Сбалансированные деревья поиска

Пример:

Необходимо расположить все слова некоторого текста в алфавитном порядке

- Для решения данной задачи можно построить бинарное дерево поиска и затем воспользоваться инфиксным обходом всех узлов дерева

Допустим задан текст

- «Сэр Исаак Ньютон по секрету признавался друзьям, что он знает, как гравитация ведет себя, но не знает почему»

Текст в алфавитном порядке:

- ведет
- гравитация
- друзьям
- знает
- Исаак
- как
- не
- но
- Ньютон
- он
- по
- почему
- признавался себя
- секрету
- сэр
- что

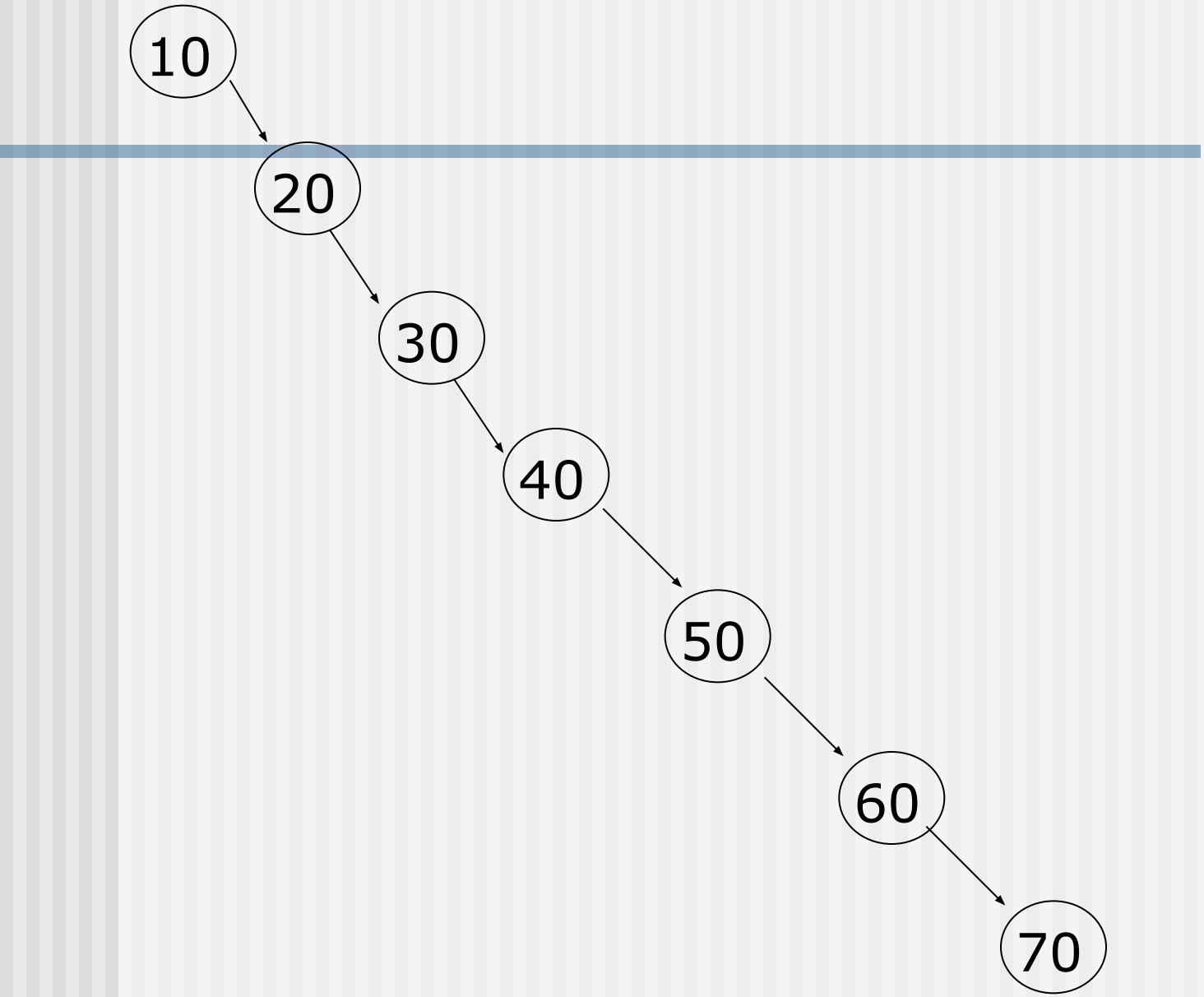
Построение дерева

Дерево оптимальной структуры:

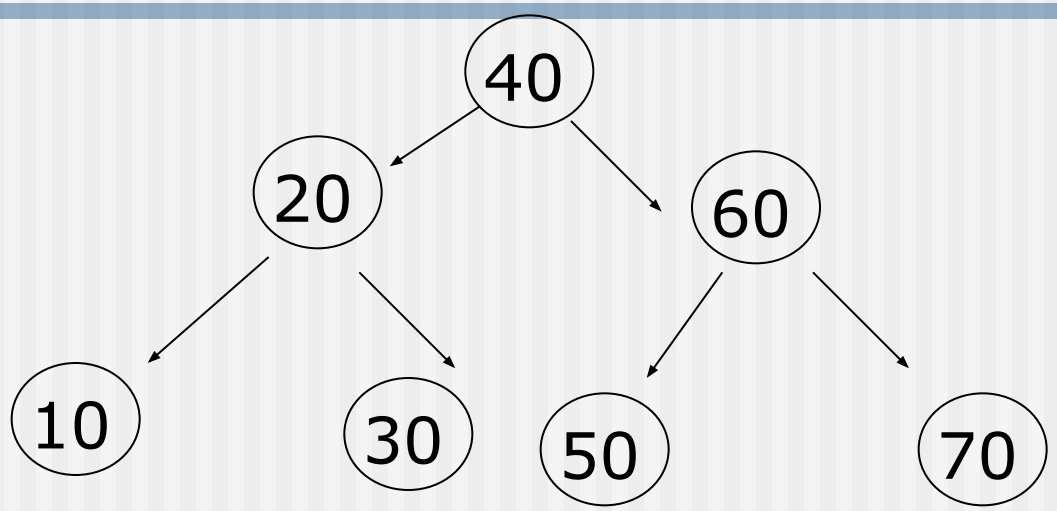
Высота бинарного дерева

- Пусть бинарное дерево содержит элементы:10, 20, 30, 40, 50, 60, 70
- Последовательная вставка элементов дает дерево максимальной высоты:

Дерево максимальной высоты



Дерево минимальной высоты



Порядок вставки элементов:

40, 20, 60, 10, 30, 50, 70

Высота бинарного дерева

- Высота бинарного дерева зависит от порядка выполнения операций вставки и удаления элементов
- Высота бинарного дерева, состоящего из N элементов меняется от $log_2(N+1)$ до N

Цель:

- Создание деревьев, не теряющих баланса при выполнении операций вставки и удаления
- Эффективность поиска в таких деревьев близка к максимальной

2-3 дерево

- Каждый узел 2-3 дерева содержит одно или два значения
- Узлы дерева делятся на две категории:
  - Листья
  - Промежуточные узлы:
    Если промежуточный узел содержит одно значение, то он имеет два непустых поддерева (2-узел)
    Если он содержит два значения, то он имеет три непустых поддерева (3-узел)
- Все листья лежат на одном уровне

2-3 дерево

- Принцип упорядоченности для 2-3 дерева:
  - Для 2-узла – все значения, лежащие в левом поддереве, имеют значения, меньшие значений в узле, а значения, лежащие в правом поддереве – больше или равны значениям, хранящимся в узле

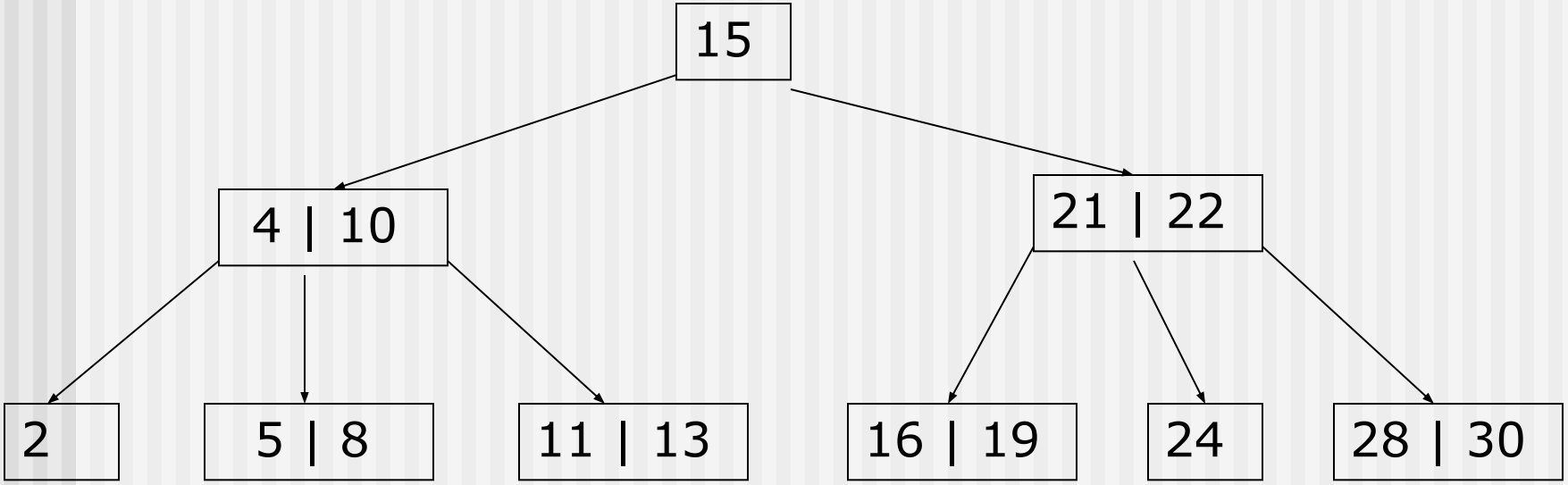
Принцип упорядоченности для 2-3 дерева:

- Для 3-узла – упорядоченность означает следующее:
  Пусть A_1 и A_2– значения ключей элементов, хранящиеся в узле ($A_1 < A_2$), T_1 , T_2, T_3 – поддеревья этого узла.
  Тогда справедливо неравенство:

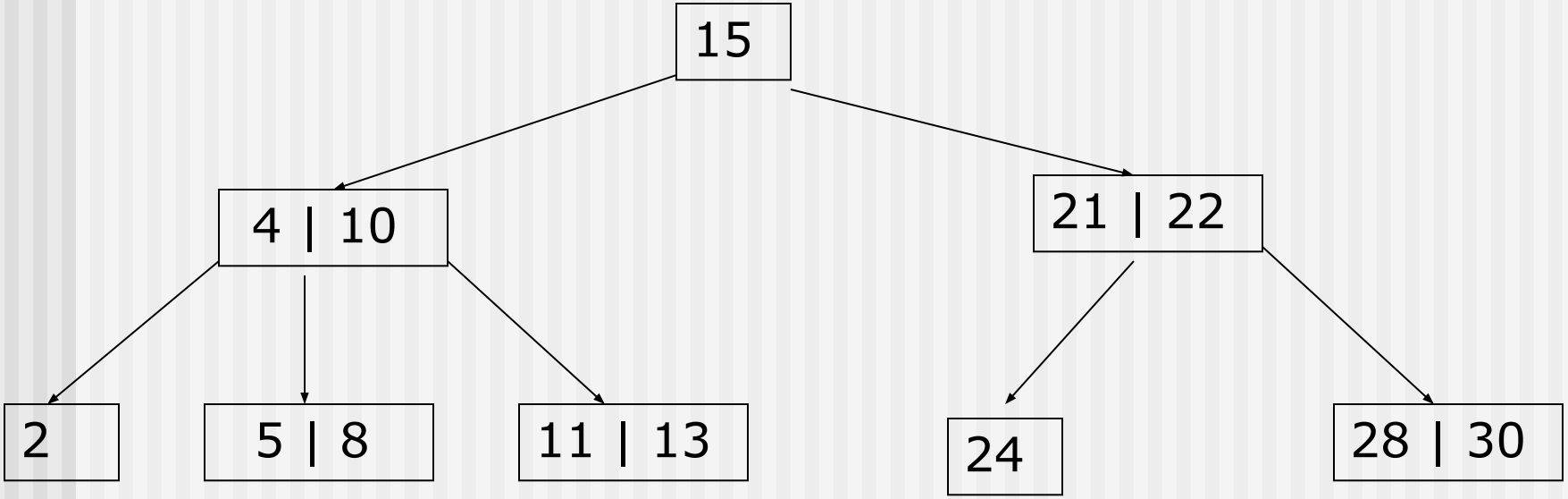
$$K(T_1) < A_1 < K(T_2) < A_2 < K(T_3)$$

  где $K(T_i)$- значения поисковых ключей в i-том поддереве

Пример 2-3 дерева



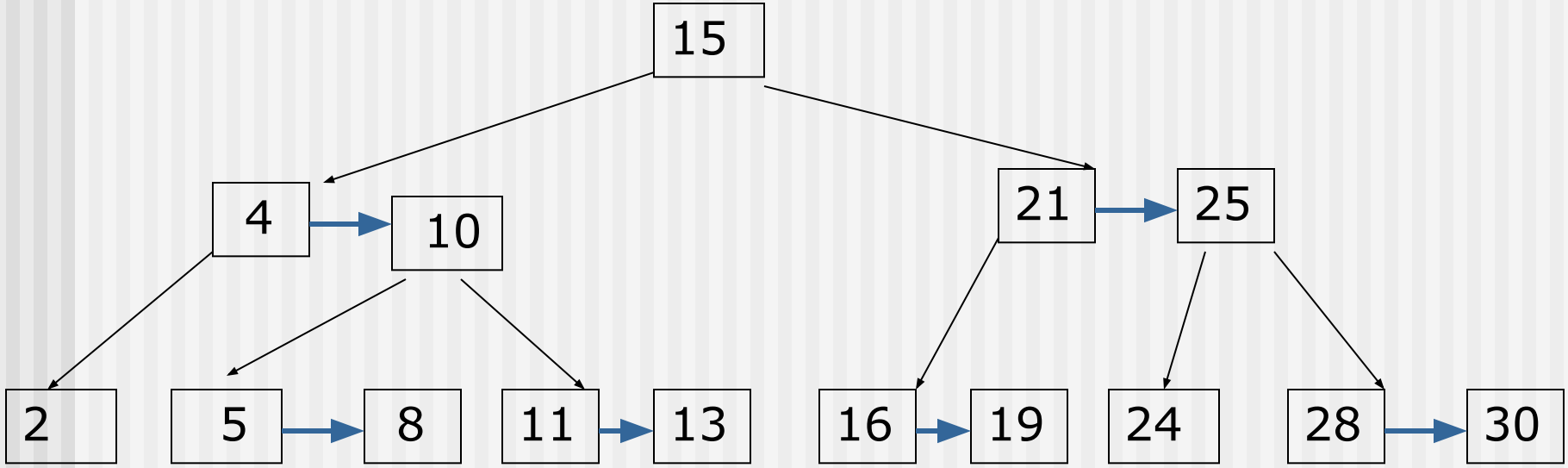
Пример нарушения структуры 2-3 дерева



2-3 дерево

- 2-3 дерево не является бинарным
- Все листья 2-3 дерева находятся на одном и том же уровне
- Высота 2-3 дерева никогда не превышает минимальную высоту бинарного дерева, содержащего такое количество элементов

Физическое представление 2-3 дерева



Высота дерева с точки зрения логической структуры равна 3

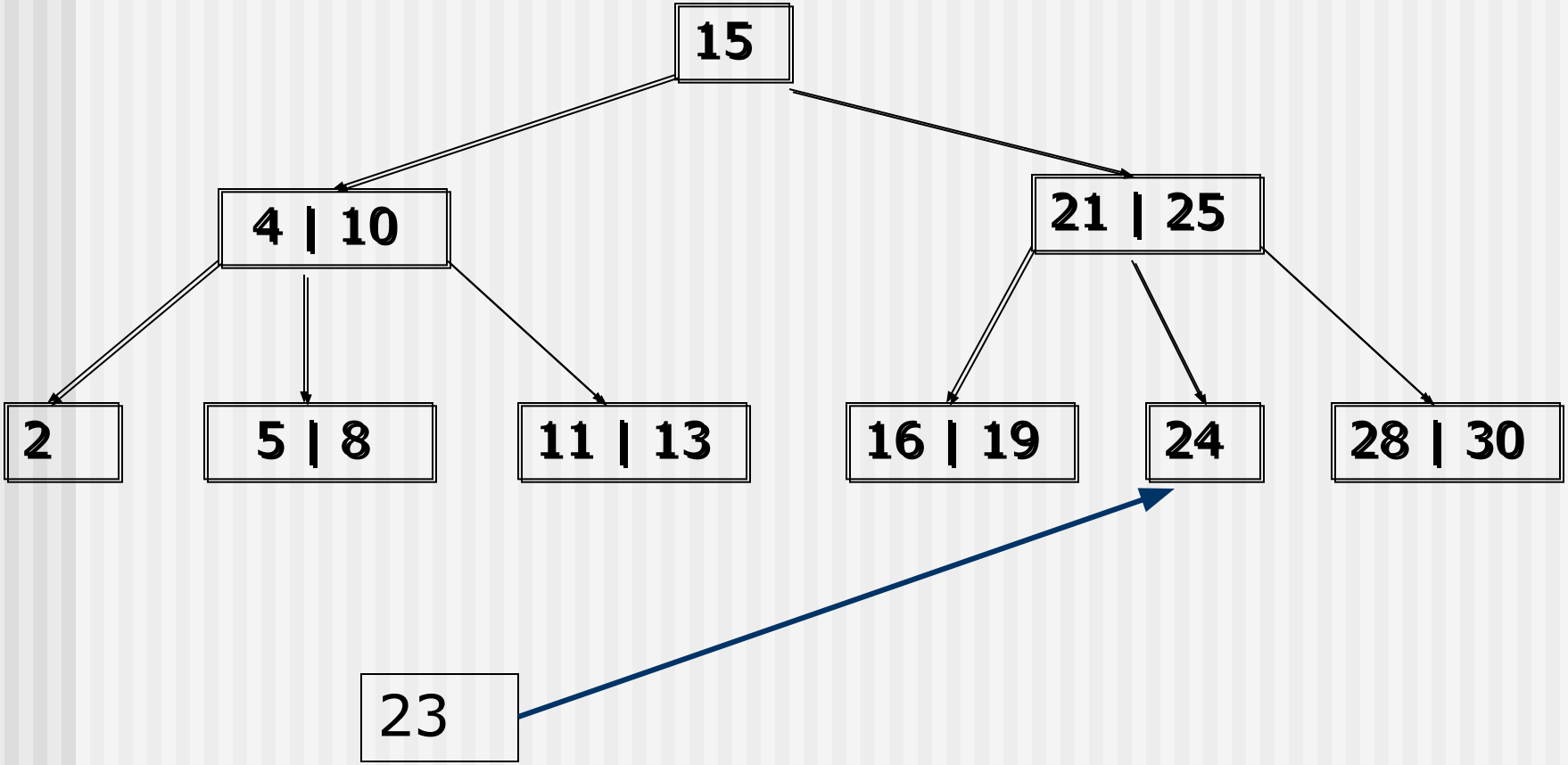
С точки зрения физической структуры – 5

Вставка элементов

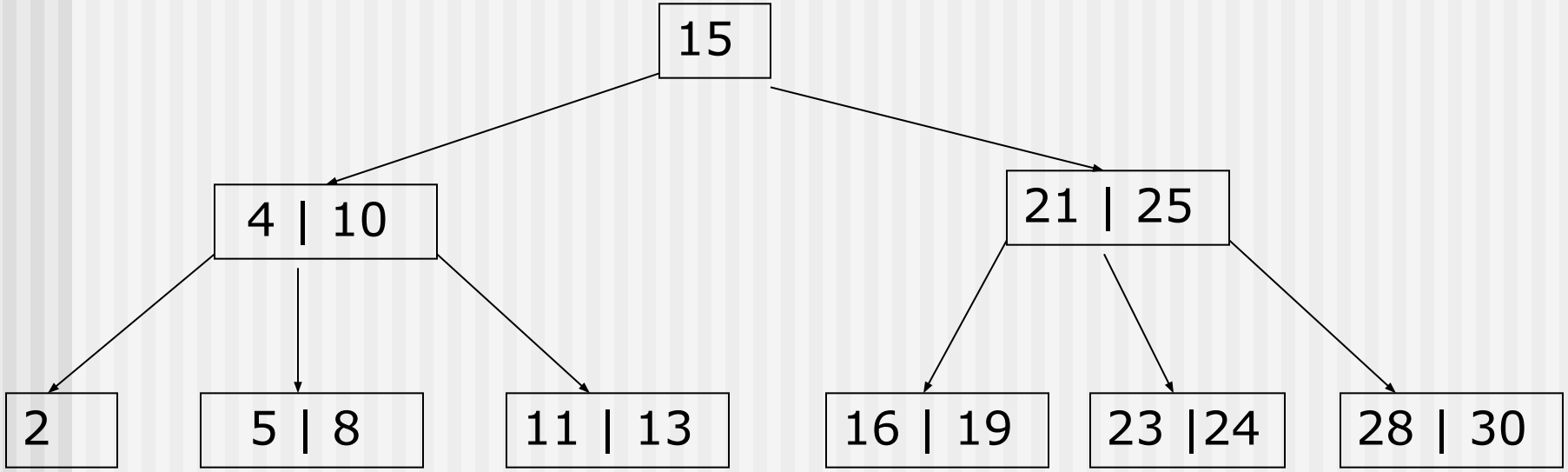
- Вставка элементов осуществляется только в листья
- В случае, если после вставки элемента образуется переполненный узел, поступают следующим образом:

  Узел делится на два узла, при этом среднее значение поднимается на уровень выше и присоединяется к узлу на предыдущем уровне

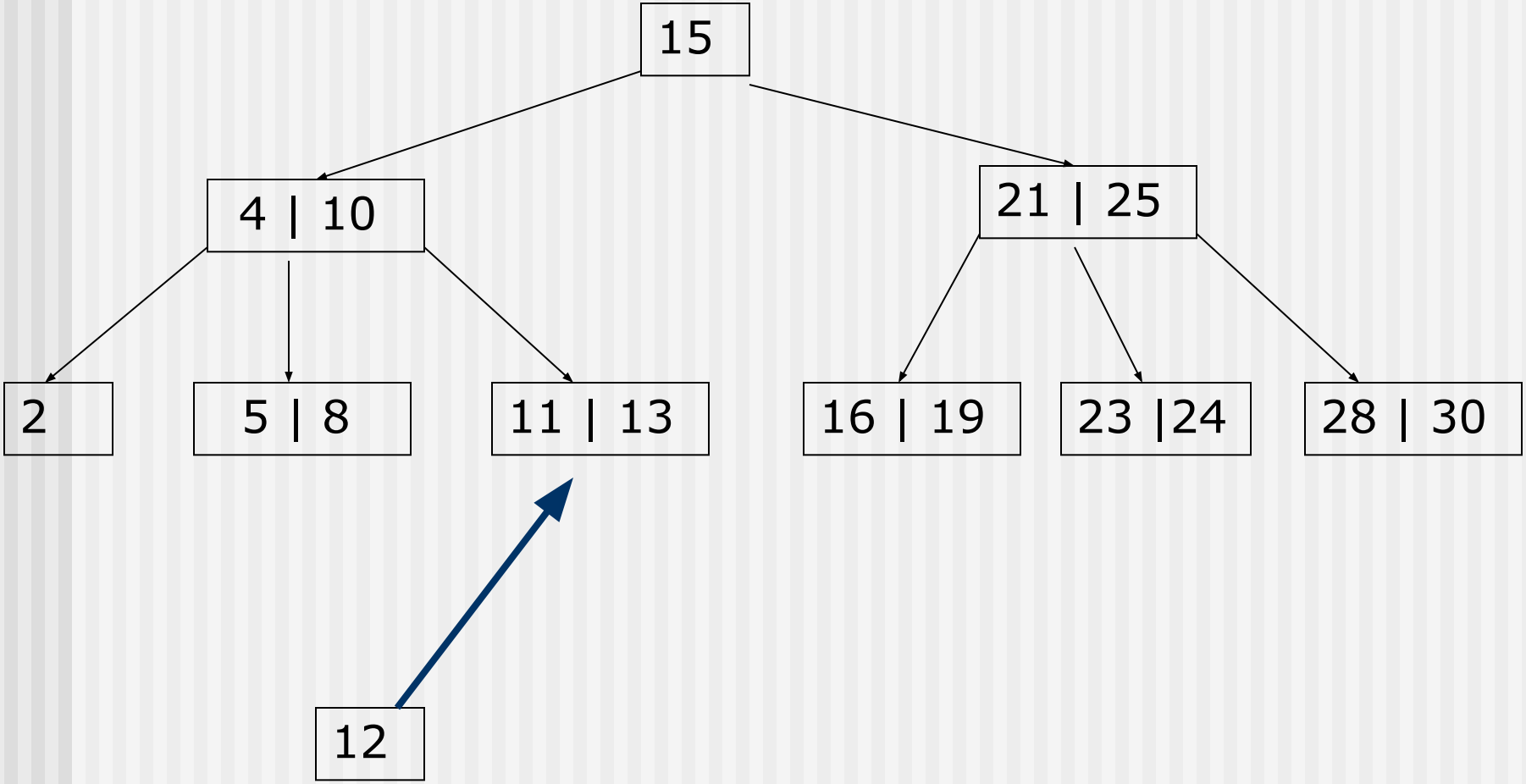
Вставка элементов



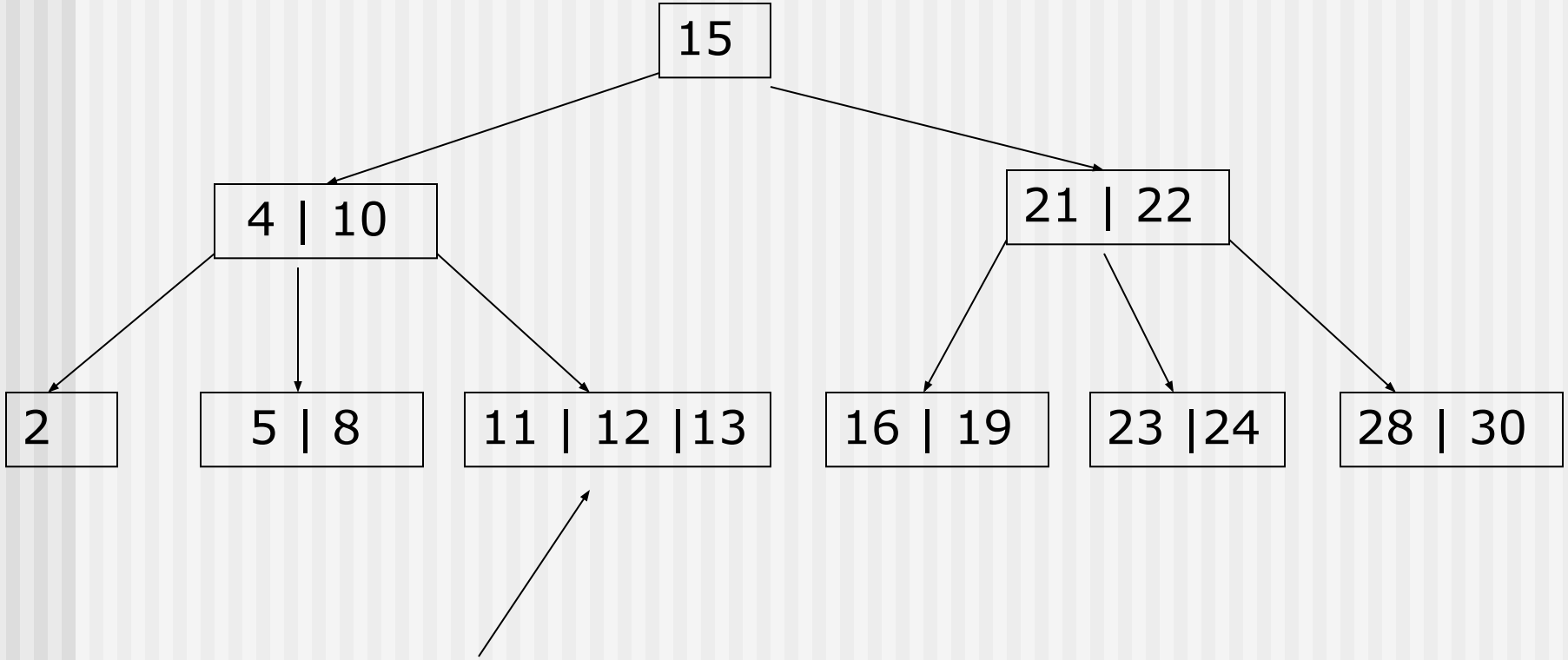
Вставка элементов



Вставка элементов

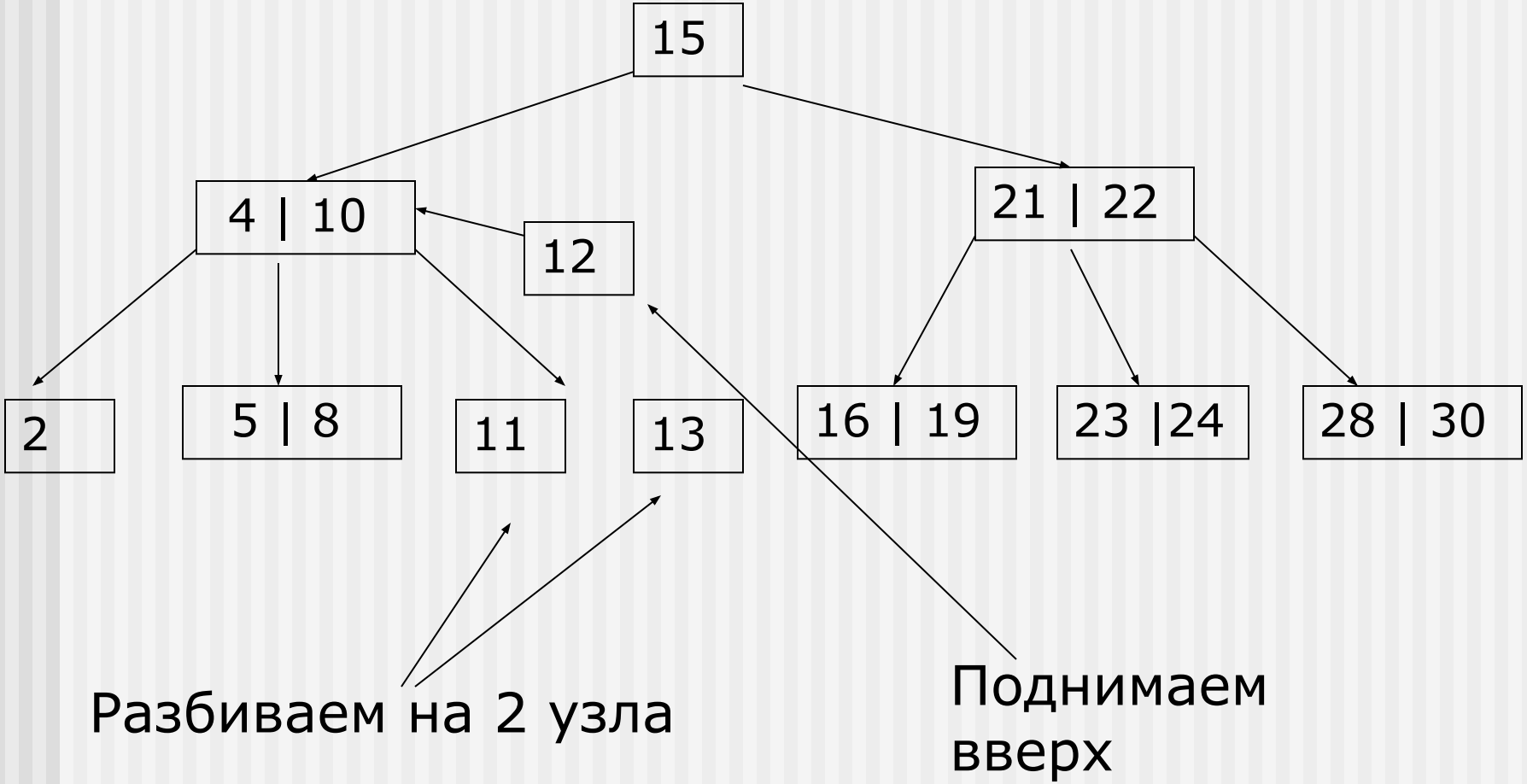


Вставка элементов

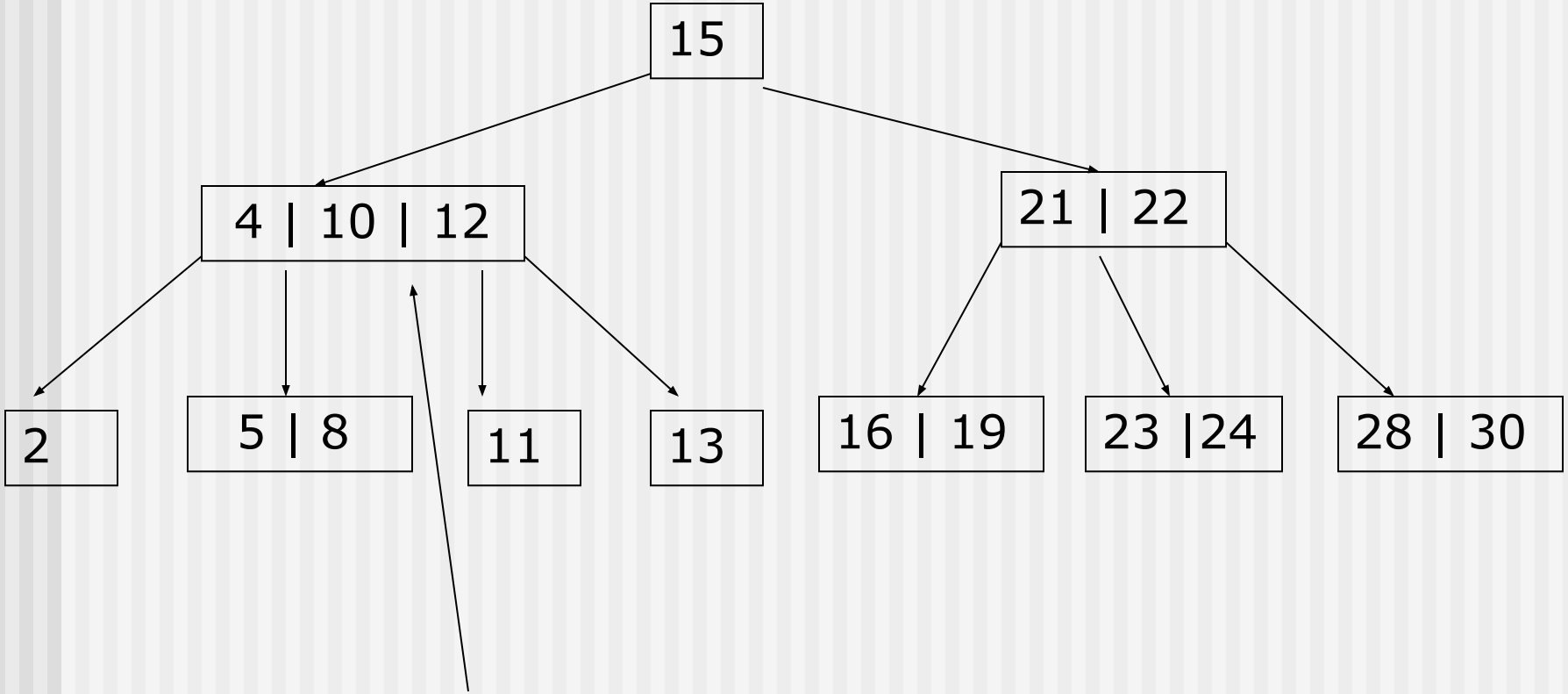


Переполнение
узла

Вставка элементов

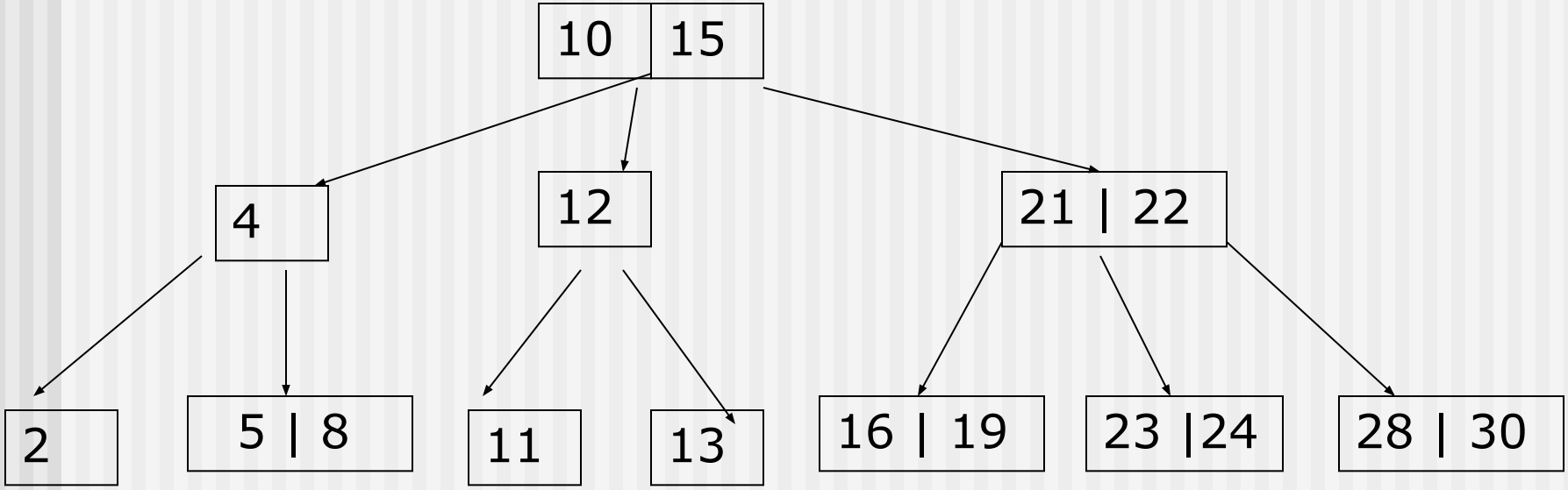


Вставка элементов

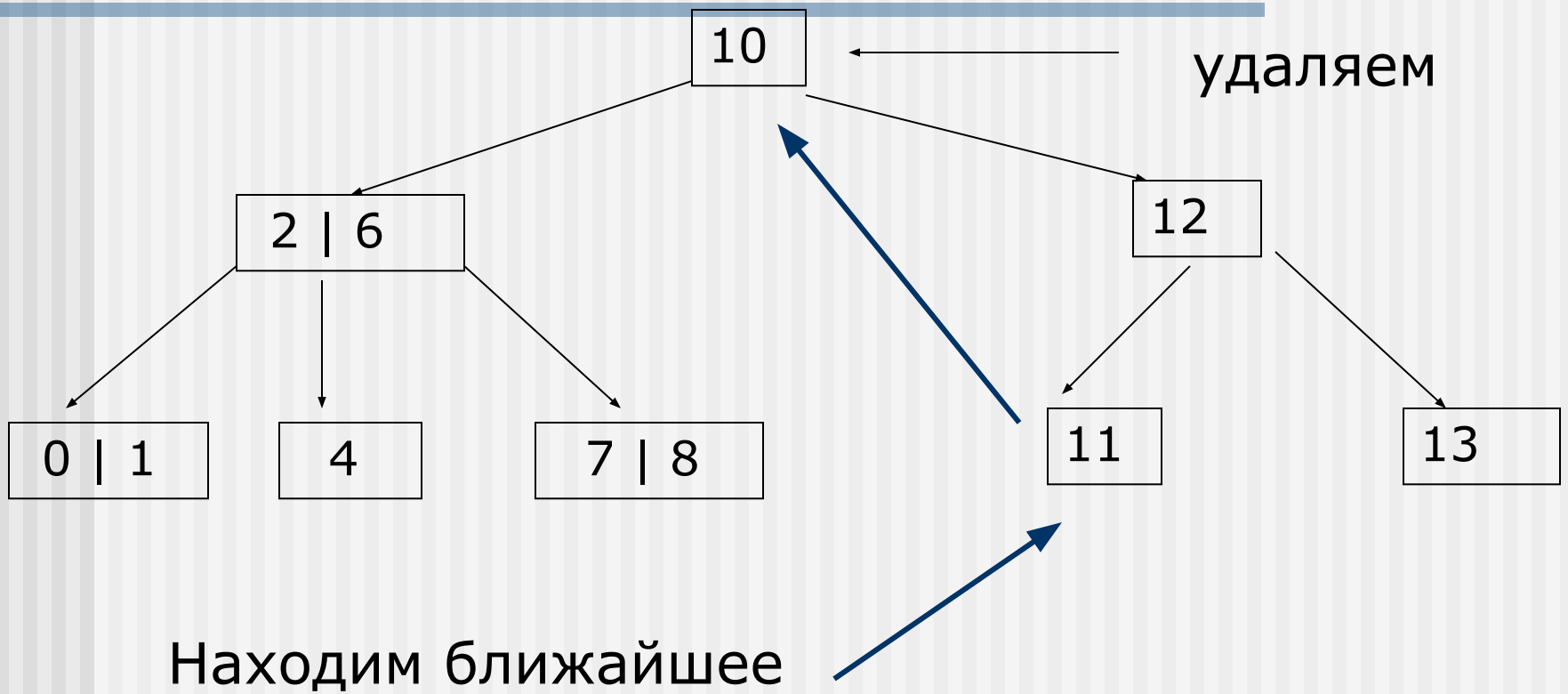


Переполнение узла

Вставка элементов

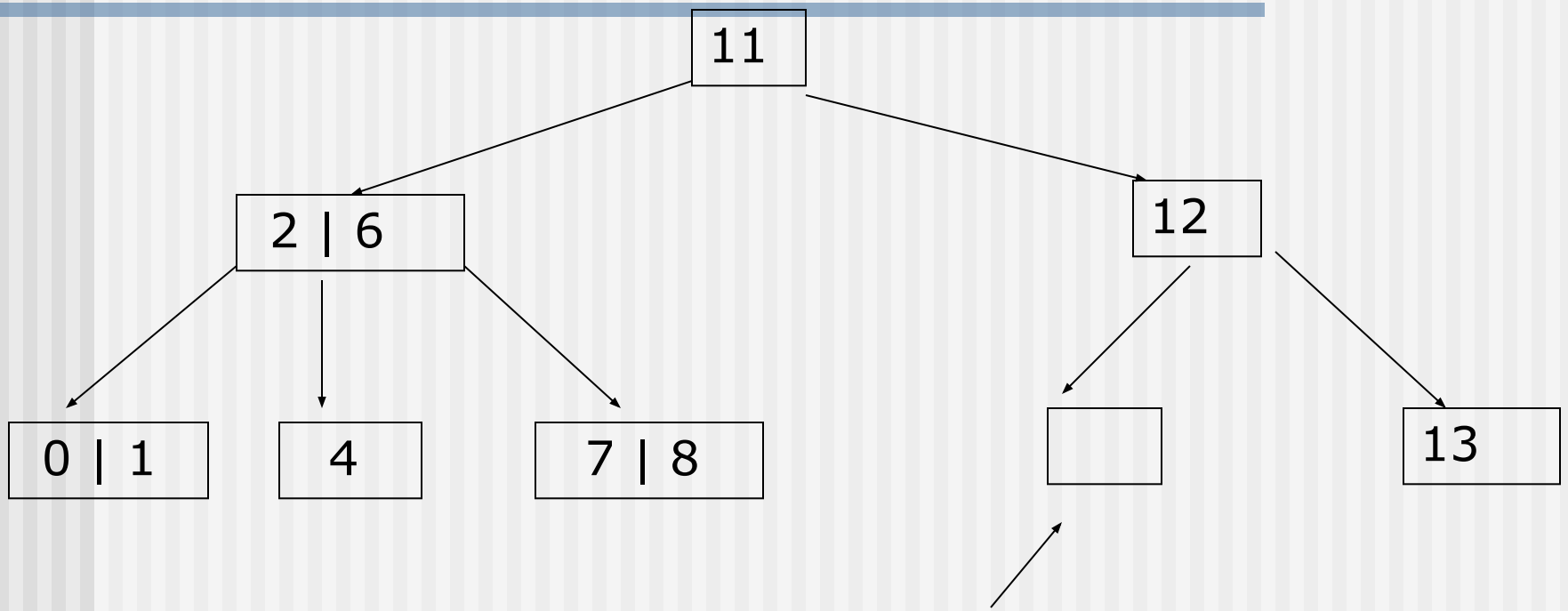


Удаление элементов



Находим ближайшее наибольшее значение и заменяем удаляемый узел

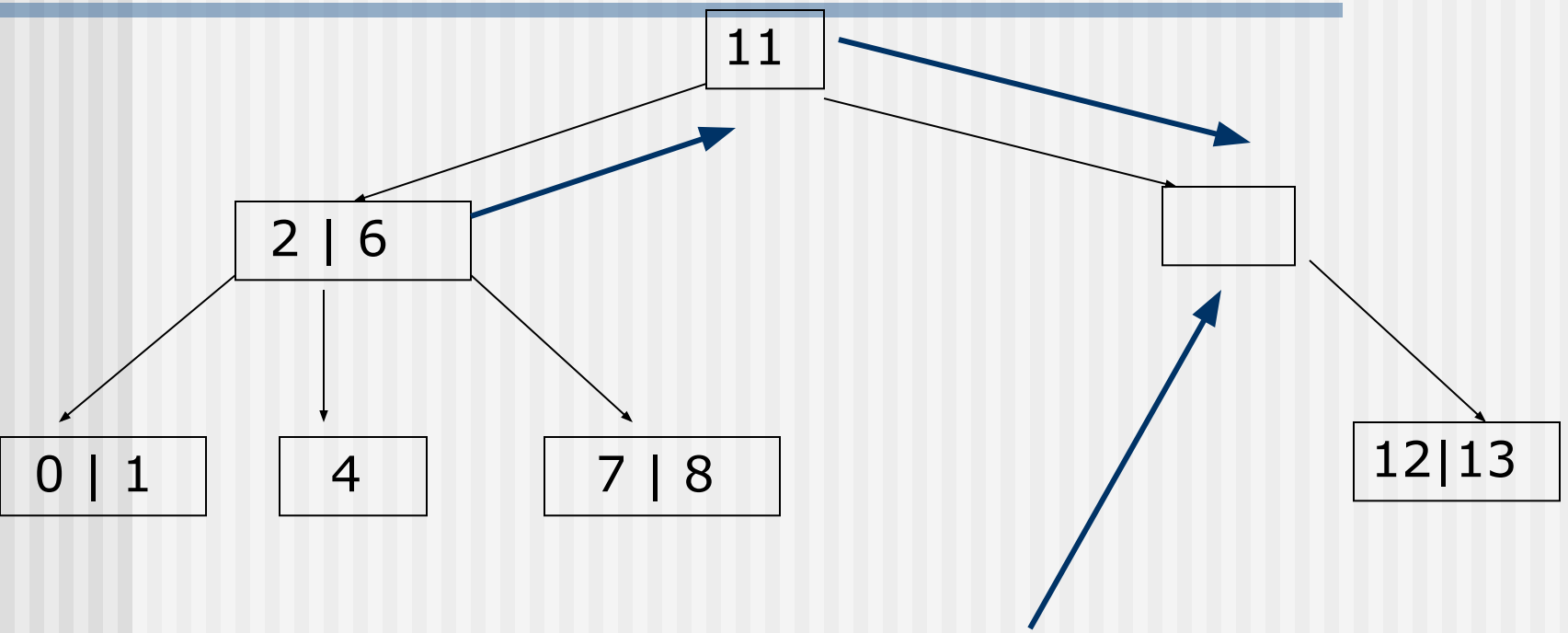
Удаление элементов



Нарушена структура – у элемента 12 нет одного поддерева

Склеиваем значения 12 и 13

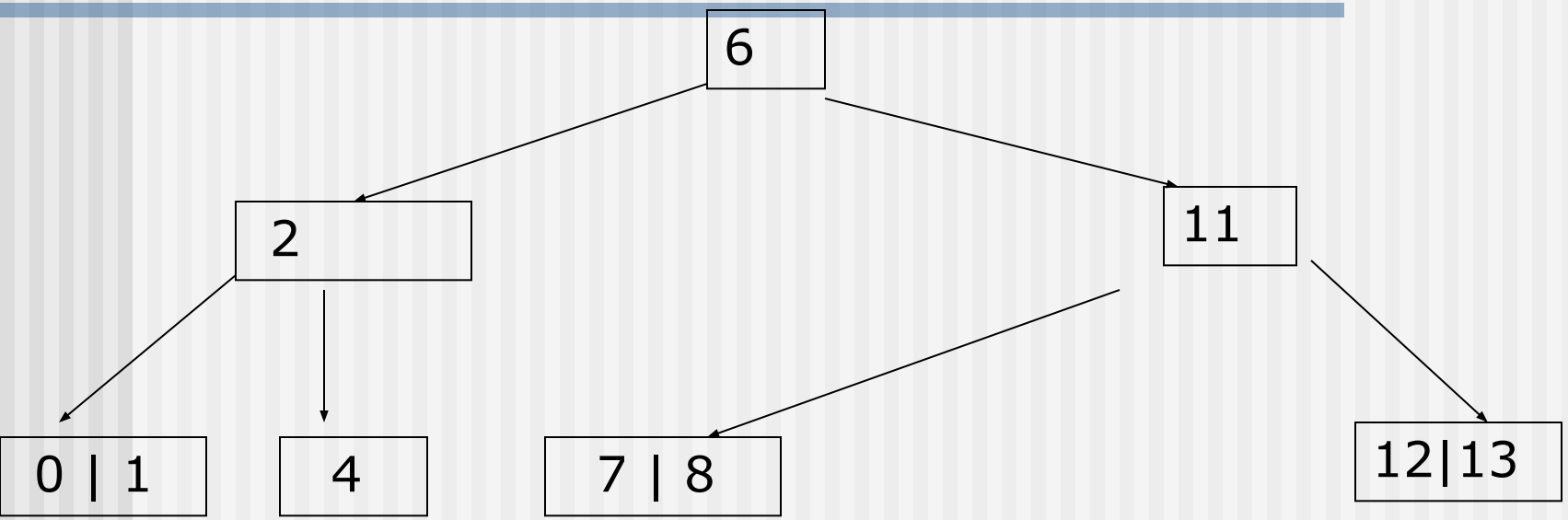
Удаление элементов



Пустой узел

Используем метод переливания

Удаление элементов



Ссылка на значение перемещается вместе со значением

Преимущества 2-3 дерева

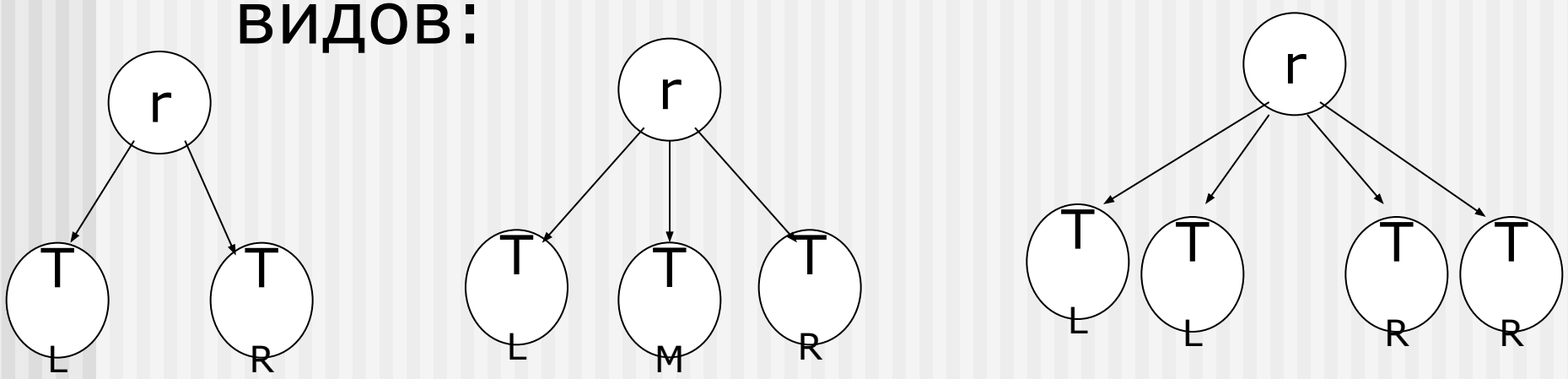
- 2-3 дерево всегда сбалансировано
- Эффективность алгоритма поиска в таком дереве имеет порядок $O(\log_2(N))$

2-3-4 деревья

- 2-3-4 дерево может содержать четырехместные узлы
- По сравнению с 2-3 деревом алгоритмы вставки и удаления элементов осуществляются за меньшее число шагов

2-3-4 деревья

- 2-3-4 деревом высотой h называется дерево, которое пусто
- или имеет один из следующих видов:

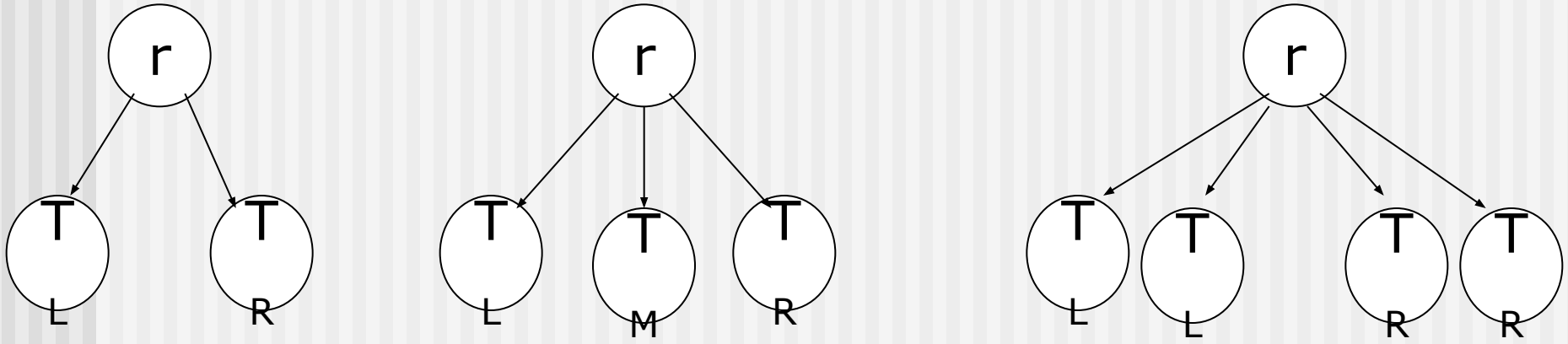


r-узел, содержащий соответственно 1,2 или 3 значения

T_L, T_M,T_R – деревья, имеющие высоту h-1

2-3-4 деревья

- Правила размещения данных



1) $K(T_L)<K(r)<K(T_R)$ (узел r содержит 1 элемент)

2) $K(T_L)<S< K(T_M)<L <K(T_R)$, $S<L$ –ключи узла r (узел r содержит 2 элемента)

3)$K(T_L)<S< K(T_L)<M< K(T_R)< L<K(T_R)$, $S<M<L$ –ключи узла r (узел r содержит 3 элемента)

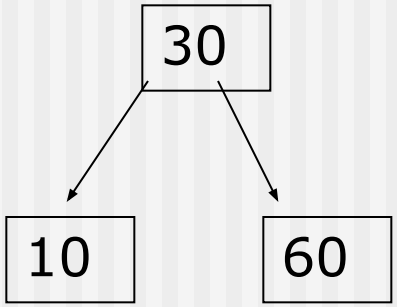
Вставка элементов

- Четырехместный узел разделяется сразу после обнаружения, при этом один из его элементов перемещается в родительский узел

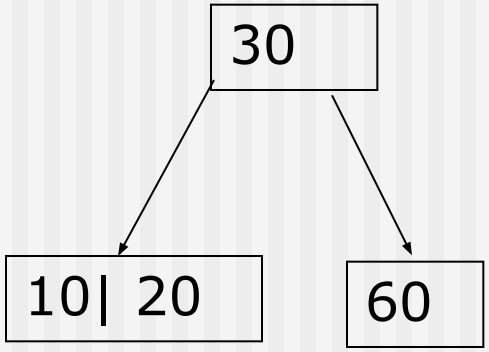
Вставка элементов

Дерево состоит из одного узла

10 | 30 |60



Разделяем узел

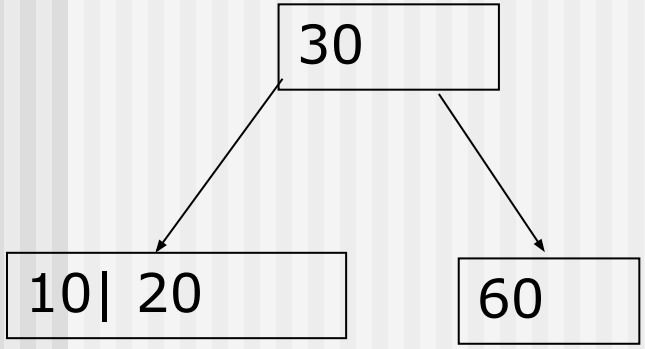


Добавляем новый элемент

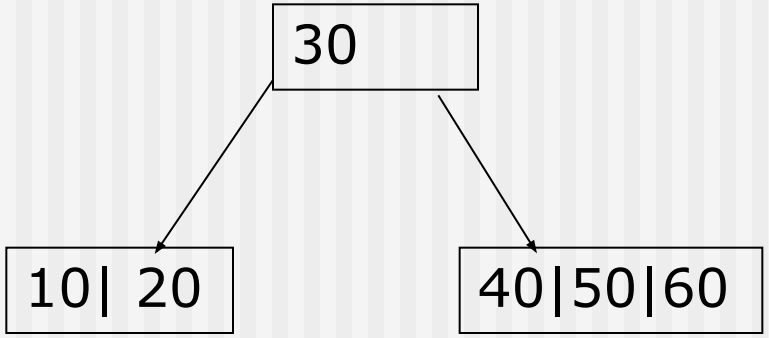
Необходимо вставить новое значение

20

Вставка элементов

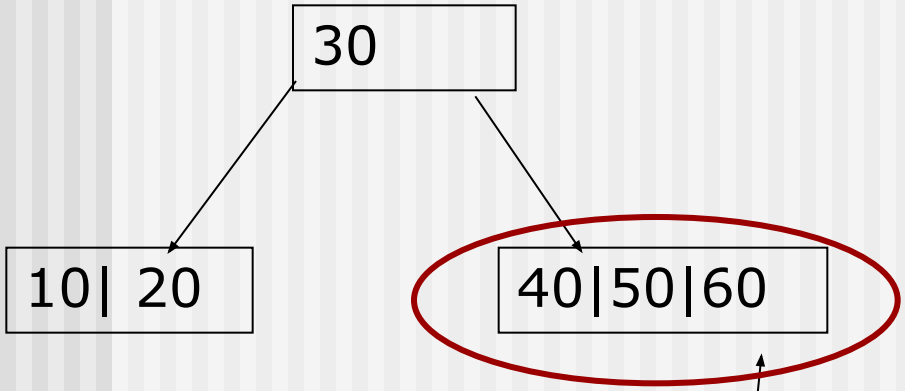


Необходимо добавить новые элементы 50 и 40

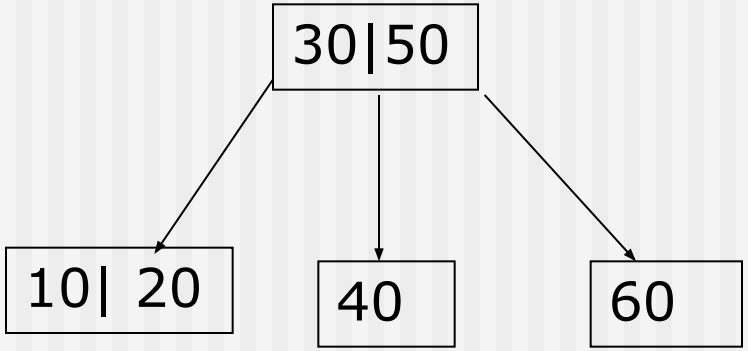


Разделять узлы не нужно

Вставка элементов



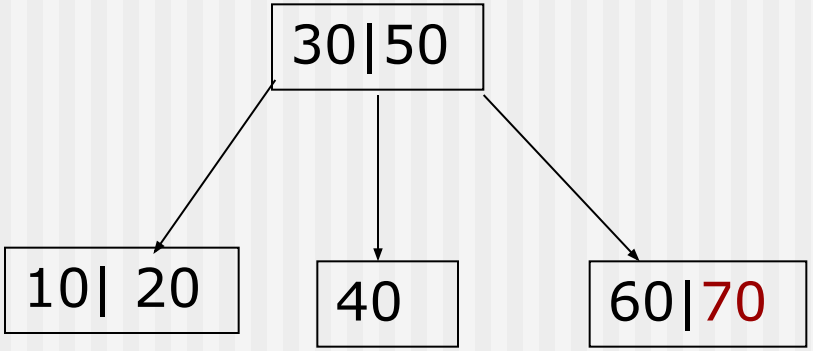
Разделяем:



Добавим значение 70

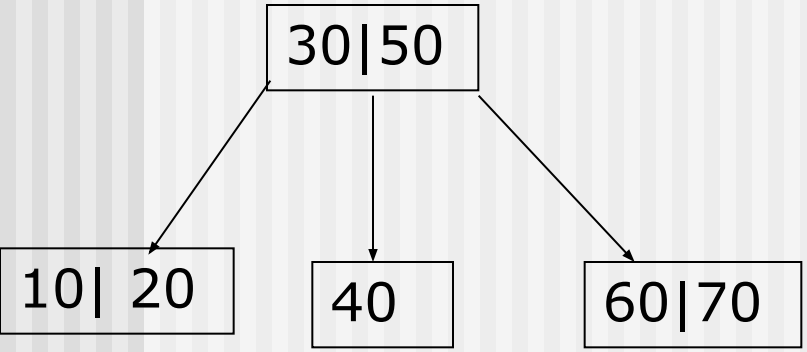
Встретился
четырехместный узел

Добавляем:

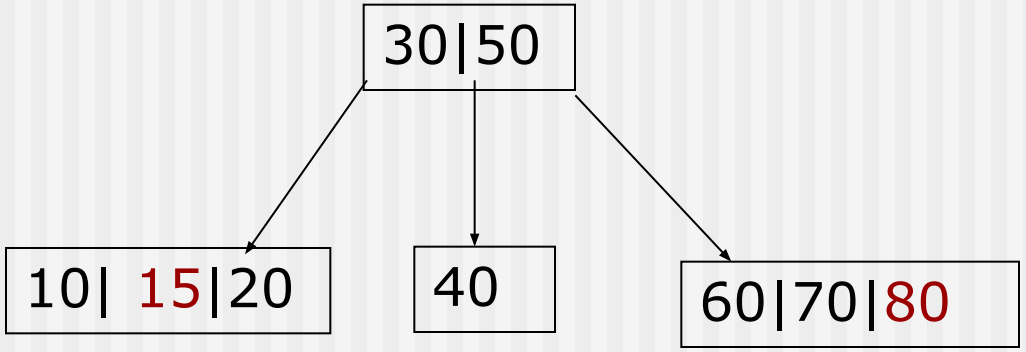


Вставка элементов

Добавим значения 80 и 15

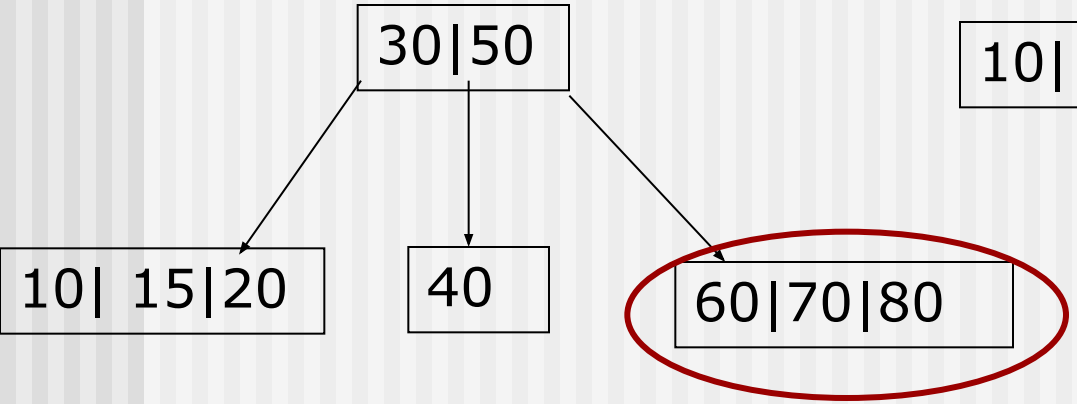


После вставки:

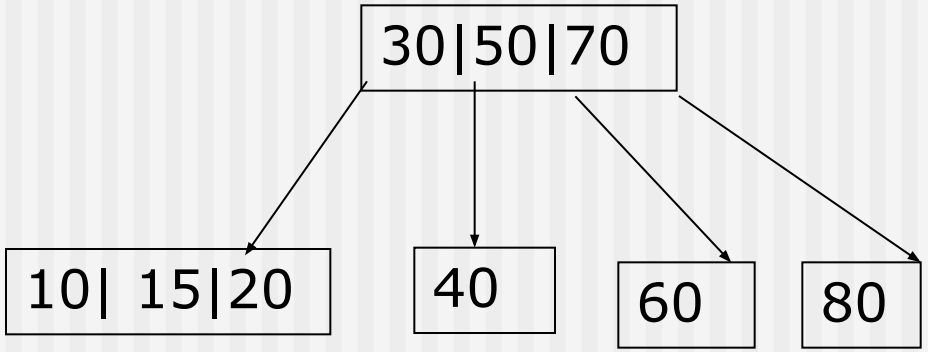


Вставка элементов

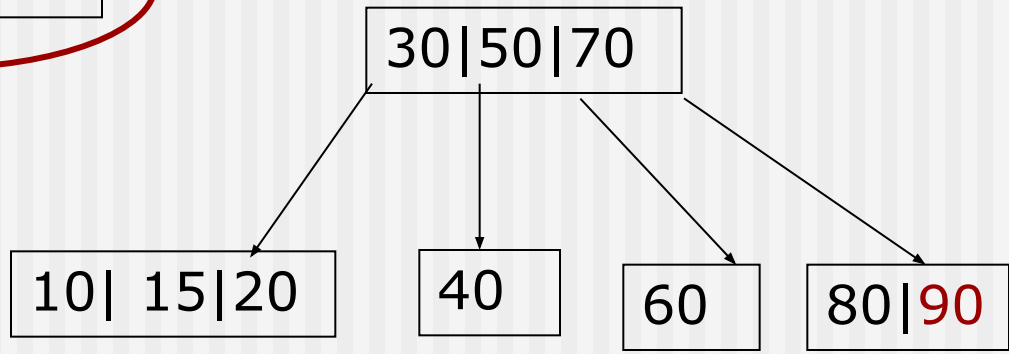
Добавим значение 90



Разделяем :

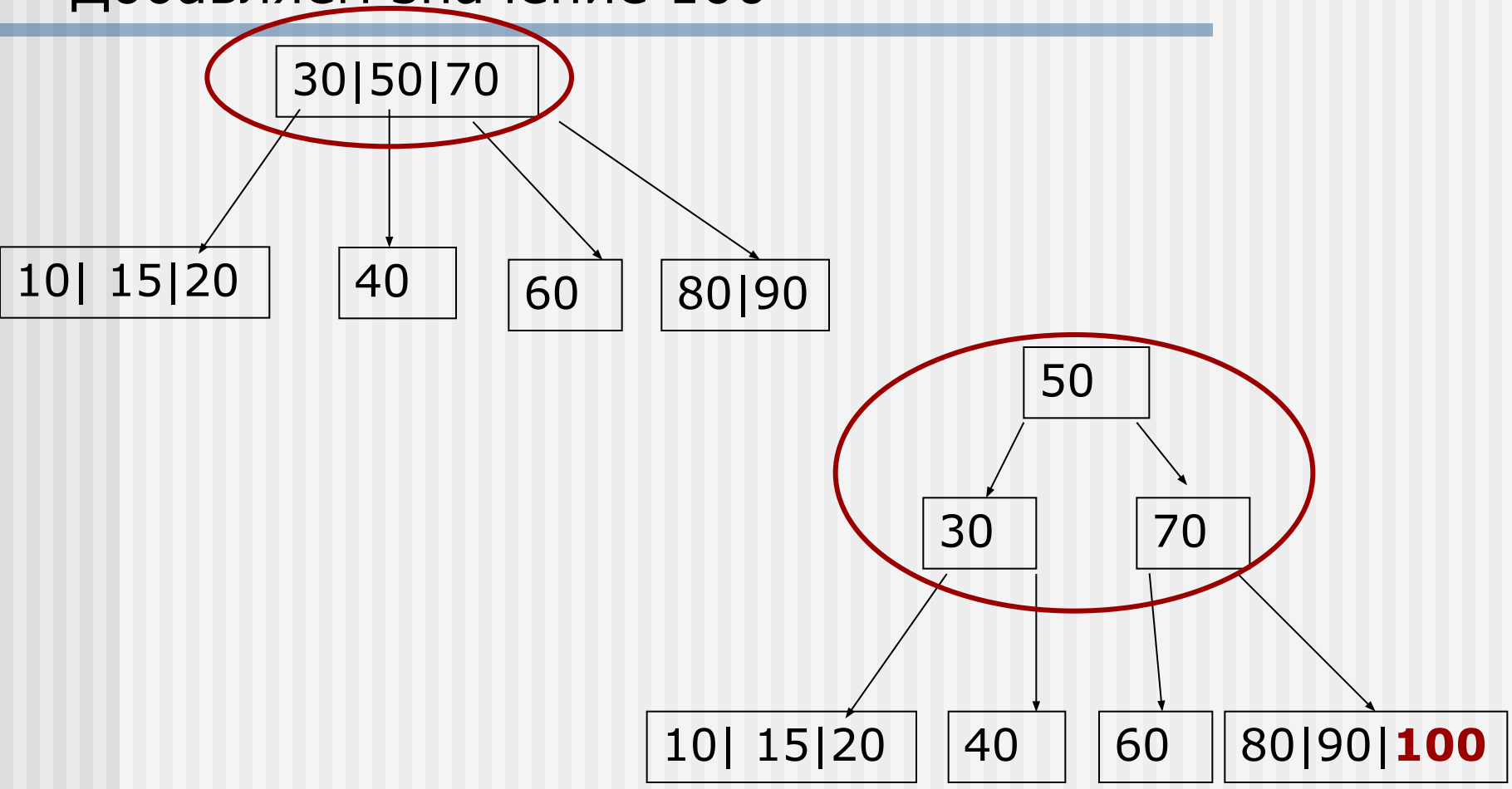


Добавляем:



Вставка элементов

Добавляем значение 100



Разделение четырехместных узлов при вставке

- Возможны случаи:
  - Узел является корнем
  - Узел имеет двухместого родителя
  - Узел имеет трехместного родителя

Удаление элементов

- Находим узел, содержащий данный элемент
- Заменяем элемент его симметричным преемником (*самый левый узел в правом поддереве*)
- Удаляем элемент из листа

Замечание: в отличие от 2-3 дерева удаление можно осуществить за один проход дерева не перестраивая его

Удаление элементов

- При проходе дерева во время поиска элемента, необходимо сразу преобразовать каждый двухместный узел в трех или четырехместный
- *Замечание: преобразования производятся аналогично процедуре разделения, только в обратном порядке*

Заключение

- Достоинства 2-3 и 2-3-4 деревьев заключается в том, что они хорошо сохраняют баланс
- Алгоритмы вставки и удаления в 2-3-4 дерево выполняются за меньшее число шагов чем для 2-3 дерева

Заключение

- Несмотря на то, что высота рассмотренных деревьев ниже, чем у бинарного дерева поиска, в алгоритмах поиска приходится делать большее число сравнений при посещении каждого узла
- Рассматривать деревья с числом дочерних узлов больше 4-х не имеет смысла, поскольку число сравнений будет очень велико. Их можно применять только если такие деревья реализованы на внешних носителях