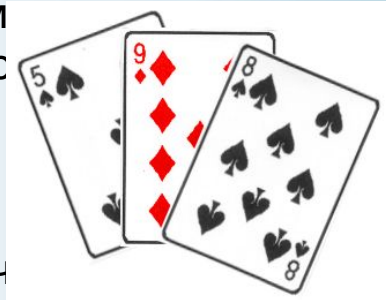


# Целочисленное програм-ние

Под задачей целочисленного программирования (ЦП) понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения. В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют **целочисленной задачей линейного программирования**. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет **целочисленной задачей нелинейного программирования**.

- Способы решения задач целочисленного программирования
- ❑ Округление до целого решений задачи ЛП или НЛП без условий целочисленности переменных
- ❑ Метод полного перебора (British museum technique – последовательный перебор всех вариантов с нахождением оптимума: число возможных решений любой целочисленной задачи является конечным)
- ❑ Методы с применением оптимизационных алгоритмов (например, метод ветвей и границ, МВГ)

**Важно помнить**, что методы решения целочисленных задач (перебор или МВГ) во многих случаях разумно применять только тогда, когда переменные принимают небольшие (<20) значения.



# Метод ветвей и границ

Впервые **метод ветвей и границ** был предложен Ландом и Дойгом в 1960 году для решения общей задачи целочисленного линейного программирования (Land A.H., Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica. V28, 1960).

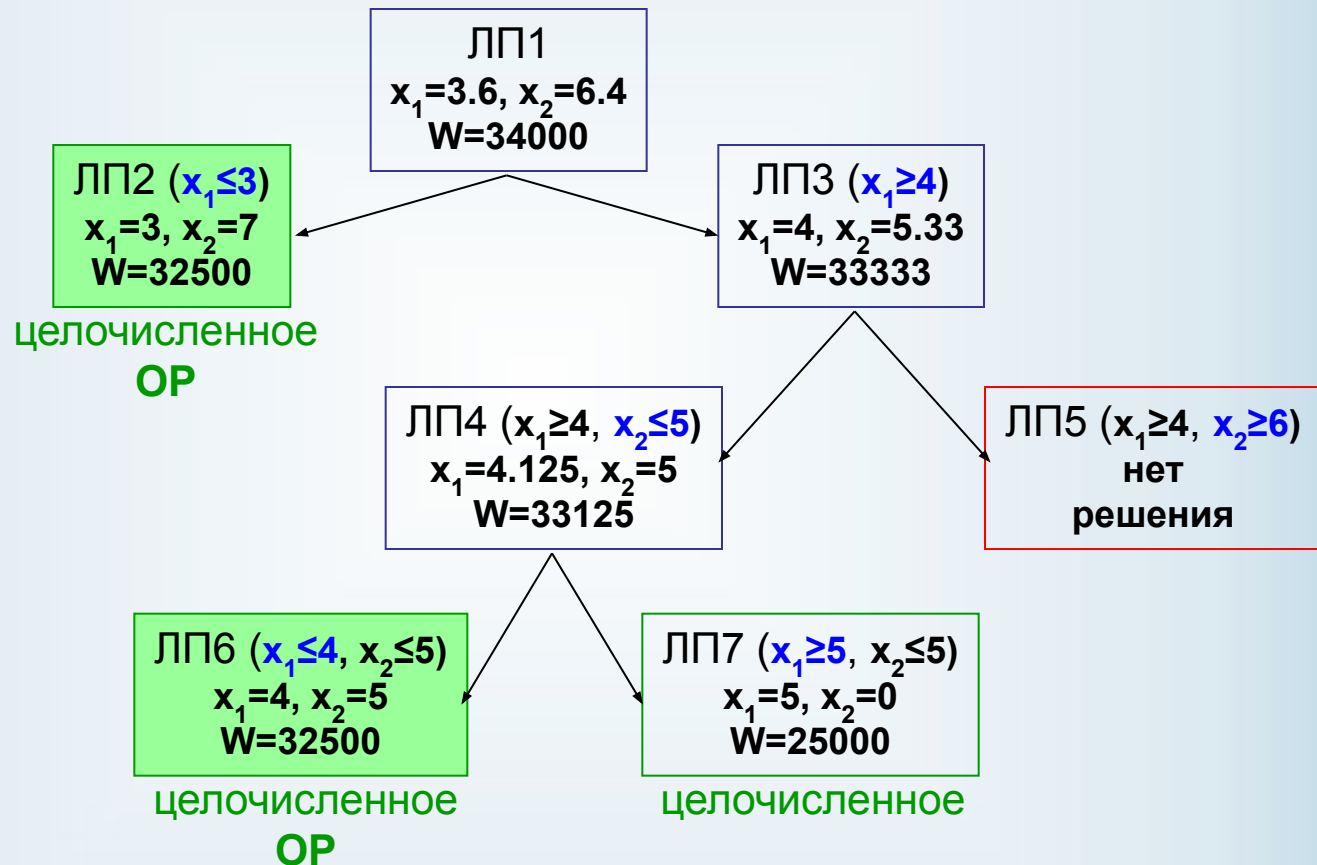
Алгоритм метода ветвей и границ представляет собой эффективную процедуру перебора всех целочисленных допустимых решений.

1. Решается исходная задача ЛП при условии непрерывности переменных.
2. Если все корни решения нецелочисленны (в обратном случае – оптимальное целочисленное решение найдено), производим ветвление задачи на две, для каждой из задач вводим дополнительные ограничения по одной из переменных  $x_i \leq a_i$ ,  $x_i \geq b_i$ , где  $a_i$  – наибольшее целое, не превосходящее  $x_i$ , а  $b_i$  – наименьшее целое, большее  $x_i$ , например, при корне исходной задачи  $x_2 = 2.3$  доп. ограничение в одной ветви будет  $x_2 \leq 2$ , а по другой –  $x_2 \geq 3$ .
3. Снова решаются задачи в обеих ветвях с накладыванием последующих ограничений по другим переменным. На каждом шаге проверяется целочисленность корней.  
Ветку считают тупиковой, если:
  - а) допустимое решение очередной задачи ЛП отсутствует;
  - б) текущее решение (значение целевой функции) хуже уже найденного целочисленного решения;
  - в) текущая задача ЛП является подзадачей ранее рассчитанной задачи.



# Метод ветвей и границ

Пример с оптимизацией побочного производства лесничества



Предыдущие ограничения по одной из переменных остаются в силе до их изменения при ветвлении.

# Рекомендации

## Рекомендации по формулировке и решению задач ЦП

- I. Количество целочисленных переменных необходимо уменьшать насколько возможно. Например, целочисленные переменные, значения которых должно быть не менее 20, можно рассматривать как непрерывные.
- II. В отличие от общих задач ЛП, добавление новых ограничений особенно включающих целочисленные переменные, обычно уменьшает время решения задач ЦП.
- III. Если нет острой необходимости в нахождении точного оптимального целочисленного решения, отличающегося от непрерывного решения, например, 3%, тогда реализацию метода ветвей и границ для задачи максимизации можно заканчивать, если отношение разницы между верхней и нижней границ к верхней границы меньше 0,03.

$$(W_U - W_L) / W_U < 3\%$$

Метод ветвей и границ можно также применять для решения задач нелинейного программирования.

# Задача оптимизации раскроя

## Пример о распиловке бревен

Из 50 шт. бревен длиной 6,5 м необходимо изготовить наибольшее число комплектов, в состав каждого из которых входит 2 шт. детали длиной 2 м и 3 шт. детали длиной 1,25 м.

### 1. Подход "в лоб", решение задачи на ЭВМ.

**Показатель эффективности:** количество ( $K$ ) готовых комплектов из 50 бревен  $W=K \rightarrow \max$

**Управляемые переменные:**  $x_A$  и  $x_B$  – число деталей А и В, получаемых из заготовки

#### Ограничения:

по длине заготовки  $2x_A + 1,25x_B \leq 6,5$

по комплектности  $50x_A - 2K \geq 0$ ;  $50x_B - 3K \geq 0$ ;

(эти ограничения можно не учитывать)

областные ограничения  $x_A \geq 0$ ,  $x_B \geq 0$ ,  $K \geq 0$  - целые

Расчет на ЭВМ дает  $x_A=2$ ,  $x_B=2$ ,  $K=33$ . Это означает, что если из одной заготовки выкраивать две 2 м детали А и две 1,25 м детали В, то максимальное количество комплектов будет 33.



# Задача оптимизации раскроя

2. ЛПР принимает несколько вариантов раскроя, задача решается с использованием ЭВМ.

Сырье может раскраиваться на заготовки различными способами - вариантами (картами) раскроя, которые сводятся в специальную таблицу (в нашем примере существует 4 варианта распиловки).

Длина заготовки, м.	Варианты раскроя				Число деталей в комплекте
	1	2	3	4	
2	3	2	1	0	2
1.25	0	2	3	5	3
отходы	0.5	0	0.75	0.25	
Число заготовок	x1	x2	x3	x4	

В качестве **показателя эффективности** целесообразно взять число комплектов **K**, которое можно получить из заданного числа заготовок (50 бревен). Возможны другие постановки - взять число заготовок **Z**, которое необходимо иметь, чтобы получить заданное число комплектов или отходы **O**.

# Задача оптимизации раскроя

Длина заготовки, м.	Варианты раскроя				Число деталей в комплекте
	1	2	3	4	
2	3	2	1	0	2
1.25	0	2	3	5	3
отходы	0.5	0	0.75	0.25	
Число заготовок	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	

**Управляемые переменные:**

$x_n$  - число заготовок, раскраиваемых по n варианту.

**Целевая функция:**

$$W_1 = K \rightarrow \max \quad \text{или}$$

$$W_1 = O = 0.5x_1 + 0x_2 + 0.75x_3 + 0.25x_4 \rightarrow \min$$

**Ограничения:**

по числу заготовок  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$

по комплектности  $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2K \geq 0$

$$2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3K \geq 0$$

областные ограничения  $x_1, x_2, x_3, x_4, K \geq 0$  - целые

# Задача оптимизации раскроя

Решения, полученные на ЭВМ.

Переменная	Решения				
	1	2	3	4	5
x1	0	0	0	1	0
x2	41	41	42	40	40
x3	0	1	0	1	2
x4	9	8	8	8	8
К	41	41	41	41	41

Из таблицы видно, что существует пять равноценных вариантов раскроя, которые приводят к получению 41 комплекта из 50 заготовок. Если данный результат сравнить с результатом, полученном в первом случае (33 комплекта из тех же самых 50 заготовок), то получаем выигрыш в 8 комплектов.

ЛПР может выбрать какой-нибудь из предложенных вариантов распиловки, например, на основании предпочтений по длине отходов.