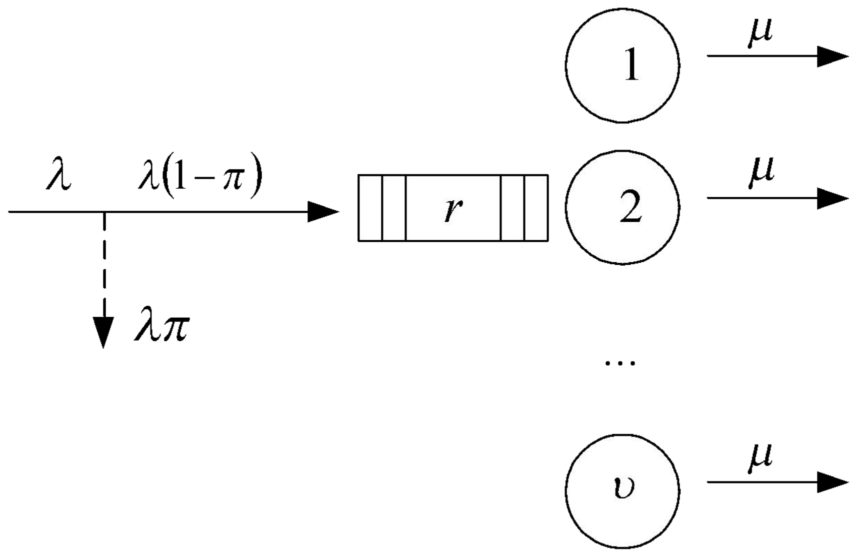
Курс «Прикладные задачи ТМО»

Вторая модель Эрланга

Лекция 8

Схема 2-й модели Эрланга

$$\left.\begin{matrix} M \\ \lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} M \\ \mu \end{matrix} \left| \upsilon \,\right| r < \infty$$



Структурные параметры:
υ - количество приборов (линий пучка)
r - количество мест в очереди
R - емкость системы

Нагрузочные параметры:
λ - интенсивность входящего ПП заявок
μ - интенсивность экспоненциального распределения СВ длительности обслуживания заявки

π – вероятность блокировки заявки, $\pi = p_{\upsilon+r}$

Математическая модель

$X(t)$ - число заявок в СМО в момент t, $t \geq 0$

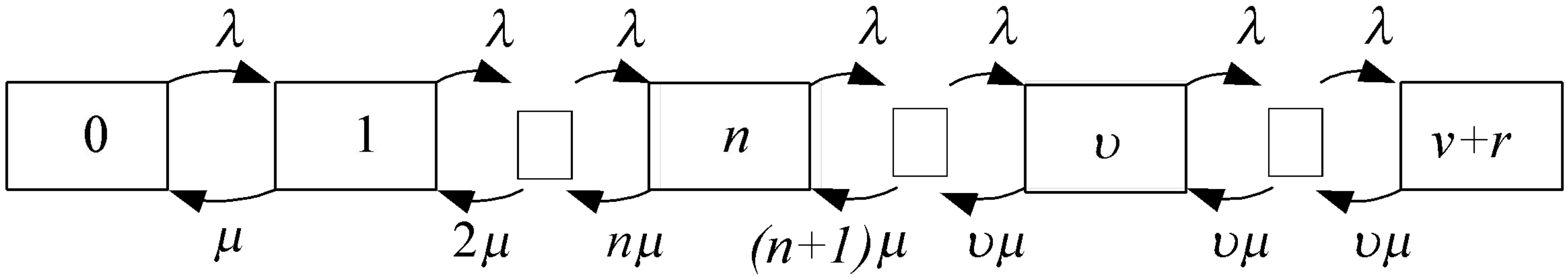
$\mathrm{J} = \{0, 1, \ldots, R\}$ - пространство состояний системы,

Случайный процесс (СП) $X(t)$ – ПРГ, $X(t) \in \mathrm{J}$

$p_n = \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{P}\{X(t) = n\}$ - стационарная вероятность состояния $n \in \mathrm{J}$

$\{p_n, \ n \in \mathrm{J}\}$ - стационарное распределение вероятностей ПРГ $X(t)$

Диаграмма интенсивностей переходов



Интенсивности

переходов ПРГ $X(t)$:

$$a_{n,n+1} =: \lambda_n = \lambda u(r-n),$$

$$a_{n,n-1} =: \mu_n = \mu \min(n,\upsilon),$$

$$a_{n,n} = -\lambda_n - \mu_n.$$

СУГБ

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu) p_n + (n+1)\mu p_{n+1} = 0,\ n = \overline{1, \upsilon - 1};$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \upsilon\mu) p_n + v\mu p_{n+1} = 0,\ n = \overline{\upsilon, \upsilon + r - 1};$$

$$\lambda p_{\upsilon + r - 1} - \upsilon\mu p_{\upsilon + r} = 0.$$

СУЛБ

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n,\ n = \overline{1,\upsilon};$$

$$\lambda p_{n-1} = \upsilon\mu p_n,\ n = \overline{\upsilon,\upsilon + r}.$$

Условие нормировки: $\sum_{n=0}^{\upsilon+r} p_n = 1$

Стационарное распределение (1/4)

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, \; n = \overline{0, \upsilon}; \\ \left(\dfrac{\rho}{\upsilon}\right)^{n-\upsilon} p_\upsilon = \dfrac{\rho^n}{\upsilon! \upsilon^{n-\upsilon}} p_0, \quad n = \overline{\upsilon, \upsilon + r}. \end{cases}$$

Здесь

$\rho = \lambda / \mu$ - предложенная нагрузка на СМО

Стационарное распределение (2/4)

p_0 определяется из условия нормировки $\sum_{n=0}^{\upsilon+r} p_n = 1$:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \sum_{n=\upsilon}^{\upsilon+r} \left(\frac{\rho}{\upsilon} \right)^{n-\upsilon} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \sum_{m=0}^{r} \left(\frac{\rho}{\upsilon} \right)^{m} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{\upsilon} \right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{\upsilon}} \right]^{-1}.$$

Стационарное распределение (3/4)

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{\rho}{\upsilon}\right)^{r+1}}{1-\dfrac{\rho}{\upsilon}} \right]^{-1}, \; n = \overline{0, \upsilon - 1}; \\ \dfrac{\rho^n}{\upsilon!\upsilon^{n-\upsilon}} \cdot \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{\rho}{\upsilon}\right)^{r+1}}{1-\dfrac{\rho}{\upsilon}} \right]^{-1}, \quad n = \overline{\upsilon, \upsilon + r} \end{cases}$$

Вероятностные характеристики (1/2)

Вероятность π блокировки заявки:

$$\pi = p_{v+r} = \frac{\rho^{v+r}}{v!\,v^r} \cdot p_0 \qquad \text{при } r<\infty$$

Средняя длина Q очереди (ср. число заявок в очереди):

$$Q = 0 \cdot \left(p_0 + p_1 + \ldots + p_\upsilon\right) + 1 \cdot p_{\upsilon+1} + 2 \cdot p_{\upsilon+2} + \ldots + r \cdot p_{\upsilon+r} = \sum_{n=1}^{r} n p_{\upsilon+n} =$$

$$= \frac{\rho^{v-1}}{(v-1)!} \cdot \frac{1 + r\left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1} - (r+1)\left(\frac{\rho}{v}\right)^{r}}{\left(\frac{v}{\rho} - 1\right)^2} \cdot p_0, \quad r < \infty$$

Вероятностные характеристики (2/2)

Среднее число заявок в системе:
Просуммируем СУЛБ, получим

$$\lambda(1-\pi) = \mu\left(\sum_{n=0}^{v-1} np_n + \sum_{n=v}^{v+r} vp_n\right) = \mu\bar{n},$$

где $\bar{n}$ - среднее число занятых приборов.

Тогда среднее число заявок в системе N находится по формуле

$$N = \bar{n} + Q$$

Вероятностно-временные характеристики

η – случайная величина (СВ) времени обслуживания,

$B(t) = P\{\eta < t\} = \exp(\mu)$ - ФР СВ η,

$M\eta = \int\limits_0^\infty t dB(t) = \dfrac{1}{\mu}$ - ср. значение СВ η.

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$W(t) = P\{\omega < t\}$ - ФР СВ ω,

$M\omega = \overline{\omega}$ - ср. значение СВ ω.

υ – СВ времени пребывания заявки в СМО,

$V(t) = P\{\upsilon < t\}$,

$M\upsilon = \overline{\upsilon}$ - ср. значение СВ υ.

Время ожидания начала обслуживания

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$W(t) = P\{\omega < t\}$ - ФР СВ ω,

$M\omega = \overline{\omega}$ - ср. значение СВ ω.

Вероятность немедленного обслуживания:

$$P\{\omega = 0\} = \sum_{n=0}^{\upsilon-1} p_n = \left[\sum_{n=0}^{\upsilon-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^\upsilon}{\upsilon!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{\upsilon}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{\upsilon}}\right]^{-1} \sum_{n=0}^{\upsilon-1} \frac{\rho^n}{n!}.$$

ФР времени ожидания заявки

Пусть в момент t поступления заявки в СМО $X(t)=i$, $i=\overline{0,\upsilon+r}$.

$i=\upsilon+r$: $\quad P\{\text{заявка будет потеряна}\}=\pi=p_{\upsilon+r}$

$i=\overline{0,\upsilon+r-1}$: $\quad P\{\text{заявка будет принята в СМО}\}=1-\pi=1-p_{\upsilon+r}$

$i=\overline{0,\upsilon-1}$: $\quad P\{\text{заявка немедленно начнет обслуживаться}\}=$

$$=P\{\omega=0\}=\sum_{n=0}^{\upsilon-1}p_n$$

$i=\overline{\upsilon,\upsilon+r-1}$: заявка ожидает начала обслуживания в течение времени, необходимого для обслуживания полностью загруженной системой $(i-\upsilon+1)$ заявок.

$P\{(i-\upsilon+1)\ \text{заявок покинет СМО за время}\ t\}=E_{i-\upsilon+1}(t)$

- ФР Эрланга с параметрами $\upsilon\mu$ и $(i-\upsilon+1)$.

ПЛС ФР времени ожидания заявки

$$\textbf{ФР } W(t) = P\{\omega < t\} = \frac{1}{1-\pi}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\upsilon-1} p_n + \sum_{i=\upsilon}^{\upsilon+r-1} p_i E_{i-\upsilon+1}(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\pi}\cdot\left[P\{\omega = 0\} + \sum_{j=0}^{r-1} p_{\upsilon+j} E_{j+1}(t)\right]$$

ПЛС $\omega(s)$, $s \ge 0$, СВ ω:

$$\omega(s) = \int_0^\infty e^{-st} dW(t) = \frac{1}{1-\pi}\cdot\left[P\{\omega = 0\} + p_\upsilon \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\rho^j}{\upsilon^j} \int_0^\infty e^{-st} dE_{j+1}(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\pi}\cdot\left[P\{\omega = 0\} + p_\upsilon \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(\upsilon\mu)^j} \frac{(\upsilon\mu)^{j+1}}{(\upsilon\mu + s)^{j+1}}\right] =$$

Среднее время ожидания заявки

ПЛС $\omega(s)$, $s \geq 0$, ФР $W(t)$:

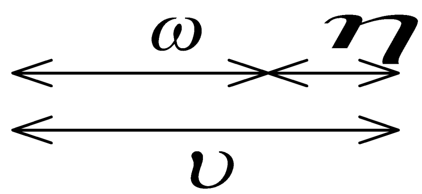
$$\omega(s) = \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \upsilon\mu p_\upsilon \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(\upsilon\mu + s)^{j+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \upsilon\mu p_\upsilon \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\upsilon\mu + s} \right)^r}{\upsilon\mu + s - \lambda} \right]$$

Среднее время ожидания $\overline{\omega}$:

$$\overline{\omega} = -\omega'(0) = \frac{p_\upsilon}{1-\pi} \cdot \frac{\upsilon\mu - \left(\frac{\rho}{\upsilon} \right)^r [(r+1)\upsilon\mu - r\lambda]}{(\upsilon\mu - \lambda)^2}$$

ФР времени пребывания заявки в СМО



$\upsilon = \omega + \eta$

ФР $V(t) = P\{\upsilon < t\}$ - ?

ПЛС $\upsilon(s)$, $s \geq 0$, ФР $V(t)$:

$$\upsilon(s) = \int_0^\infty e^{-st} dV(t) = \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \upsilon\mu p_\upsilon \frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\upsilon\mu + s}\right)^r}{\upsilon\mu + s - \lambda} \right] \cdot \frac{\mu}{\mu + s}$$

Среднее время пребывания $\overline{\upsilon}$:

$$\overline{\upsilon} = -\upsilon'(0) = \overline{\omega} + \frac{1}{\mu}$$