Задачи нахождения кратчайшего пути

Определения

- Пусть дан ориентированный взвешенный граф G=<V,E>

 с весовой функцией $w : E \to R$

 Весом пути $p = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ называется сумма весов ребер, входящих в этот путь:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{n} w(v_{i-1}, v_i)$$

Определения

Вес кратчайшего пути из u в v равен

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \to v\} & \text{если существует путь из } u \text{ в } v \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определения

Кратчайший путь из u в v – это любой путь *p* из *u* и *v*, для которого

$$w(p) = \delta(u,v)$$

Варианты задач о кратчайшем пути

- *Кратчайший путь из одной вершины*:
Дан взвешенный граф $G=\langle V,E\rangle$
и начальная вершина s.
Требуется найти кратчайшие пути из
s во все вершины $v \in V$
- *Кратчайшие пути в одну вершину:*
Дана конечная вершина t.
Требуется найти кратчайшие пути в t
из всех вершин $v \in V$

Варианты задач о кратчайшем пути

- *Кратчайший путь между парой вершин*:
Даны вершины ***u*** и ***v***.
Требуется найти кратчайший путь из ***u*** в ***v***
- *Кратчайшие пути для всех пар вершин:*
Для каждой пары вершин ***u*** и ***v*** найти кратчайший путь из ***u*** в ***v***

Варианты задач о кратчайшем пути

- Часто в задачах бывает необходимо найти не только кратчайший путь, но и сам путь.
- Для каждой вершины ***v*** будем помнить ее предшественников **п(v)**

Свойства кратчайших путей

- <u>*Лемма 1. (отрезки кратчайших путей являются кратчайшими)*</u>
  Пусть дан ориентированный взвешенный граф *G=<V,E>*
  с весовой функцией $w: E \to R$
  Если $\boldsymbol{p(v_1, v_2, \ldots, v_k)}$ – кратчайший путь из v_1 в v_k и $1 \le i \le j \le k$, то

  $\boldsymbol{p_{ij}=(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)}$ – кратчайший путь из v_i в v_j

Свойства кратчайших путей

- <u>*Следствие 1*</u>
  Пусть дан ориентированный взвешенный граф G=<V,E>
  с весовой функцией $w : E \to R$
  Рассмотрим кратчайший путь ***p*** из ***s*** в ***v.***
  Пусть ***u***→***v*** – последнее ребро этого пути.
  Тогда

$$\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$$

Свойства кратчайших путей

- *<u>Лемма 2</u>*

  Пусть дан ориентированный взвешенный граф *G=<V,E>* с весовой функцией $w: E \to R$

  Пусть ***s∈V***

  Тогда для всякого ребра **(u,*v*)∈*E***

$$\delta(s,v) \le \delta(s,u) + w(u,v)$$

Релаксация

- Для каждого ребра $\boldsymbol{v \in V}$ будем хранить некоторое число *d[v]*, являющееся верхней оценкой веса кратчайшего пути из вершины s в v (*оценка кратчайшего пути*)

Релаксация

- Начальное значение оценки кратчайшего пути и массива п определяется следующим образом:
- ***Initialize(G,s)***

Для всех вершин $v \in V$

$$d[v] = \infty$$

$$\pi[v] = NULL$$

$$d[s] = 0$$

Релаксация

Релаксация ребра (u, v) состоит в следующем:

Значение d[v] уменьшается до

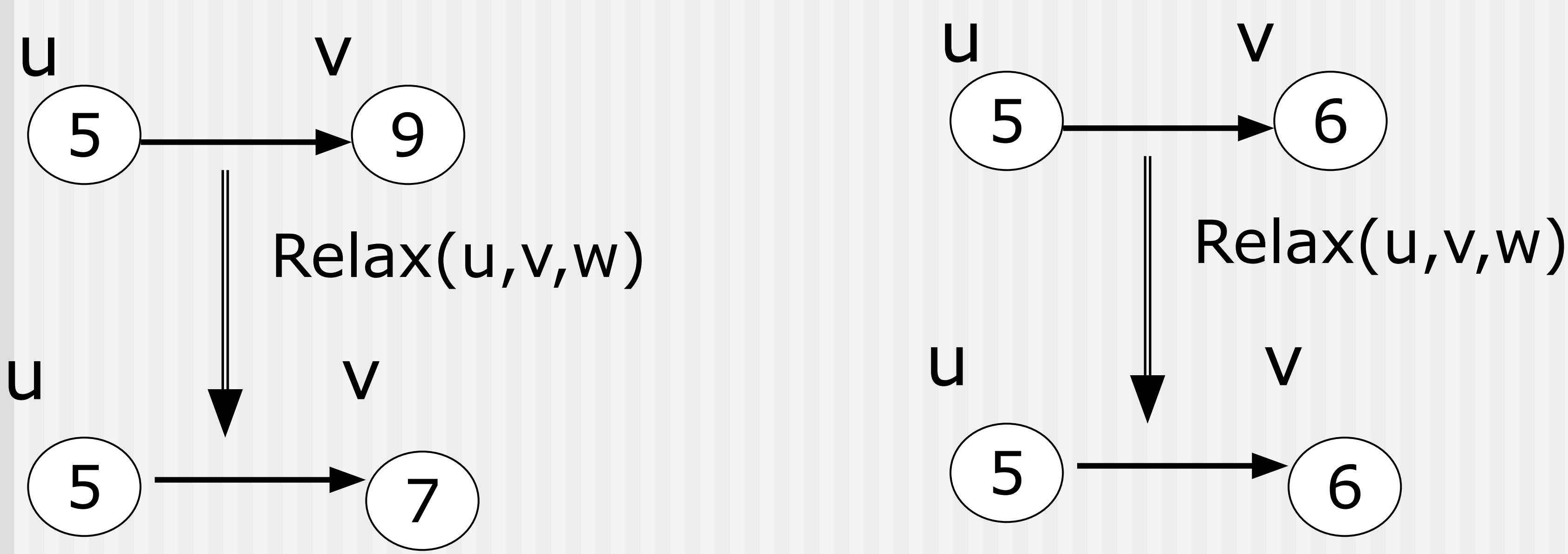
$d[u]+w(u,v)$, если

второе значение меньше первого

При этом $\pi(v)=u$

Relax(u,v,w)

```
If ( d[v]> d[u]+w(u,v))
        d[v]=d[u]+w(u,v)
        п[v]=u
```



В вершинах указаны оценки кратчайшего пути

Алгоритм Дейкстры

- Решает задачу о кратчайших путях из одной вершины s графа G=<V,E> с весовой функцией w до всех остальных вершин графа.
- Веса всех ребер неотрицательны

Алгоритм Дейкстры

- Алгоритм строит множество ***S*** вершин ***v***, для которых кратчайшие пути до вершины ***s*** уже известны, т. е. $\boldsymbol{d[v]=\delta(s,v)}$
- На каждом шаге к множеству ***S*** добавляется та из оставшихся вершин ***u***, для которой ***d[u]*** имеет наименьшее значение
- После этого проводится релаксация всех ребер, выходящих из ***u***

Алгоритм Дейкстры

- Вершины, не лежащие в множестве S, хранятся в очереди с приоритетами, определяемыми значениями функции d.
- Пусть граф представлен списками смежности
  Adj[u] –список смежных вершин u
  Q – очередь с приоритетами

Алгоритм Дейкстры

- Initialize(G,s)
  S=Ǿ
  Q=V[G]
  while Q<>Ǿ
   do u=min(Q) – выбираем вершину с
      наименьшим значением d[u]
      S=S U {u}
      for для всех вершин v∈Adj[u]
          do Relax(u,v,w)