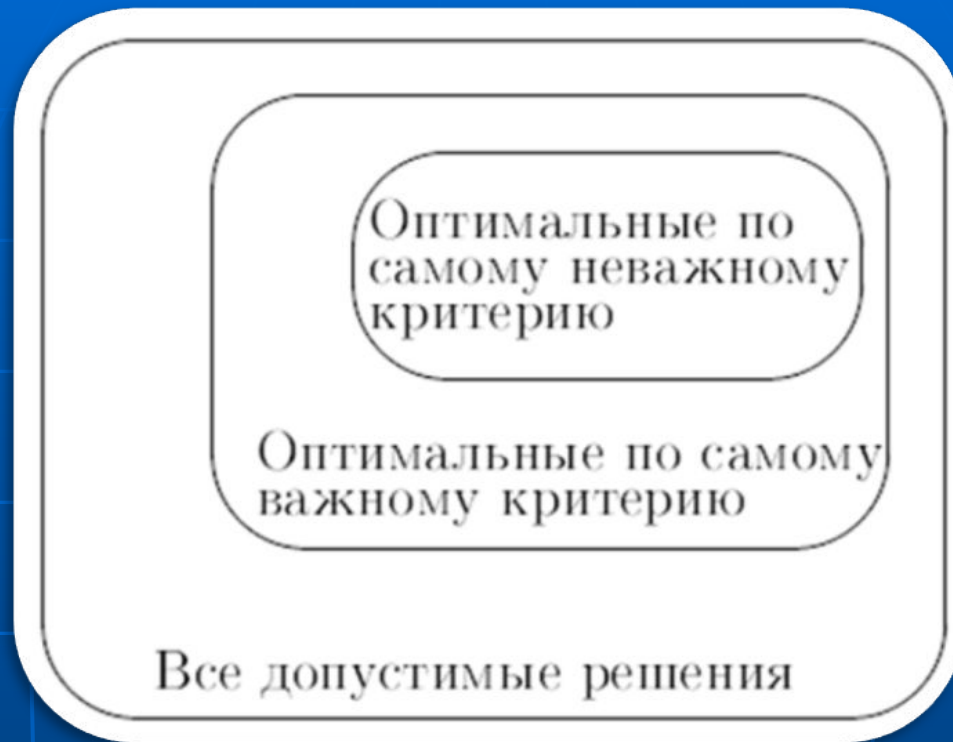
4) Отыскание решений, лучших хотя бы по одному критерию.

Подходы 1 и 2 ведут к однокритериальной задаче.

Подход 3 - к **задаче с упорядоченными критериями**.

Подход 4 - к **задаче с независимыми критериями**.

В задаче с упорядоченными критериями критерии *упорядочиваются по важности* и требуется найти оптимальное решение для наименее важного критерия на множестве решений, оптимальных для более важного критерия (см. рисунок).



Самое большое множество всех допустимых решений, в него вложено множество решений, оптимальных по самому важному критерию, далее вложено множество оптимальных решений по второму по важности критерию, и т.д.

В задаче с независимыми критериями требуется найти множество **недоминируемых (эффективных) решений**.

Недоминируемое решение лучше любого другого допустимого решения хотя бы по одному критерию либо не хуже по всем критериям.

Множество недоминируемых решений также называется **множеством Парето**.

Пример 1 многокритериальной задачи

Организуется (или реорганизуется) работа промышленного предприятия. Под углом зрения какого критерия надо выбирать решение?

С одной стороны, хотелось бы обратить в максимум *валовой объем продукции V* . Желательно также было бы получить *максимальный чистый доход D* . Что касается *себестоимости S* , то ее хотелось бы обратить в минимум, а *производительность труда P* - в максимум. При изучении задачи может возникнуть еще ряд дополнительных ПЭ.

Пример 2 многокритериальной задачи

Пример многокритериальной задачи с независимыми критериями. Фирма по разработке программного обеспечения должна выполнить проекты 1 и 2 в последовательности 1,2. Для выполнения каждого проекта можно привлечь одного или двух исполнителей. Пусть x_1 и x_2 - число исполнителей, привлеченных для выполнения проектов 1 и 2 соответственно. Время выполнения проекта i равно $p_i(x_i)$ месяцев, а соответствующая стоимость $c_i(x_i)$ млн. рублей.

Требуется минимизировать общее время выполнения проектов при минимальной стоимости.

Значения функций заданы следующим образом:

Общее время выполнения проектов равно $F_1(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$, а стоимость их выполнения равна $F_2(x_1, x_2) = c_1(x_1) + c_2(x_2)$.

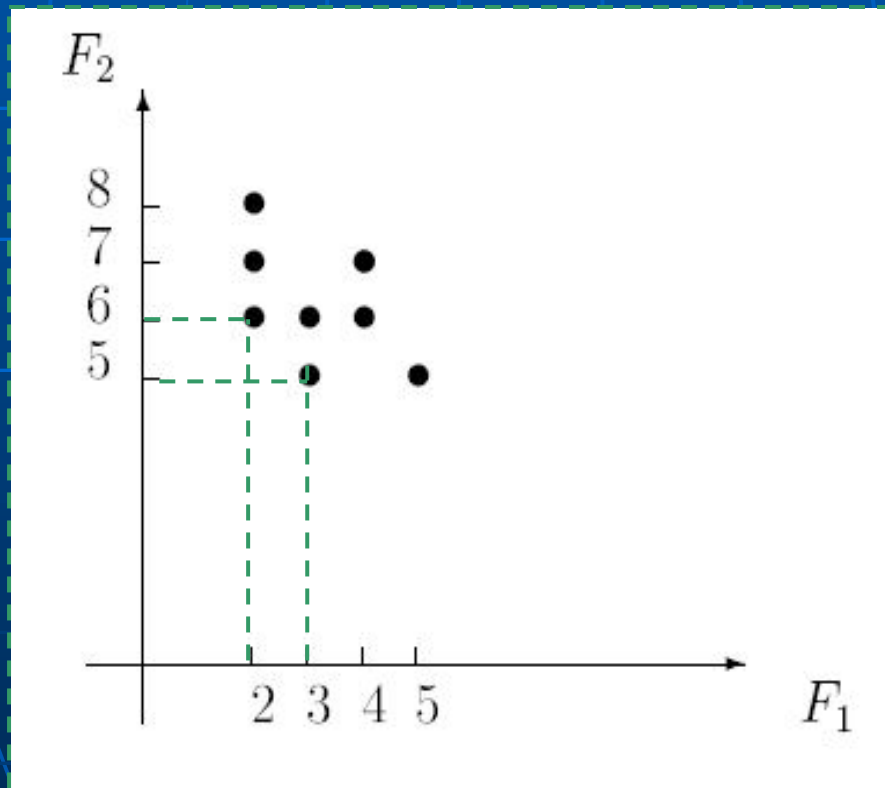
Определим все возможные значения пар $(F_1, F_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)) \in \{(2,6), (2,7), (2,8), (3,5), (3,6), (4,6), (4,7), (5,5)\}$, см. рис.

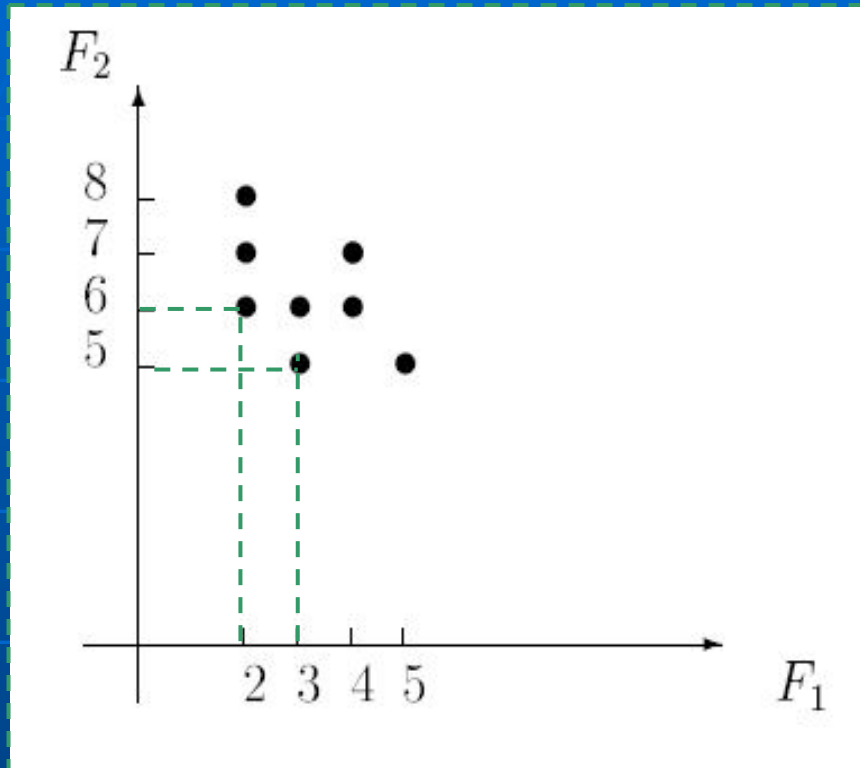
x	1	2	3
$p_1(x)$	2	1	1
$p_2(x)$	3	1	1
$c_1(x)$	1	2	3
$c_2(x)$	4	4	5

Задача отыскания множества Парето в случае двух критериев вида $F_1(x) \rightarrow \min$ и $F_2(x) \rightarrow \min$ может быть решена графически следующим образом. Находим все точки с наименьшим значением $F_i(x)$.

Если их несколько, выбираем из них точку с наименьшим значением $F_2(x)$. Включаем ее в множество Парето.

Отсекаем точки с большими либо равными значениями $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (северо-восточный угол с вершиной в выбранной точке). Повторяем процедуру для оставшейся части допустимой области.





Из рисунка видно, что для нас представляют интерес пары $(F_1, F_2) = \in \{(2,6), (3,5)\}$ и соответствующие решения $(x_1, x_2) \in \{(2,2), (1,2)\}$, которые являются недоминируемыми и образуют множество Парето рассматриваемой задачи.

5. Этапы реализации методов ИО

На практике реализация методов ИО включает следующие этапы.

- 1. Формализация исходной проблемы.*
- 2. Построение математической модели.*
- 3. Решение модели.*
- 4. Проверка адекватности модели.*
- 5. Реализация решения.*

Из них только 3-й этап достаточно определен и наиболее прост для реализации, т.к. решение модели основывается на точной математической теории. Выполнение остальных этапов (1, 2, 4, 5) в значительной мере - искусство, а не наука. Поэтому эти этапы точно описать невозможно.

1. Формализация исходной проблемы

- требует исследования той предметной области, где возникла проблема. Это *начальный этап работы по ИО.*

В результате такого исследования должны быть получены три принципиальных элемента решаемой задачи:

- 1) *описание возможных альтернативных решений,*
- 2) *определение целевой функции,*
- 3) *построение системы ограничений, налагаемых на возможные решения.*

2. Построение математической модели

- перевод формализованной задачи, описание которой получено на этапе 1, на четкий язык математических отношений. Если получена одна из стандартных математических моделей, например, *модель линейного программирования*, то решение получают путем использования существующих алгоритмов.

Если же результирующая модель очень сложная и не приводится к какому-либо стандартному типу моделей, то при ИО возможно (или/и): *упрощение модели, применение эвристического подхода, использование имитационного моделирования.*

3. Решение модели

- наиболее простой этап, так как здесь используются известные *алгоритмы оптимизации*. Важный аспект этого этапа - *анализ чувствительности полученного решения* - получение дополнительной информации о поведении "оптимального" решения при изменении параметров модели.

Такой анализ особенно необходим, когда нельзя точно оценить параметры модели. В этом случае важно изучить поведение оптимального решения в окрестности *начальных оценок параметров модели*.

4. Проверка адекватности модели

- проверка «правильности» модели, т.е. соответствия поведения модели в конкретных ситуациях поведению исходной реальной системы.

Но сначала проверяют, что решение, полученное в рамках модели, имеет смысл и интуитивно приемлемо.

Общепринятый метод проверки адекватности модели - *сравнение полученного решения с известными ранее решениями или поведением реальной системы.*

Модель считается адекватной, если при определенных начальных условиях ее поведение *совпадает с поведением исходной системы при тех же начальных условиях.* Хотя это и не гарантирует, что при других начальных условиях поведение модели будет совпадать с поведением реальной системы.

В некоторых случаях невозможно прямое сравнение модели с реальной системой или сравнение решений, полученных в рамках этой модели, с известными решениями (например, из-за отсутствия таких данных).

В такой ситуации для проверки адекватности математической модели можно использовать имитационное моделирование, т.е. сравнивать поведение математической и имитационной моделей.

5. Реализация решения

- подразумевает перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для лиц, принимающих решения (ЛПР), т.е. заказчиков ИО.

Литература

<http://ru.wikipedia.org/wiki/>

Ковалев М.Я. Курс лекций по дисциплине «Исследование операций», Минск, БГУ, 2004.

Вентцель Е.С. Исследование операций, М., «Советское радио», 1972.

Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2005.