Курс «Прикладные задачи ТМО», «Основы математической теории телетрафика»

Марковские процессы с непрерывным временем. Теорема Колмогорова

Лекция 3

Определение марковского процесса

Опр.:
случайный процесс $\{X(t),\ t \geq 0\}$ называется *марковским* (МП), если $\forall n \geq 1$ и произвольной последовательности $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ такой, что при $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ для $\forall t > 0$ и любых наборов состояний $i_0,\ i_1,\ \ldots\ , i_{n-1},\ i\ , j \in \mathrm{J}$ он удовлетворяет *свойству марковости*:

$$P\{X(t_n + t) = j \,|\, X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_n) = i\} =$$

$$= P\{\ X(t_n + t) = j \ \Big|\ X(t_n) = i\ \} =: p_{ij}(t_n, t_n + t). \qquad (1)$$

Однородный МП

$p_{ij}(t_n, t_n + t)$ - *вероятность перехода* из состояния i в состояние j за время t

Если в (1) $p_{ij}(t_n, t_n + t)$ не зависит от t_n, а зависит только от t, т.е.

$P\left\{ X(t_0 + t) = j \mid X(t_0) = i \right\} = p_{ij}(t),\ t_0, t \geq 0, \qquad i, j \in \mathrm{J},$

то МП $X(t)$ называется *однородным во времени* МП (ОМП).

Вероятности ОМП

$p_{ij}(t)$ - *переходная вероятность* за интервал времени длины t, $i, j \in \mathrm{J}$.

$\mathbf{P}(t) := \left(p_{ij}(t)\right)_{i,j\in \mathrm{J}}$ - *матрица переходных вероятностей* МП $X(t)$, $t \geq 0$.

$\mathbf{P}(t)$ - стохастическая, т.е. $\sum\limits_{j\in \mathrm{J}} p_{ij}(t) = 1$, $i \in \mathrm{J}$.

$p_i(t) := P\{\ X(t) = i\ \}$ - *мгновенная вероятность* процессу находиться в состоянии i в момент $t \geq 0$.

$\mathbf{p}^T(0) =: \left(p_i(0)\right)_{i\in \mathrm{J}}$ - *начальное распределение* вероятностей ОМП $X(t)$.

Уравнения Колмогорова-Чепмена

По формуле полной вероятности

$$p_j(t) = \sum_{i \in \mathrm{J}} p_i(0) p_{ij}(t), \qquad j \in \mathrm{J}, \qquad t \geq 0, \qquad (2)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0)\mathbf{P}(t). \qquad (2a)$$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in \mathrm{J}} p_{ik}(t) p_{kj}(h) \qquad i, k \in \mathrm{J}, \qquad t, h \geq 0, \qquad (3)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{P}(t+h) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}(h) = \mathbf{P}(h) \cdot \mathbf{P}(t) \qquad (3a)$$

Интенсивности переходов МП

Будем предполагать, что существуют пределы

$$\lim_{h\downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \mathrm{J}, \qquad (4)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Тогда существуют пределы

$$a_{ij} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\left[p_{ij}(h) - \delta_{ij}\right], \qquad i, j \in \mathrm{J}. \qquad (5)$$

Число $a_{ij}, i \neq j$, называется *интенсивностью перехода* из сост. i в состояние j, $i, j \in \mathrm{J}$, а число $a_i = -a_{ii}$ - *интенсивностью выхода* из состояния i, $i \in \mathrm{J}$

Инфинитезимальная матрица

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \mathrm{J}} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\left[\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}\right] = \dot{\mathbf{P}}(0+)$$

- *матрица интенсивностей переходов* ОМП $X(t) \in \mathrm{J}$,

или

инфинитезимальная матрица ОМП $X(t)$, $t \geq 0$

причём

$$0 \leq -a_{ii} \leq \infty; \qquad (6а)$$

$$0 \leq a_{ij} < \infty, \qquad i \neq j \qquad (6б)$$

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} \leq -a_{ii} =: a_i \qquad (7)$$

Консервативный ОМП

Однородный МП $X(t)$ и его матрица $\mathbf{A}$ называются *консервативными*, если наряду с условием (6) конечности всех интенсивностей переходов выполняется и следующее усиление условия (7):

$$\sum_{j \in \mathrm{J} \setminus \{i\}} a_{ij} = -a_{ii} =: a_i < \infty, \qquad i \in \mathrm{J}. \qquad (8)$$

Т.е. для консервативного МП $X(t)$

$$0 \le -a_{ii} \le \infty; \qquad (6а)$$

$$0 \le a_{ij} < \infty, \qquad i \ne j \qquad (6б)$$

$$\sum_{j \in \mathrm{J} \setminus \{i\}} a_{ij} = -a_{ii} =: a_i < \infty \qquad (8)$$

Теорема А.Н.Колмогорова

Матрица $\mathbf{P}(t)$ переходных вероятностей консервативного МП $X(t)$ при всех $t \geq 0$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t), \qquad (9)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I},$$

а при дополнительном условии равномерной ограниченности всех диагональных элементов

$$0 \leq a_i < c < \infty, \qquad i \in \mathrm{J}, \qquad (10)$$

и прямому уравнению Колмогорова

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}, \qquad (11)$$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}.$$

Задать МП (1/2):

1) $\mathbf{p}^T(0)$ - начальное распределение,
т.е. $p_i(0) = P\{\ X(0) = i\ \},\ i \in \mathrm{J}$;

2) $\mathbf{a}^T = (a_0, a_1, \ldots)$ - вектор интенсивностей выхода из состояния i, причем $0 < a_i < c < \infty,\ \ i \in \mathrm{J}$

3) $q_{ij},\ i \neq j$ - вероятности перехода из состояния i в состояние j ($i, j \in \mathrm{J}$) для ЦМ $\{X_n,\ \ n \geq 0\}$, вложенной по моментам скачков скачкообразного МП $\{X(t),\ t \geq 0\}$

Задать СМП (2/2):

1) $\mathbf{p}^T(0)$ - начальное распределение

2') $a_{ij},\ i \neq j$ - интенсивности перехода из состояния i в состояние j ($i, j \in \mathrm{J}$) для СкМП $\{X(t),\ t \geq 0\}$,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i q_{ij}, & 0 \leq a_{ij} < \infty, \quad i, j \in \mathrm{J}, \quad i \neq j \\ -a_i, & 0 < a_i < c < \infty, \quad i \in \mathrm{J} \end{cases}$$

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} a_{ij} = 0,\ i \in \mathrm{J}$$

2) + 3) эквивалентно 2')

СУР для стационарного МП

МП $X(t) \in \mathrm{J}$ называется *стационарным*, если его вероятности $p_i(t)=p_i, \quad i \in \mathrm{J}, \quad$ не зависят от t.

Тогда $\quad p_i'(t)=0, \quad t \geq 0, \quad$ т.е. $\dot{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{0}$

Из СПДУК

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}, \tag{1}$$

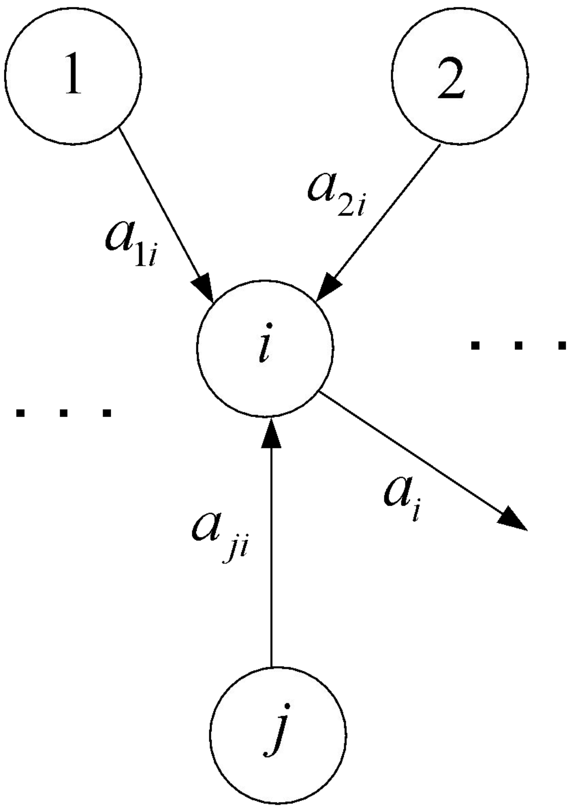
получаем *систему уравнений равновесия* (СУР) вида

$$0=\sum_{i \in \mathrm{J}} a_{ji} p_j, \quad j \in \mathrm{J} \tag{2}$$

с условием нормировки

$$\sum_{i \in \mathrm{J}} p_i = 1 \tag{3}$$

Принципы составления СУР (1/3)

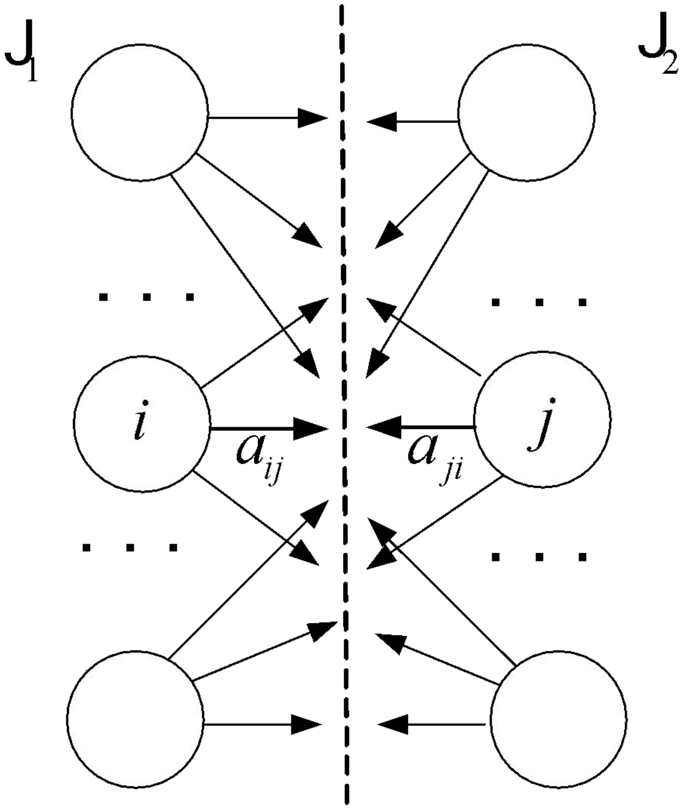


$a_{ji}p_j(t)$ - поток вероятностей, выходящий в момент t из состояния j в состояние i ($i, j \in$ J)

Глобальный баланс
(для состояния $i \in$ J):

$$a_i p_i = \sum_{j \in J \setminus \{i\}} a_{ji} p_j \qquad (4)$$

Принципы составления СУР (2/3)



Локальный баланс:

$$\sum_{i\in J_1}\sum_{j\in J_2} a_{ij}p_i = \sum_{i\in J_1}\sum_{j\in J_2} a_{ji}p_j \qquad (5)$$

$J = J_1 \cup J_2, \qquad J_1 \cap J_2 = \varnothing$

Процессы размножения и гибели. Инфинитезимальная матрица

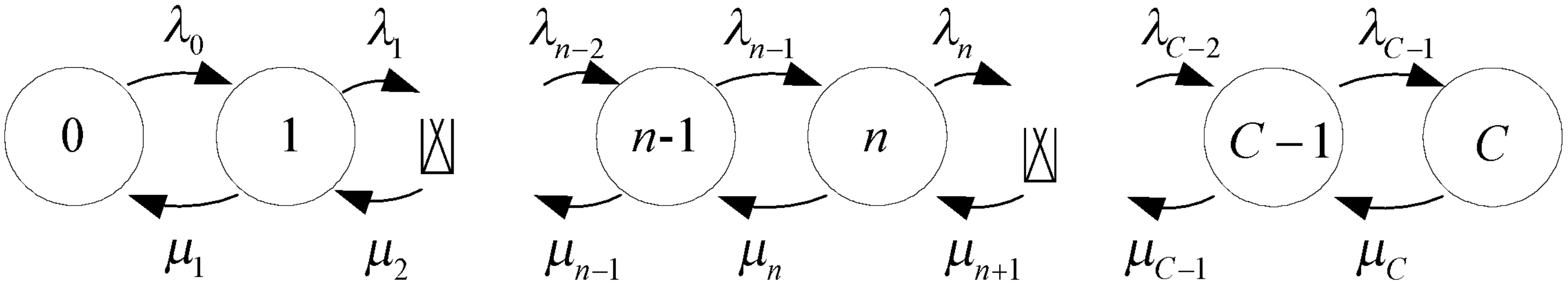
Пусть для МП $X(t)$ элементы матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид:

$$a_{n,n+m} = \begin{cases} \lambda_n u\left(C-n\right), & m=1, \\ \mu_n u\left(n\right), & m=-1, \\ -\lambda_n u\left(C-n\right)-\mu_n u\left(n\right), & m=0, \\ 0, & \left|m\right|\ge 2, \end{cases} \qquad n=\overline{0,C}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ - трёхдиагональная (якобиева).

Тогда МП $X(t)$ называется процессом размножения и гибели.

Диаграмма интенсивностей переходов



СУР

СУГБ:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \\ (\lambda_n + \mu_n) p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}, \qquad n = \overline{1, C-1}, \\ \mu_C p_C = \lambda_{C-1} p_{C-1}, \\ \sum_{n=0}^{C} p_n = 1. \end{cases}$$

СУЛБ:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n, \qquad n = \overline{1, C}$$

Стационарные вероятности

Стационарные вероятности ПРГ:

$$p_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} p_0, \quad n = \overline{1, C}, \qquad (7)$$

где

$$p_{0=} \left(1 + \sum_{i=1}^{C} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right)^{-1}. \qquad (8)$$

Стационарный режим

Условия Карлина и МакГрегора
существования стационарного режима при $C = \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} < \infty \qquad (10)$$