Двойственный симплекс-метод

Введение

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования (ЗЛП):

$$\min\left(2x_1 + 4x_2\right)$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Приведем рассматриваемую ЗЛП к каноническому виду:

$$\max\left(-2x_1-4x_2\right)$$
$$3x_1+x_2-S_1=3$$
$$4x_1+3x_2-S_2=6$$
$$x_1+2x_2-S_3=3$$
$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2},$$
$$S_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}$$

или

$$\max\left(-2x_1-4x_2\right)$$
$$-3x_1-x_2+S_1=-3$$
$$-4x_1-3x_2+S_2=-6$$
$$x_1+2x_2-S_3=3$$
$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2},$$
$$S_i\ge 0, i=\overline{1,3}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$P^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Матрица $P^{(0)}$ содержит единичную подматрицу порядка 3 и следовательно, определяет базисное решение

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (-3;-6;3); \quad \overline{N}^{(0)} = (3;4;5)$$

системы уравнений, причем

$$\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}} = (0;0;0)$$

Так как элементы (n+1=6)-го столбца матрицы системы $P^{(0)}$ не являются неотрицательными, то она не является К-матрицей ЗЛП. Вычислим симплекс-разности матрицы $P^{(0)}$:

$$\Delta_j^{(0)} = \left(\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}}, a_j^{(0)}\right) - C_j = -C_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}$$

Так как все симплекс-разности матрицы $P^{(0)}$ являются неотрицательными, то базисное решение

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = \left(-3; -6; 3\right); \quad \overline{N}^{(0)} = \left(3; 4; 5\right)$$

не являющееся допустимым решением ЗЛП, является «лучшим», чем оптимальное решение.

В чем отличие двойственного симплекс-метода от обычного??

При решении задачи симплекс-методом текущее базисное решение является допустимым, но неоптимальным. Эти соображения позволяют построить метод решения определенного класса ЗЛП. В этом методе, называемом ***ДВОЙСТВЕННЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ***, на каждой итерации обеспечивается выполнение условия оптимальности текущего базисного решения, не являющегося допустимым. Критерием окончания процесса итераций является получение допустимого решения.

КЗЛП имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ,\ i = \overline{1,\ m} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,\ n},\ \ b_i \geq 0 \qquad (3)$$

или в екторно - матричной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{\mathrm{x}}) \to \max \qquad (4)$$

$$\mathrm{A}\bar{\mathrm{x}} = \bar{b} \qquad (5)$$

$$\bar{\mathrm{x}} \geq 0, \quad \bar{b} \geq 0 \qquad (6)$$

Р-матрица. Определение

Р-матрицей КЗЛП (1) –(3) называется расширенная матрица системы линейных уравнений, равносильной системе (2), содержащую единичную подматрицу порядка m на месте n первых столбцов, все симплекс-разности которой неотрицательны.

Очевидно, что всякая Р-матрица ЗЛП (1) определяет некоторое базисное решение системы уравнений (2).

Базисное решение системы линейных уравнений (1), определяемое Р-матрицей, называется ***псевдопланом ЗЛП***.

Условие перехода от одной Р-матрицы ЗЛП к другой

Пусть известна Р-матрица $P^{(s)}$, определяющая псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(s)}} = \overline{b}^{(s)}; \;\; \overline{N}^{(s)}$$

Условия перехода от матрицы $P^{(s)}$ к матрице $P^{(s+1)}$ составляют содержание следующей теоремы:

Теорема 1:

- Пусть $b_l^{(S)} < 0$ и в bй строке матрицы $P^{(s)}$ есть хотя бы один отрицательный элемент. Тогда с помощью одного шага метода Жордана-Гаусса можно построить новую Р-матрицу $P^{(s+1)}$, выбрав направляющий элемент из условия:

$$\theta^{(S)} = \frac{\Delta_K^{(S)}}{-a_{lK}} = \min_{\substack{1 \le j \le n \\ a_{ij<0}}} \frac{\Delta_K^{(S)}}{-a_{lK}}$$

- ***Замечание***: Если в матрице $P^{(s)}$ не $b_l^{(S)} < 0$, то определяемый ею псевдоплан является решением ЗЛП.

Теорема 2:

Пусть $b_l^{(s)} < 0$ и в bй строке матрицы $P^{(s)}$ нет ни одного отрицательного элемента. Тогда множество планов Р ЗЛП (1) - (3) пусто.

Теорема 3:

При переходе от матрицы $P^{(s)}$ к матрице $P^{(s+1)}$ целевая функция изменяется в соответствии с формулой:

$$f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}\right)=f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}\right)+\theta^{(S)}b_l^{(S)}=f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}\right)+\frac{\Delta_K^{(S)}}{-a_{lK}}b_l^{(S)}$$

откуда следует, что $f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}\right)\leq f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}\right)$ т.к. $b_l^{(S)}<0$

И $a_{lK}^{(S)}<0$. Из последнего неравенства следует, что при переходе от одного псевдоплана к другому значению функции $f\left(\overline{x}\right)$ не возрастает.

Алгоритм P-метода

Будем считать, что известна исходная P- матрица $P^{(0)}$ задачи линейного программирования, определяющая исходный псевдоплан:

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = \left(b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots , b_m^{(0)}\right)$$

$$\overline{N}^{(S)} = \left(N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, \dots , N_m^{(0)}\right)$$

В методе последовательного уточнения оценок последовательно строят P-матрицы $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots , P^{(S)}, \dots$ задачи линейного программирования, пока не получат P-матрицу ЗЛП, определяющую ее оптимальный план.

Рассмотрим алгоритм S-ой итерации метода последовательного уточнения оценок. В начале S-ой итерации имеем P-матрицу $P^{(s-1)}$ задачи линейного программирования, определяющую псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}} = \overline{b}^{(S-1)}; \quad \overline{N}^{(S-1)}$$

ШАГ 1. Найдем номер l из условия

$$b_l^{(S-1)} = \min_{1 \le i \le m} b_i^{(S-1)}$$

ШАГ 2. Если $b_l^{(S-1)} \geq 0$, то псевдоплан

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}} = \overline{b}^{(S-1)}; \ \ \overline{N}^{(S-1)}$$

является оптимальным опорным планом, а

$$f\left(\overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}}\right) = \left(\overline{C}_{\overline{N}^{(S-1)}}, \overline{X}_{\overline{N}^{(S-1)}}\right)$$

есть оптимальное значение линейной формы $f\left(\overline{x}\right)$, иначе переходим к шагу 3.

ШАГ 3. Если $a_{lj}^{(S-1)} \geq 0; \;\; j = \overline{1,n}$ то задача линейного программирования не имеет решения (множество планов Р пусто), иначе переходим к шагу 4.

ШАГ 4. Вычисляем для столбцов $\bar{a}_j^{(S-1)}$ матрицы $P^{(S-1)}\left(j \neq N_i^{(S-1)}, i = 1, 2, \ldots, m\right)$ симплекс-разности $\Delta_j^{(S-1)}$ и находим номер К из условия:

$$\theta^{(S-1)} = \frac{\Delta_K^{(S-1)}}{-a_{lK}^{(S-1)}} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\Delta_j^{(S-1)}}{-a_{lj}^{(S-1)}}, a_{lj}^{(S-1)} < 0 \right\}$$

ШАГ 5. Вычисляем компоненты вектора $\overline{N}^{(S-1)}$

$$N_i^{(S)} = N_i^{(S-1)}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i \neq l; \quad N_l^{(S)} = K$$

ШАГ 6. Производим один шаг метода Жордана-Гаусса с направляющим элементом $a_{lK}^{(S-1)}$.

Вычисляем элементы Р-матрицы $P^{(S)}$ методом Жордана-Гаусса. Присваиваем переменной алгоритма S значение S+1 и переходим к шагу 1.

Решим задачу, которую мы начали пешать в начале презентации. Результаты решения приведены в симплекс-таблице.

S	I	$\overline{N}^{(S)}$	$\overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}$	$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$	-2	-4	0	0	0
					$\overline{a}_1^{(S)}$	$\overline{a}_2^{(S)}$	$\overline{a}_3^{(S)}$	$\overline{a}_4^{(S)}$	$\overline{a}_5^{(S)}$
0	1	3	0	-3	-3	-1	1	0	0
	2	4	0	-6	-4	-3	0	1	0
	3	5	0	3	1	2	0	0	1
	4	$\Delta_j^{(0)}$		F=0	2	4	0	0	0
	5	$\theta^{(0)}$			2/4	4/3	-	-	-
1	1	3	0	3/2	0	5/4	1	¾	0
	2	1	-2	3/2	1	¾	0	-1/4	0
	3	5	0	3/2	0	5/4	0	1/4	1
	4	$\Delta_j^{(1)}$		F=-3	0	5/2	0	1/2	0

Решим следующую ЗЛП:

$$\min f(\overline{x}) = 6X_1 + 3X_2$$

$$-3X_1 + X_2 \geq 1$$

$$2X_1 - 3X_2 \geq 2$$

$$X_{1,2} \geq 0$$

Приводим ЗЛП к каноническому виду

$$\max f(\overline{x}) = (-6X_1 - 3X_2)$$

$$3X_1 - X_2 + S_1 = -1$$

$$-2X_1 + 3X_2 + S_2 = -2$$

$$X_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}.$$

Т.К. расширенная матрица $\widetilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & & -2 \\ & & & & & \end{pmatrix}$

системы линейных уравнений является Р-матрицей.

Следовательно, к решению данного ЗЛП применим Р-метод.

Решим задачу, которую мы начали решать в начале презентации. Результаты решения приведены в симплекс-таблице.

S	I	$\overline{N}^{(S)}$	$\overline{C}_{\overline{N}^{(S)}}$	$\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$	-6	-3	0	0
					$\overline{a}_1^{(S)}$	$\overline{a}_2^{(S)}$	$\overline{a}_3^{(S)}$	$\overline{a}_4^{(S)}$
0	1	3	0	-1	3	-1	1	0
	2	4	0	-2	-2	3	0	1
	3	$\Delta_j^{(0)}$		F=0	6	3	0	0
	4	$\theta^{(0)}$			3	-	-	-
1	1	3	0	-4	0	7/2	1	3/2
	2	1	-6	1	1	-3/2	0	-1/2
	3	$\Delta_j^{(1)}$		F=-6	0	12	0	3

Т.К. $bl=-4<0$, а все $a1j>=0$, то множество планов ЗЛП является пустым множеством.